Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика
Секція: моделювання

Застосування екстремуму в прикладних задачах

Роботу виконав:
Федоров Олександр Сергійович,
учень 11 класу Миколаївського
муніципального колегіуму
ім. В.Д. Чайки

Науковий керівник:
Крисинська Ірина Володимирівна,
Завідуюча кафедрою математики
Миколаївського муніципального
колегіуму ім. В.Д. Чайки, вчитель-
методист.

Миколаїв – 2015

Тези

Застосування екстремуму в прикладних задачах

Федоров Олександр Сергійович
Миколаївське територіальне відділення МАН України
учень 11 А класу Миколаївського муніципального колегіуму, м. Миколаїв
Науковий керівник: Крисинська І.В., завідуюча кафедрою математики Миколаївського муніципального колегіуму, вчитель-методист.

Математичне моделювання є одним із основних сучасних методів дослідження. Розв'язування прикладних задач в більшості випадків зводиться до задач оптимізації: задач на знаходження екстремуму (максимуму або мінімуму).

Готуючись до Всеукраїнських олімпіад і турнірів ми часто зустрічаємося з задачами на тему знаходження екстремумів функцій. Ця тема досить відома у математичній практиці, задачі з використанням екстремуму представлені на різноманітних математичних змаганнях.

Усе це зацікавило мене до вивчення даного розділу математики, до намагання пошуку власного розв'язання цікавих та нестандартних задач даної тематики. Ця робота має на меті дослідити деякі методи знаходження екстремумів функцій та розглянути застосування екстремуму у моделюванні деяких процесів.

Наведено розв'язок авторської задачі: нехай x та y – додатні дійсні числа, для яких $x^y + y = y^x + x$ і $f(x, y) = x + y - xy$. Знайти максимум $f(x, y)$.

В роботі знайдено власні розв'язання до переважної більшості представлених задач, сформульовано і доведено узагальнення до задачі «Умовний мінімум», яка була представлена на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й.Ядренка (м. Чернівці 2014р.).

Пропонується наступне узагальнення задачі: нехай x, y, z – довільні невід'ємні числа. Знайдіть найменше можливе значення $x + y + z$, які задовольняють умову $(x - y)(y - z)(z - x) \geq r > 0$.

Розглянуто моделі «Точки на сфері та барицентричні координати» та «Рівень життя та політичні технології», в яких застосовується поняття екстремуму.

При моделюванні політичних технологій в роботі показано, що політтехнологи не зможуть зробити так, щоб інтегральний показник $aP + bQ +$ $+cR$, монотонно зростав на протязі п'яти років.

Зміст

ВСТУП

Виникнувши як наука про розв'язування рівнянь, математика еволюціонувала і на разі вирішує широкий спектр прикладних проблем. Зокрема важливою частиною математики є екстремуми.

З давніх часів перед людиною виникають практичні проблеми вибору оптимального значення деякої величини при певних умовах.

Як правило, в задачах подібного роду досягнення деякого результату може бути здійснено не єдиним способом і доводиться відшукувати найкращий спосіб досягнення результату.

Однак в одній і тій же задачі в різних ситуаціях найкращими можуть бути зовсім різні рішення. Тут все залежить від обраного або заданого критерію.

Завдання такого характеру, отримали назву задачі на екстремуми або завдання на оптимізацію, виникають у самих різних областях людської діяльності. І їх роль в житті людей дійсно дуже важлива. Вирішенням таких завдань займалися найбільші математики минулих епох - Евклід, Архімед, Аполлоній, Герон, Тарталья, Торрічеллі, Ньютон та багато інших. Адже, незважаючи на все різноманіття, їх об'єднує одна особливість - пошук найбільш вигідного, у певному відносинах, найбільш економного, найменш трудомісткого, найбільш продуктивного. Цей пошук коротко можна назвати пошуком кращого.

Ще до створення диференційного числення П'єр Ферма (1601–1665) у трактаті "Метод пошуку найбільших і найменших значень" (1638, опублікована у 1679 г.) сформулював перший загальний принцип відшукання екстремуму, який на сучасній мові звучить так: "У точці екстремума лінійна частина приросту функції дорівнює нулю". Справедливо, що необхідна умова екстремуму, виражена у термінах диференційного числення його створювачами Ісааком Ньютоном (1643–1727) і Готфрідом Вільгельмом Лейбніцем (1646–1716) носить ім'я Ферма. Ферма розглядав також випадки, коли функція задана неявно.

Подальший розвиток теорія екстремумів отримала у трудах братів Бернуллі — Якоба (1654–1705) і Іоганна (1667–1748) і великого Леонарда Ейлера (1707–1783).

Ейлер писав: “У світі не трапляється нічого, у чому не вбачався б сенс якогось максимума або мінімума”.

Розв’язуючи задачу про пошук точок умовного екстремуму, Жозеф Луї Лагранж (1736–1813) розробив метод невизначених множників, названий його ім’ям.

Процес побудови математичних моделей може бути умовно розбитий на такі етапи [2].

- ✓ Словесно-змістове описання об’єкта чи явища (передмодель).
- ✓ Ідеалізації об’єкта. Відкидаються всі фактори та ефекти, які вважаються не самими суттєвими для його поведінки. Це необхідно, щоб справедливість цих припущень піддавалась кількісному контролю.
- ✓ Вибір чи формулювання закону, якому підлягає об’єкт, і його запису в математичній формі.
- ✓ “Оснащення” моделі. Формулюється мета дослідження моделі.
- ✓ Побудована модель вивчається всіма доступними методами, у тому числі – перевіркою з використанням різних підходів.

В роботі досліджено моделі в яких ключове місце відіграє поняття екстремуму. Побудова математичної моделі дозволяє розв’язати оптимізаційну задачу.

Задачі пошуку екстремального значення функції зустрічаються у олімпіадах різного рівня, а також у престижних математичних змаганнях, таких як математичні бої або турніри.

Ця робота має на меті дослідити деякі методи розв’язання задач на цю тему.

Відповідно *об’єктом* дослідження є різноманітні задачі на відшукання екстремумів при відповідних умовах та методи їх розв’язання.

Особистий внесок: знайдено власні розв’язання до переважної більшості представлених задач, наведено розв’язання олімпіадних задач та задач Всеукраїнських турнірів юних математиків, авторських задач з їх узагальненнями.

Розділ 1

Розглянемо деякі методи знаходження екстремуму функції.

1.1. Метод невизначених множників Лагранжа

Метод невизначених множників або метод невизначених множників Лагранжа – метод знаходження локального умовного екстремуму, запропонований італійським математиком Жозефом-Луї Лагранжем. Метод дозволяє звести задачу на відшукання умовного екстремуму до задачі на знаходження безумовного екстремуму.

Розглянемо функцію n змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при s умовах $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, де $i = \overline{1,2, \dots, s}$ і f і g_i мають неперервну похідну.

Вводячи s невизначених множників Лагранжа λ_i, побудуємо функцію Лагранжа

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Задача знаходження умовного екстремуму зводиться до розв'язування системи $n + s$ рівнянь із $n + s$ змінними:

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)}{dx_i} = 0, \qquad i = \overline{1,2, \dots, n} \\ \dfrac{dF(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)}{d\lambda_j} = 0, \qquad j = \overline{1,2, \dots, s} \end{cases}$$

Зауважимо, що метод невизначених множників Лагранжа дозволяє знаходити стаціонарні точки, тобто дає лише необхідну умову. Серед знайдених стаціонарних точок треба знайти мінімуми і максимуми функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Приведемо приклад використання даного методу.

Приклад: Знайти екстремуми функції $t(\alpha) = a\cos\alpha + b\sin\alpha$.

<u>Розв’язання:</u>

Позначимо $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, причому $x^2 + y^2 = 1$; $f(x, y) = ax + by$. Тоді $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Тоді $F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = -\lambda x^2 - \lambda y^2 + ax + by + \lambda$.

$$\begin{cases} \dfrac{dF(x,y,\lambda)}{dx} = 0 \\ \dfrac{dF(x,y,\lambda)}{dy} = 0 \\ \dfrac{dF(x,y,\lambda)}{d\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda x + a = 0 \\ -2\lambda y + b = 0 \\ -\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2\lambda} \\ y = \dfrac{b}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{a}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\lambda}\right)^2 = 1$$

$$\pm\sqrt{a^2 + b^2} = 2\lambda$$

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$f(x, y) = ax + by = \pm\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$$

Маємо, що найбільше значення $t(\alpha)$ дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2}$, найменше – $-\sqrt{a^2 + b^2}$.

Зауважимо, що цей приклад можна легко розв’язати, застосовуючи тригонометричні формули.

1.2. Метод використання класичних нерівностей

Якщо відоме значення мінімуму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то довести, що це значення є мінімумом на інтервалі, можна за допомогою класичних нерівностей.

Говорячи про нерівності, частіше мають на увазі завдання типу доведення певної нерівності. Існують різні методи доведення нерівностей: метод різниці, метод спрощення нерівності, метод від супротивного, метод Штурма, метод математичної індукції, метод застосування раніше доведеної нерівності… Безумовно, розглянути усі методи неможливо, а у контексті науково-дослідницької роботи і недоречно –

оскільки існує ризик, що дослідження буде поверхневим і неповним. Тому у цій роботі обмежимось останнім методом.

На практиці, існує багато нерівностей, які використовуються для спрощення інших. Багато з них загальновідомі, для їх використання на математичних заходах не потрібно попереднього доведення. Серед них відрізнять, зокрема, такі:

Нерівність трьох квадратів: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Нерівність Єнсена: для опуклої вгору функції f з її області визначення справджується наступна нерівність:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

Якщо ж функція опукла вниз, то знак нерівності змінюється.

Нерівність Бернуллі: для $x \geq -1, n \in \mathbb{Z}_+$ виконується

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

Нерівність Мюрхеда: нехай $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ – два впорядкованих набори невід'ємних чисел з однаковою сумою. Позначимо $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$; $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ – суму всіх $F(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$ по всім $n!$ перестановкам α_i; $\alpha \succ \beta$ тоді і тільки тоді, коли $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \geq \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ для всіх $k = \overline{1..n-1}$. Тоді, якщо $\alpha \succ \beta$, то $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \geq [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ для всіх невід'ємних $x_1, x_2, \dots, x_n$.

З вищесказаних міркувань, ми не розглянули застосування великої кількості таких нерівностей. У цій роботі пропонуємо зупинитися на наступних ключових нерівностях та задачах, що, на нашу думку, найкраще ілюструють їх переваги і недоліки.

1.2.1. *«Циклічна перестановка»*

Розглянемо таку задачу з Всесвітньої математичної олімпіади 1995 р., Канада [1]

Задача 1. Нехай $a, b, c > 0, abc = 1$. Знайдіть найменше значення

$$A = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$$

Розв'язання:

$$A = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{b^2c^2}{a^3b^2c^2(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b^3c^2a^2(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c^3a^2b^2(a+b)} =$$

$$= \frac{b^2c^2}{a(b+c)} + \frac{c^2a^2}{b(c+a)} + \frac{a^2b^2}{c(a+b)}$$

Застосуємо наслідок нерівність Коші-Буняковського:

$$A \geq \frac{(bc+ac+ab)^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{bc+ac+ab}{2}$$

Застосуємо нерівність Коші для трьох чисел:

$$bc + ac + ab \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$$

Отже, $\frac{bc+ac+ab}{2} \geq \frac{3}{2}$. Це значення досягається при $a = b = c = 1$. Отже, мінімумом A є $\frac{3}{2}$.

Другий спосіб розв'язання

Доведемо, що $A \geq 3/2$. Для цього помножимо обидві частини цієї нерівності на $2a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a)$:

$$2b^3c^3(a+b)(a+c) + 2c^3a^3(b+c)(b+a) + 2a^3b^3(c+a)(c+b) \geq$$
$$\geq 3a^3b^3c^3(a+b)(b+c)(c+a),$$

розкривши дужки, маємо:

$$[4,4,0] + 2[4,3,1] + [3,3,2] \geq 3[5,4,3] + [4,4,4]. (9)$$

Оскільки $abc = 1$, то можна нерівність (9) записати як:

$$[4,4,0] + 2[4,3,1] + [3,3,2] \geq 3\left[\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right] + \left[\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right]$$

Оскільки $(4,4,0) \succ \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right), (4,3,1) \succ \left(\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right), (3,3,2) \succ \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$, то за нерівністю Мюрхеда маємо, що нерівність виконується.

Залишилося лише показати, що значення $3/2$ досягається. Це можна зробити, наприклад, підставивши у вихідну нерівність значення $a = b = c = 1$.

1.2.2. Максимум функції $f(x,y)$

<u>Задача 2</u>. (авторська).

Нехай x та y – додатні дійсні числа, для яких $x^y + y = y^x + x$ і $f(x,y) = x + y - xy$. Знайти максимум $f(x,y)$.

<u>Розв'язання:</u>

Маємо, що $f(1,1) = 1$. Доведемо, що $x + y - xy \leq 1$, тобто $(1-x)(1-y) \geq 0$.

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $x \geq y$ і припустимо, що $x + y - xy > 1$. Тоді, за припущенням, одержуємо, що $(1-x)(1-y) < 0$, тобто $x > 1 > y > 0$. В силу нерівності Бернуллі для довільних $a, b \in \mathbb{R}$ маємо:

1) Якщо $a > 1$ і $b > -1$, то $(1+b)^a \geq 1 + ab$, тобто

$$\big(1 + (y-1)\big)^x \geq 1 + x(y-1),$$

$$y^x \geq 1 + xy - x.$$

2) Якщо $0 < a < 1$ і $b > 0$, то $(1+b)^a < 1 + ab$, тобто

$$\big(1 + (x-1)\big)^y < 1 + y(x-1),$$

$$x^y < 1 + xy - y.$$

Додавши ці дві нерівності, одержуємо

$$y^x + 1 + xy - y > x^y + 1 + xy - x,$$

$$y^x + x > x^y + y,$$

що суперечить заданій рівності. Отримали протиріччя, отже, $x + y - xy \leq 1$.

1.3. Метод використання властивостей диференційованих функцій на інтервалі

Метод використання властивостей диференційованих функцій на інтервалі продемонструємо на задачі «Многочлени» (ТЮМ-VIII 2004р. [5]), розв'язок якої є авторським.

<u>Задача 3.</u> Нехай $n > 2, n \in \mathbb{N}$. Розглянемо множину M всіх многочленів вигляду $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + 1$ з дійсними коефіцієнтами. Яку підмножину S множини M ви зумієте визначити (охарактеризувати), щоб $\min_{P \in S}(a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2) = \frac{4}{n-1}$?

<u>Розв'язання:</u>

Вираз, мінімум якого потрібно досягнути, складається з суми квадратів коефіцієнтів заданого многочлена. Найбільш логічно його порівняти із сумою коефіцієнтів цього многочлена, яка сума дорівнює $P(1)$, або із знакозмінною сумою коефіцієнтів, яка дорівнює $P(-1)$.

Скористаємося відомою нерівністю між середнім квадратичним та середнім арифметичним для невід'ємних величин і властивостями модулів.

Оскільки

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n-1}|}{n-1} = \frac{|P(1) - 2|}{n-1},$$

то

$$a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = \left(\sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}{n-1}}\right)^2 \cdot (n-1) \geq \frac{(P(1) - 2)^2}{n-1} \geq \frac{4}{n-1}$$

Важливо, що рівність при цьому досягається (коли всі a_i рівні між собою і дорівнюють $\pm\frac{2}{n-1}$).

Шуканою підмножиною S є множина всіх вказаних многочленів, для яких $P(1) \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо нерівність

$$\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2}{n-1}} \geq \frac{|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|-a_1+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}|}{n-1}$$

Звідки при парному n будемо мати

$$a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2 \geq \frac{(P(-1)-2)^2}{n-1} \geq \frac{4}{n-1}$$

І до знайденої вище множини S можна додати ще й всі многочлени, для яких $P(-1) \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

Якщо n непарне, то отримуємо нерівність

$$a_1^2+\cdots+a_{n-1}^2 \geq \frac{\left(P(-1)\right)^2}{n-1} \geq \frac{4}{n-1}$$

У такому випадку до S додаються многочлени, для яких $P(-1) \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Скористаємось цим підходом для розв'язання узагальнення даної задачі:

$$\min_{P\in S}\left(a_1^k+\cdots+a_{n-1}^k\right) = \frac{a^k}{(n-1)^{k-1}}$$

Де $a > 0$ і $k > 1$ (зокрема, при $a = k = 2$ отримуємо задану задачу). Скориставшись нерівністю між середнім степеневим і середнім арифметичним, маємо

$$\left(\frac{|a_1|^k+\cdots+|a_{n-1}|^k}{n-1}\right)^{\frac{1}{k}} \geq \frac{|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|}{n-1} \geq \frac{|a_1+\cdots+a_{n-1}|}{n-1} = \frac{|P(1)-2|}{n-1},$$

звідки $P(1) \in (-\infty; 2-a] \cup [2+a; +\infty)$.

Окремо для парних та непарних n множину S можна розширити за рахунок многочленів, для яких відповідно $P(-1) \in (-\infty; 2-a] \cup [2+a; +\infty)$ або $P(-1) \in (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$.

Зазначимо, що можливі значення $P(1)$ і $P(-1)$ виявилися незалежними від числа k.

1.4. «Умовний мінімум»

Розглянемо задачу XVII Всеукраїнського математичного турніру імені М.Й.Ядренка (2014р. м. Чернівці) [3] з назвою «Умовний мінімум».

Нехай x, y, z – довільні невід'ємні числа. Знайдіть найменше можливе значення $x + y + z$, які задовольняють умову $(x - y)(y - z)(z - x) \geq 1$.

Пропонуємо розглянути відразу *узагальнення задачі*:

Нехай x, y, z – довільні невід'ємні числа. Знайдіть найменше можливе значення $x + y + z$, які задовольняють умову $(x - y)(y - z)(z - x) \geq r > 0$.

<u>Розв'язання:</u>

Зауважимо, що жодна з рівностей $x = y$ або $y = z$ або $z = x$ неможлива, оскільки за умовою отримуємо $0 \geq 1$.

Враховуючи циклічність, достатньо розглянути лише випадок $x < y < z$.

Нехай $0 \leq x < \ y < \ z$.

Покажемо, що якщо $x \neq 0$, то сума не може бути мінімальною.

Припустимо, що $x > 0$, причому сума $x + y + z$ є мінімально можливою і $(x - y)(y - z)(z - x) \geq r$.

Розглянемо нову трійку чисел $x_1 = 0, y_1 = y - x, z_1 = z - x$, тоді

$$(x_1 - y_1)(y_1 - z_1)(z_1 - x_1) = (x - y)(y - z)(z - x) \geq r$$

причому $x_1 + y_1 + z_1 = x + y + z - 3x < x + y + z$.

Отже, наше припущення є невірним і $x = 0$.

Позначимо $y = \frac{x+kz}{1+k} = \frac{kz}{1+k}, k > 0$.

$$(x - y)(y - z)(z - x) = -\frac{kz}{1 + k}\left(\frac{kz}{1 + k} - z\right)z = \frac{kz^3}{(1 + k)^2} \geq r$$

$$z \geq \sqrt[3]{\frac{r(1 + k)^2}{k}}$$

$$x + y + z = 0 + \frac{kz}{1 + k} + z = z\left(\frac{2k + 1}{1 + k}\right)$$

Очевидно, що $z=\sqrt[3]{\frac{r(1+k)^2}{k}}$.

Тоді позначимо $f(k)=x+y+z=\frac{\sqrt[3]{r}\cdot\sqrt[3]{(1+k)^2}}{\sqrt[3]{k}}\cdot\frac{2k+1}{1+k}=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{2k+1}{\sqrt[3]{k(1+k)}}$.

Знайдемо екстремуми цієї функції; для цього знайдемо її похідну.

$$f'(k)=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{2\sqrt[3]{k(1+k)}-\frac{(2k+1)^2}{3\sqrt[3]{k^2(1+k)^2}}}{\sqrt[3]{k^2(1+k)^2}}=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{6k(1+k)-4k^2-4k-1}{3k(1+k)\sqrt[3]{k(1+k)}}=$$

$$=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{2k^2+2k-1}{3k(1+k)\sqrt[3]{k(1+k)}}$$

$$2k^2+2k+1=0$$

$$D=4+8=12$$

$$k=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{4}=\frac{\pm\sqrt{3}-1}{2}$$

Оскільки $k>0$, то $k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ – стаціонарна точка.

Оскільки похідна функції при переході через стаціонарну точку $k=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ змінює знак з $-$ на $+$, то вона є точкою мінімуму.

$$f(k)=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{2k+1}{\sqrt[3]{k(1+k)}}=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{\sqrt{3}-1+1}{\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}=$$

$$=\sqrt[3]{r}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{r}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}\approx\sqrt[3]{r}\cdot 2.18224727194344280712014522837961\ldots$$

Розділ 2. Застосування екстремуму у моделюванні деяких процесів

1.2. Модель: Точки на сфері та барицентричні координати

У багатьох геометричних задачах застосовуються методи знаходження екстремумів.

Сформулюємо таку задачу.

Задача 3. Точки A, B, C, D лежать на сфері радіуса 1. Відомо, що виконується така рівність:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}$$

Довести, що $ABCD$ – правильний тетраедр.

(XIII-турнір юних математиків ТЮМ ім. М.Й.Ядренка (м. Миколаїв 2010р.[4])

Доведення

Позначимо $\overline{OA} = \overline{e_1}, \overline{OB} = \overline{e_2}, \overline{OC} = \overline{e_3}, \overline{OD} = \overline{e_4},\ |\overline{e_i}| = 1, i = \overline{1..4}$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \overline{e_2} - \overline{e_1}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(\overline{e_2} - \overline{e_1})^2} = \sqrt{2(1 - \overline{e_1}\overline{e_2})}\ \ (1)$$

$$\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \overline{e_3} - \overline{e_1}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{2(1 - \overline{e_1}\overline{e_3})}\ \ (2)$$

$$\overline{AD} = \overline{OD} - \overline{OA} = \overline{e_4} - \overline{e_1};\quad \overline{AD} = \sqrt{2(1 - \overline{e_1}\overline{e_4})}\ \ (3)$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = \overline{e_3} - \overline{e_2};\quad \overline{BC} = \sqrt{2(1 - \overline{e_2}\overline{e_3})}\ \ (4)$$

$$\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = \overline{e_4} - \overline{e_2};\quad \overline{AD} = \sqrt{2(1 - \overline{e_2}\overline{e_4})}\ \ (5)$$

$$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = \overline{e_4} - \overline{e_3};\quad \overline{CD} = \sqrt{2(1 - \overline{e_3}\overline{e_4})}\ \ (6)$$

$$= 2^3 \sqrt{2(1 - \overline{e_1}\overline{e_2})(1 - \overline{e_1}\overline{e_3})(1 - \overline{e_1}\overline{e_4})(1 - \overline{e_2}\overline{e_3})(1 - \overline{e_2}\overline{e_4})(1 - \overline{e_3}\overline{e_4})} \leq$$

$$\leq 2^3 \left(\frac{6 - (\overline{e_1}\overline{e_2} + \overline{e_1}\overline{e_3} + \overline{e_1}\overline{e_4} + \overline{e_2}\overline{e_3} + \overline{e_2}\overline{e_4} + \overline{e_3}\overline{e_4})}{6}\right)^3\ \ (7)$$

$$(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2=4+2(\overline{e_1}\overline{e_2}+\overline{e_1}\overline{e_3}+\overline{e_1}\overline{e_4}+\overline{e_2}\overline{e_3}+\overline{e_2}\overline{e_4}+\overline{e_3}\overline{e_4});$$

$$\overline{e_1}\overline{e_2}+\overline{e_1}\overline{e_3}+\overline{e_1}\overline{e_4}+\overline{e_2}\overline{e_3}+\overline{e_2}\overline{e_4}+\overline{e_3}\overline{e_4}=\frac{1}{2}(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2-2$$

$$(7)D\le 2^3\cdot\left(\frac{6+2-\frac{1}{2}(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2}{6}\right)^3=\frac{1}{3^3}\cdot\left(\frac{16-(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2}{2}\right)^3\le$$

$$\le\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{2^3}\cdot 16^3=\left(\frac{2\cdot 8}{2\cdot 3}\right)^3=\left(\frac{8}{3}\right)^3=\frac{512}{27}$$

Причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\overline{e_1}\overline{e_2}=\overline{e_1}\overline{e_3}=\overline{e_1}\overline{e_4}=\overline{e_2}\overline{e_3}=\overline{e_2}\overline{e_4}=\overline{e_3}\overline{e_4}$.

Оскільки за умовою $D=\frac{512}{27}$, то $\overline{e_1}\overline{e_2}=\overline{e_1}\overline{e_3}=\overline{e_1}\overline{e_4}=\overline{e_2}\overline{e_3}=\overline{e_2}\overline{e_4}=\overline{e_3}\overline{e_4}$. Звідси за $(1)-(6)$ маємо $AB=AC=AD=BC=BD=CD$.

<u>Другий спосіб доведення</u>

Нехай для даного тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ і даної точки P вектор $\overline{A_4P}=x\overline{A_4A_1}+y\overline{A_4A_2}+z\overline{A_4A_3}$. При виборі точки O простору $\overline{A_4P}=\overline{OP}-\overline{OA_4}=x(\overline{OA_1}-\overline{OA_4})+y(\overline{OA_2}-\overline{OA_4})+z(\overline{OA_3}-\overline{OA_4})$, звідси $\overline{OP}=x\overline{OA_1}+y\overline{OA_2}+z\overline{OA_3}+(1-x-y-z)\overline{OA_4}$.

Позначимо $\lambda_1=x,\lambda_2=y,\lambda_3=z,\lambda_4=1-x-y-z$.

Тоді $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$.

Таким чином, для заданого тетраедра $A_1A_2A_3A_4$ і будь-яких точок O і P має місце рівність:

$$\begin{cases}\overline{OP}=\lambda_1\overline{OA_1}+\lambda_2\overline{OA_2}+\lambda_3\overline{OA_3}+\lambda_4\overline{OA_4}\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1\end{cases}$$

Якщо має місце ця рівність, то числа λ_i називаються барицентричними координатами точки P відносно тетраедра $A_1A_2A_3A_4$.

Точка P також є центром мас $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$, розташованих у точках A_1,A_2,A_3,A_4

Поставимо задачу знайти відстань між точками P і M, якщо відомі барицентричні координати λ_i точки P і відстань p_i від точки M до вершини A_i даного тетраедра $A_1A_2A_3A_4$.

$$\overline{MP}=\lambda_1\overline{p_1}+\lambda_2\overline{p_2}+\lambda_3\overline{p_3}+\lambda_4\overline{p_4}, \text{де } \overline{p_\imath}=\overline{MA_\imath}$$

Знайдемо скалярний квадрат $\overline{MP}$:

$$\overline{MP^2} = \left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i \overline{p_\iota}\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 \overline{p_\iota}^2 + 2 \sum_{i,j=1;i<j}^{4} \lambda_i \lambda_j \overline{p_\iota}\overline{p_J}$$

Так як $2\overline{p_\iota}\overline{p_J} = p_i^2 + p_j^2 - a_{ij}^2$, де $a_{ij} = A_i A_j$, то

$$MP^2 = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^2 p_i^2 + \sum_{i,j=1;i<j}^{4} \lambda_i \lambda_j \left(p_i^2 + p_j^2 - a_{ij}^2\right)$$

Після нескладних перетворень знаходимо

$$MP^2 = \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \sum_{i=1}^{4} \lambda_i p_i^2 - \sum_{i,j=1;i<j}^{4} \lambda_i \lambda_j a_{ij}^2$$

Нехай точка M співпадає з центром O описаної навколо тетраедра сфери. Якщо R — радіус цієї сфери, то всі $\mathrm{p}_i = R$. Точку P помістимо в центроїді G тетраедра. Для неї всі $\lambda_i = 1/4$. Отримаємо:

$$OG^2 = R^2 - \frac{1}{16} \sum_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij}^2$$

Використаємо цю формулу для нашої задачі. Отримаємо:

$$\sum_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij}^2 = 16 - 16OG^2$$

Виконаємо перетворення за нерівністю Коші:

$$6\sqrt[6]{\prod_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij}^2} \le \sum_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij}^2$$

$$6\sqrt[3]{\prod_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij}} \le 16 - 16OG^2$$

$$16 \le 16 - 16OG^2$$

$$\prod_{i,j=1;i<j}^{4} a_{ij} \le \frac{512}{27}$$

Рівність буде досягатися, коли сторони тетраедра рівні. Це випливає із нерівності Коші.

2.2. Моделювання політичних технологій.

Розглянемо задачу XV Всеукраїнського математичного турніру [6]: «Рівень життя та політичні технології»:

Політтехнологи президента країни Олімпії отримали завдання переконати виборців щодо монотонного покращення ситуації в країні впродовж останніх 5 років його перебування при владі. Для цього політтехнологам надали заповнену натуральними числами таблицю розміром 3×5 з економічними показниками P, Q і R за останні 5 років. Політтехнологи мають право будь які числа таблиці (у тому числі – жодного або ж усі) збільшити на одиницю, після чого скласти «інтегральний показник» $aP + bQ + cR$, обравши дійсні коефіцієнти a, b і c на свій розсуд. Чи завжди вони зможуть виконати завдання, тобто зробити так, щоб вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав.

Розглянемо співвідношення вільних коефіцієнтів при умові паралельності площин.

Якщо $ax + by + cy = d_1$, $ax + by + cy = d_2$ і $ax + by + cy = d_3$ $(d_1 \neq d_2 \neq d_3)$ – рівняння паралельних площин, і площина $ax + by + cy = d_2$ лежить між двома іншими, то $\min(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$ і $\max(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$.

Доведення: Припустимо, що дані площини не паралельні з віссю аплікат, тобто $c \neq 0$. Тоді знайдемо перетин даних площин з цією віссю. Це будуть точки $Z_1(0,\ 0, \frac{d_1}{c})$, $Z_2(0,\ 0, \frac{d_2}{c})$ і $Z_3(0,\ 0, \frac{d_3}{c})$. Оскільки площина $ax + by + cy = d_2$ лежить між двома іншими площинами, то і точка перетину цієї площини з будь-якою прямою буде лежати між точками перетину двох інших площин з даною прямою. Тобто $\min(\frac{d_1}{c}, \frac{d_2}{c}, \frac{d_3}{c}) \neq \frac{d_2}{c}$ і $\max(\frac{d_1}{c}, \frac{d_2}{c}, \frac{d_3}{c}) \neq \frac{d_2}{c}$, а з цього випливає, що $\min(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$ і $\max(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$.

У випадку, коли $c = 0$ слід розглянути перетин з віссю абсцис, або аплікат.

Отже якщо $ax + by + cy = d_1$, $ax + by + cy = d_2$ і $ax + by + cy = d_3$ $(d_1 \neq d_2 \neq d_3)$ – рівняння паралельних площин, і площина $ax + by + cy = d_2$ лежить між двома іншими, то $\min(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$ і $\max(d_1, d_2, d_3) \neq d_2$.

Що і треба було довести..

Доведення цієї леми дозволяє перейти безпосередньо до розв'язання задачі про «Рівень життя та політичні технології».

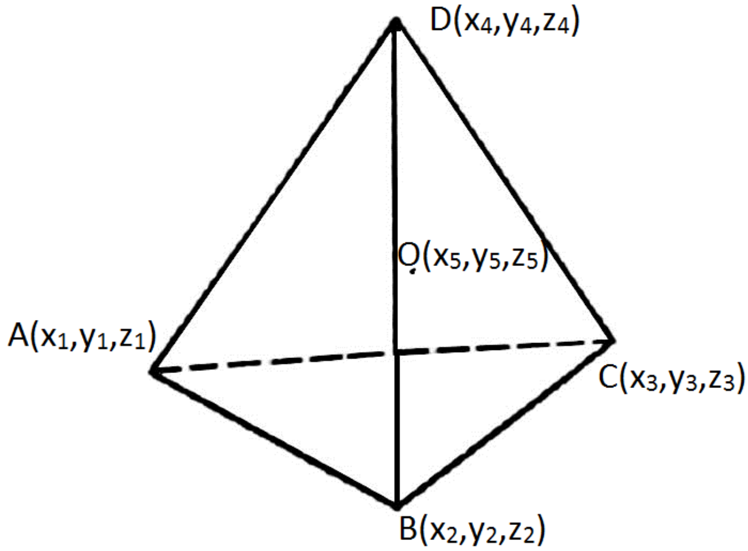
Розв'язок задачі «Рівень життя та політичні технології»:

Наша відповідь на питання задачі – ні. Не завжди політтехнологи можуть виконати поставлене перед ними завдання, тобто зробити так, що вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав. Тобто існує такий набір показників за 5 років, що при будь-яких дійсних коефіцієнтах a, b і c інтегральний показник не зростає монотонно на протязі останніх 5 років. Доведемо існування такого набору значень.

Для полегшення сприйняття задачі зробимо такі позначення:

		Роки				
		1 рік	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік
Показник	P	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	Q	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
	R	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Візьмемо такі економічні показники P, Q і R $(P,\ Q, R\ \geq\ 1)$ за перші 4 роки, щоб точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$ утворювали правильний тетраедр великих розмірів. А показники x_5, y_5, z_5 візьмемо такі, що $O(x_5, y_5, z_5)$ знаходилася в центрі вписаної сфери в тетраедр $ABCD$. Однак розташування в центрі вписаної сфери не є принциповим. Необхідно лише щоб точка була достатньо віддалена від усіх сторін трапеції, а оскільки центр вписаної сфери – найвіддаленіша від усіх сторін точка всередині тетраедра, то для простоти ми обрали саме її.



За умовою показники P, Q і R мають бути натуральними, тому замінимо показники P, Q і R за кожен рік на цілу частину з цих показників. В силу своїх великих розмірів, наша заміна не сильно змінила положення вершин тетраедра і точки O, і O залишилось всередині тетраедра. За умовою політтехнологи також мають право збільшувати деякі (або ж усі) показники в таблиці. Але в силу своїх великих розмірів їх дії не зможуть суттєво змінити тетраедр і точка O залишиться всередині нього. З нашого подальшого розв'язку випливає, що дані умови не суттєві. Наше подальше доведення справедливе для умов, що показники P, Q і R дійсні, а політтехнологи можуть змінювати показники у таблиці на будь-яке число, що за модулем не перевищує дане.

Проведемо паралельні площини через вершини нашого тетраедра та точку O.

$ax + by + cz = ax_1 + by_1 + cz_1$ – Рівняння площини проведеної через A.

$ax + by + cz = ax_2 + by_2 + cz_2$ – Рівняння площини проведеної через B.

$ax + by + cz = ax_3 + by_3 + cz_3$ – Рівняння площини проведеної через C.

$ax + by + cz = ax_4 + by_4 + cz_4$ – Рівняння площини проведеної через D.

$ax + by + cz = ax_5 + by_5 + cz_5$ – Рівняння площини проведеної через O.

У правій частині рівняння площин можна помітити той інтегральний коефіцієнт який і шукають політтехнологи.

Оскільки точка O лежить всередині нашого тетраедра, то площина, проведена через цю точку не може бути крайньою. А з доведеної вище леми слідує, що вираз $ax_5 + by_5 + cz_5$ не може приймати максимальне значення з поміж усіх інших. Це означає, що інтегральний показник за останній рік не може бути максимальним при таких значеннях параметрів P, Q і R, а отже і задача політтехнологів не може бути виконана.

Отже, існування контрприкладу доведено.

У нашому доведенні ми використовували такі характеристики тетраедра як «достатньо великий». Але що означає цей вираз?

У доведенні ми дещо змінювали координати точок, а саме замінювали їх на цілі частини з координат, та збільшували деякі з них на 1. І після цих змін нас цікавила присутність точки O всередині тетраедра. Отже великі розміри означають, що після даних дій точка O залишиться всередині тетраедра.

Після обох операцій точка може зміститися на відстань меншу або рівну $\sqrt{3}$.

Точка O нами обиралася як центр вписаної сфери, але оскільки тетраедр правильний, то буде справедливе твердження, що точка O і центр описаної сфери.

Площина тетраедра найбільше наблизяться до центра вписаного в нього кола, якщо 3 вершини, що лежать в цій площині зсунуться на $\sqrt{3}$ по перпендикуляру опущеному з точки O на цю площину. Тобто, враховуючи можливий зсув точки O на $\sqrt{3}$ відстань від центра вписаної сфери до площини тетраедра має бути більша за $2\sqrt{3}$, а оскільки радіус вписаної сфери це і буде відстань до площини то отримаємо, що сторона початкового тетраедра має бути більша за $12\sqrt{2}$.

Тобто якщо ми оберемо такі показники P, Q і R, що тетраедр утворений точками що мають координати $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$ мав довжину сторони більше ніж $12\sqrt{2}$ і такі значення показників P, Q і R за 5 рік, щоб точка з координатами $O(x_5, y_5, z_5)$ була центром вписаної сфери у ньому, то політтехнологи не зможуть зробити так, щоб інтегральний показник монотонно зростав на протязі цих 5 років.

Наведемо приклад таких даних:

	1 рік	2 рік	3 рік	4 рік	5 рік
P	1	287	1	1	5
Q	1	1	1	287	5
R	1	1	287	1	5

ВИСНОВКИ

Результати проведеного дослідження дають підставу зробити наступні висновки.

Дана дослідницька робота складається з вступу, двох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У першому розділі ми описали використання трьох методів знаходження умовного екстремуму функції: методу невизначених множників Лагранжа, метод використання класичних нерівностей, метод використання властивостей диференційованою функції на інтервалі; показали приклади розв’язання задач цими методами, що, на нашу думку, найкраще ілюструють переваги та доцільність використання цих методів.

Зокрема наведено розв’язок авторської задачі: нехай x та y – додатні дійсні числа, для яких $x^y + y = y^x + x$ і $f(x, y) = x + y - xy$. Знайти максимум $f(x, y)$.

Знайдено власні розв’язання до переважної більшості представлених задач, сформульовано і доведено узагальнення до задачі «Умовний мінімум», яка була представлена на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й.Ядренка (м. Чернівці 2014р.).

Пропонується наступне узагальнення задачі: нехай x, y, z – довільні невід’ємні числа. Знайдіть найменше можливе значення $x + y + z$, які задовольняють умову $(x - y)(y - z)(z - x) \geq r > 0$.

У другому розділі ми розглянули моделі «Точки на сфері та барицентричні координати» та «Рівень життя та політичні технології», в яких застосовується поняття екстремуму.

Використовуючи модель «Точки на сфері та барицентричні координати», ми розв’язали таку задачу: точки A, B, C, D лежать на сфері радіуса 1. Відомо, що виконується така рівність:

$$AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD = \frac{512}{27}$$

Довести, що $ABCD$ – правильний тетраедр.

Ми звели її до задачі знаходження відстані між точками P і M, якщо відомі барицентричні координати λ_i точки P і відстань p_i від точки M до вершини A_i даного тетраедра $A_1A_2A_3A_4$.

Аналізуючи модель «Рівень життя та політичні технології»: Політтехнологи президента країни Олімпії отримали завдання переконати виборців щодо монотонного покращення ситуації в країні впродовж останніх 5 років його перебування при владі. Для цього політтехнологам надали заповнену натуральними числами таблицю розміром 3×5 з економічними показниками P, Q і R за останні 5 років. Політтехнологи мають право будь які числа таблиці (у тому числі – жодного або ж усі) збільшити на одиницю, після чого скласти «інтегральний показник» $aP + bQ + cR$, обравши дійсні коефіцієнти a, b і c на свій розсуд. Чи завжди вони зможуть виконати завдання, тобто зробити так, щоб вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав.

Ми побудували «достатньо великий» тетраедр з вершинами в точках $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ і $D(x_4, y_4, z_4)$, координати яких є економічними показники P, Q і R ($P, Q, R \geq 1$) за перші 4 роки, а показники x_5, y_5, z_5 такі, що $O(x_5, y_5, z_5)$ знаходилася в центрі вписаної сфери в тетраедрі $ABCD$.

При моделюванні політичних технологій даних в роботі показано, що політтехнологи не зможуть зробити так, щоб інтегральний показник $aP + bQ + cR$ монотонно зростав на протязі п’яти років.

Отже, не завжди політтехнологи можуть виконати поставлене перед ними завдання, тобто зробити так, що вигаданий ними інтегральний показник за останні 5 років щороку зростав.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Венгерские математические олимпиады // И. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я.Шурани-М., «Мир»,1976-543с.

2. Станжицький О.М., Таран Є.Ю., Гординський Л.Д. Основи математичного моделювання : Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 96 с.

3. Завдання для відбірних етапів XVII Всеукраїнського турніру юних математиків. [електронний ресурс]: офіц. веб-портал The over-ukrainian tournament of young mathematicians named after prof. Mykhailo Yadrenko – Режим доступу: https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/2014/TYM-2014-LYST_PROBLEMS.pdf

4. Борисова В.О., Курченко О.О., Лейфура В.М., Мітельман І.М., Рабець К.В., Ясінський В.А. "XIII Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М.Й.Ядренка". "Математика", №8 (596), лютий 2011 р. / електронний ресурс https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/gaz_Matematyka_XIII_TYM.pdf

5. Завдання для відбірних етапів I-XIV Всеукраїнського турніру юних математиків. [електронний ресурс]: офіц. веб-портал The over-ukrainian tournament of young mathematicians named after prof. Mykhailo Yadrenko - Режим доступу: https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/ZAVDANNYA_TYM_I-XIV.pdf

6. Завдання для відбірних етапів XV Всеукраїнського турніру юних математиків [електронний ресурс]: офіц. веб-портал The over-ukrainian tournament of young mathematicians named after prof. Mykhailo Yadrenko - Режим доступу: https: //dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/2012/Lyst_IITZO_1507_TYM_2012.pdf