М.С.Добосевич, В.М.Лейфура, В.С.Мазорчук, І.М.Мітельман, В.В.Некрашевич, В.М.Радченко, О.Ю.Теплінський, В.А.Ясінський

Математичні олімпіади школярів України. 1997 — 98 рр.

Передмова

Математичні змагання школярів на Україні мають великі традиції та є популярною формою позакласної роботи з обдарованими учнями. З 1960 року щорічно проводиться Всеукраїнська математична олімпіада. З 1993 року команда України приймає участь в Міжнародних математичних олімпіадах.

Всеукраїнська математична олімпіада проходить в чотири етапи. Перший етап — це шкільні олімпіади, другий — районні та міські (в містах обласного підпорядкування), третій — обласні, міські (міст Київ та Севастополь) та олімпіада автономної республіки Крим, четвертий етап — заключний, саме який інколи і називають Всеукраїнською математичною олімпіадою. Переможці кожного етапу запрошуються до участі в наступному. Кращі учасники заключного етапу беруть участь у відбірково-тренувальних зборах по підготовці команди України до Міжнародної математичної олімпіади. На зборах визначаються шестеро учнів, які потім і представляють нашу державу на всесвітньому змаганні юних математиків.

В даному посібнику подаються матеріали математичних олімпіад, що проводилися у 1997-98 навчальному році — третього та четвертого етапів Всеукраїнської олімпіади, відбірково-тренувальних зборів та Міжнародної математичної олімпіади. Даються умови задач, розв'язки та вказівки до них, прізвища переможців олімпіад та деякі інші матеріали.

Сподіваємось, що даний збірник буде корисним учням, що готуються до математичних олімпіад, їх вчителям, керівникам гуртків та всім, хто цікавиться станом математичної освіти на Україні.

Автори

Третій етап XXXVIII Всеукраїнської олімпіади юних математиків

Третій етап Всеукраїнської олімпіади проходив у всіх областях (крім Харківської) 17 січня, і учні розв'язували єдиний для всієї України варіант завдань. На роботу відводилось 3 години для учнів 7 — 8 класів та 4 години для учасників з 9 — 11 класів. Повне розв'язання кожної задачі оцінювалось в 7 балів. Як правило, в кожній області по кожному класу присуджувалось одне перше, два других та три третіх місця. Визначення складу команди для участі в четвертому етапі Всеукраїнської олімпіади в більшості областей проходило на спеціальних відбіркових зборах, в яких брали участь кращі учасники третього етапу.

Варіант завдань третього етапу склали М.С.Добосевич (7 клас), В.М.Лейфура (8 клас), В.А.Ясінський (9 клас), О.Ю.Теплінський (10 клас) та І.М.Мітельман (11 клас).

Завдання олімпіади

7 клас

1. Дано два баки ємністю по 10л з соляним розчином 10%-ої та 15%-ої концентрації та посудини ємністю 3л, 4л, 5л. Як з допомогою переливань отримати 1л 12%-го соляного розчину?

2. Чи можна розмістити в таблиці розміром 3×4 числа -1 та 1 так, щоб усі 7 сум чисел, що стоять в одному рядку або в одному стовпчику були різними?

3. Скільки є нескоротних дробів з чисельником 1997, менших, ніж $\frac{1}{1997}$ і більших, ніж $\frac{1}{1998}$?

4. Дано смужку 1×17, клітинки якої пронумеровані послідовними натуральними числами. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні, де перша з них парна. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш — починаючий чи його суперник? Вкажіть виграшну стратегію.

8 клас

1. Сума трьох тризначних чисел $\overline{aab}$, $\overline{aba}$, $\overline{baa}$ дорівнює 1998. Знайдіть усі трійки таких чисел.

2. Чи буде число $11\ldots155\ldots56$ (1998 одиниць та 1997 п'ятірок) квадратом цілого числа?

3. Через точки дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

4. На дошці розміром 4×4 грають двоє. Ходять по черзі, і кожний гравець своїм ходом зафарбовує одну клітинку. Кожну клітинку можна зафарбувати лише один раз. Програє той гравець, після чийого ходу утвориться квадрат 2×2, що складається із зафарбованих клітинок. Хто з гравців може забезпечити собі виграш — той, хто ходить першим, чи його суперник? Відповідь обгрунтуйте.

9 клас

1. Довести, що число $11\ldots1$ (1998 одиниць) ділиться на 37.

2. Через точки дотику вписаного в трикутник кола із сторонами цього трикутника провели прямі, які відповідно паралельні бісектрисам протилежних кутів. Доведіть, що ці прямі перетинаються в одній точці.

3. Дано смужку 1×99. Двоє учнів грають у гру, по черзі роблячи свої ходи. За один хід треба закреслити одну довільну клітинку в смужці або деякі дві послідовні. Програє той, хто не може зробити хід. Хто може забезпечити собі виграш — починаючий чи його суперник?

4. На координатній площині відмітили п'ять точок: $(-2; 8), (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{3}, 1)$ та $(\frac{1}{4}, \frac{4}{5})$. Яка найбільша кількість із цих точок може належати графіку рівняння $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$?

5. З квадратним тричленом $ax^2 + bx + c$ дозволяється робити такі дії:

1) замінити в ньому x на $x - \lambda$, де λ — довільне дійсне число;

2) замінити його на тричлен $cx^2 + (b + 2c)x + (a + b + c)$.

Чи можна за допомогою таких дій із тричлена $x^2 - 3x - 4$ одержати тричлен $x^2 - 2x - 5$?

10 клас

1. Про цілі числа m та n відомо, що $\frac{n^2}{m+n}$ — ціле число. Доведіть, що число $\frac{m^3}{m+n}$ також ціле.

2. Доведіть, що якщо в чотирикутнику суми синусів протилежних кутів рівні між собою, то цей чотирикутник — трапеція або паралелограм.

3. Знайти всі трійки дійсних чисел x, y, z, які задовольняють трьом рівностям

$$x = \sqrt{\left|\frac{1-y}{1+y}\right|}, \quad y = \sqrt{\frac{1+z}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

4. У новосформованому 10 класі деякі учні виявилися вже знайомими між собою, а деякі — ні. В перший день навчання кожна дівчина замріяно подивилася на кожного із знайомих хлопців, тоді як кожен хлопець замріяно подивився на кожну з незнайомих дівчат. Усього було кинуто 117 замріяних поглядів. Скільки в класі хлопців і скільки дівчат, якщо усього не більше 40 учнів?

5. Дві різні паралельні проекції просторової замкненої ламаної $ABCD$ на одну і ту саму площину є паралелограмами. Чи можна стверджувати, що власне $ABCD$ — паралелограм?

11 клас

1. Дано невід'ємні дійсні числа x та y, які задовольняють умові

$$x - \sqrt{x} \leq y - \frac{1}{4} \leq x + \sqrt{x}.$$

Довести, що для цих чисел виконуються також і нерівності

$$y - \sqrt{y} \leq x - \frac{1}{4} \leq y + \sqrt{y}.$$

2. Розв'язати рівняння

$$\cos 12x = 5 \sin 3x + 9 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x.$$

3. Відомо, що на сторонах CD і AD опуклого чотирикутника $ABCD$ існують такі точки K і M відповідно, що кожна з прямих AK та CM розтинає чотирикутник $ABCD$ на дві частини рівної площі. Нехай P — точка перетину прямих KM та BD. Знайти відношення площі чотирикутника $ABCD$ до площі чотирикутника $ABCP$.

4. Про функцію f, яка визначена на множині всіх відмінних від нуля дійсних чисел і приймає дійсні значення, відомо, що рівняння $f(x) = \frac{1}{2}$ має принаймні один корінь та

$$f(x) - f(y) = f(x)f(\frac{1}{y}) - f(y)f(\frac{1}{x})$$

для всіх $x \neq 0$ та $y \neq 0$. Визначити $f(-1)$.

5. Прямокутник розміром $2^{1998} \times 1998^2$ поділено на одиничні квадратики — клітинки. Довести, що кількість способів, якими цього прямокутника можна розбити на фігурки, кожна з яких є або прямокутником із трьох клітинок, або складеною із чотирьох клітинок фігуркою у вигляді літери Т, є числом непарним. (Способи, які відрізняються лише розташуванням фігурок, також вважаються різними.)

Вказівки та розв'язання задач.

7 клас

1. Для отримання 12%-го розчину треба змішати 2 частини 15%-го та 3 частини 10%-го. Можлива послідовність дій:

Кроки|Посуд.	3л	4л	5л
1	3л10%	4л15%	—
2	—	2л15%	5л12%
3	2л15%	4л12%	1л12%

2. Такою таблицею, наприклад, буде

1	1	1
-1	1	1
-1	-1	1
-1	-1	-1

3. $\frac{1}{1997} - \frac{1997}{m} > 0$, $\frac{1}{1998} - \frac{1997}{m} < 0 \Leftrightarrow 1997 \cdot 1997 < m < 1997 \cdot 1998$. Тому $m = 1997 \cdot 1997 + k$ для $k = 1, \ldots, 1996$. Для всіх цих m дріб $\frac{1997}{m}$ буде нескоротним, оскільки число 1997 просте. Відповідь: 1996.

4. Перемогу може забезпечити собі починаючий. Розіб'ємо клітинки з номерами 2 - 17 на 4 набори по 4 послідовні клітинки. Перший гравець спочатку закреслює першу клітинку, а потім діє аналогічно до другого: якщо другий закреслює клітинку з парним номером, то перший — іншу парну з цього ж набору; якщо другий закреслює клітинку з непарним номером, то перший — іншу непарну з цього ж набору; якщо другий закреслює дві клітинки, то перший — інші дві з цього ж набору. Так перший завжди буде мати можливість ходу.

8 клас

1. Відповідь: (882,828,288), (774,747,477), (666,666,666), (558,585,855).

2. Так, буде. Це $\left(\frac{10^{1998}+2}{3}\right)^2$.

3. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки дотику із сторонами BC, AC, AB відповідно. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1, такою ж буде і наша пряма, проведена з A_1. Вказані прямі будуть висотами трикутника $A_1B_1C_1$, і тому перетинаються в одній точці.

4. Виграш може забезпечити собі той, хто ходить другим. Після ходу першого в клітинку з якимось номером (див. малюнок) він має зафарбувати іншу клітинку з таким же номером.

1	2	3	4
5	6	7	8
1	2	3	4
5	6	7	8

9 клас

1. Вказане число ділиться на число $111111 = 111 \cdot 1001 = 37 \cdot 3 \cdot 1001$.

2. Нехай A_1, B_1, C_1 — точки дотику із сторонами BC, AC, AB відповідно. Бісектриса кута A буде перпендикулярною до B_1C_1, такою ж буде і наша пряма, проведена з A_1. Вказані прямі будуть висотами трикутника $A_1B_1C_1$, і тому перетинаються в одній точці.

3. Перемогу може забезпечити собі починаючий. Першим ходом він закреслює 50-ту (центральну) клітинку, і потім повторює ходи суперника симетрично відносно неї.

4. Кожній точці (x, y) треба поставити у відповідність точку з координатами $x_1 = \frac{1}{x}$, $y_1 = \frac{1}{y}$. Тоді повинна виконуватись рівність $ax_1 + by_1 = 1$, тобто точки лежать на прямій. Невеликим перебором знаходимо, що серед "перетворених"точок максимальна кількість точок, що лежать на одній прямій — три.

5. При вказаних діях не зміниться дискрімінант тричлена, тому вказане перетворення зробити не можна.

10 клас

1. Цілим буде навіть число $\frac{m^2}{m+n}$, оскільки цілою буде його різниця з $\frac{n^2}{m+n}$.

2. Позначимо послідовно кути чотирикутника через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\sin\alpha + \sin\gamma = \sin\beta + \sin\delta$. Врахувавши, що $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$, $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \sin\frac{\beta+\delta}{2}$, звідси маємо, що $0 = \sin\alpha + \sin\gamma - \sin\beta - \sin\delta = 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\beta+\delta}{2}\cos\frac{\beta-\delta}{2} = -4\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{4}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}$.

Розглядаючи різні випадки рівності нулю отриманих множників, отримуємо, що $\alpha + \delta = \beta + \gamma = \pi$ або $\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi$.

3. З умови випливає, що $z > 0$, $y > 0$, $x \geq 0$. Якщо $x = 0$, то $z = 1$, $y = 1$. Якщо $x > 0$, то $0 < z < 1$, $\sqrt{2}/2 < y < 1$. Тому $\left|\frac{1-y}{1+y}\right| = \frac{1-y}{1+y}$, тобто $y^2 = \frac{1+z}{2}$, $z^2 = 1/(1 + \frac{1-y}{1+y}) = \frac{1+y}{2}$. Віднімаючи ці рівності, одержуємо $y = z = -\frac{1}{2}$ або $y = z = 1$, що не задовольняє вказаним умовам. Відповідь: (0,1,1)

4. У кожній парі дівчина-хлопець буде рівно один замріяний погляд, тому число поглядів $117 = mn$, де m — кількість хлопців, n — кількість дівчат. Такими розкладами є $1 \cdot 117$, $3 \cdot 39, 9 \cdot 13$, і навпаки. Умові задачі задовольняє лише останній. Відповідь: 9 хлопців і 13 дівчат або 13 хлопців і 9 дівчат.

5. Так, $ABCD$ — паралелограм. Нехай $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ — дві вказані проекції (позначені відповідно до $ABCD$.) Припустимо, що точки A, B, C, D не лежать в одній площині. Площини ABB_1A_1 та CDD_1C_1 паралельні, бо $AA_1 \| CC_1$, $A_1B \| C_1D$. Аналогічно паралельними є площини ABB_2A_2 та CDD_2C_2. Але через мимобіжні прямі AB та CD паралельні площини можна провести єдиним чином. Тому точки A, B, A_1, B_1, A_2, B_2 лежать в одній площині, і точка A_2 належить прямій

A_1B_1. Аналогічно A_2 належить прямій A_1D_1. Значить, A_1 збігається з A_2. Аналогічно B_1, C_1, D_1 збігаються з B_2, C_2, D_2 відповідно. Тому проекції збігаються, це суперечить умові, і точки A, B, C, D лежать в одній площині. Її паралельні площини ABB_1A_1 та CDD_1C_1 перетинають по паралельним прямим AB та CD. Аналогічно паралельними є прямі BC та DA.

11 клас

1. $|x-y+1/4| \le \sqrt{x} \Leftrightarrow (x-y+1/4)^2 \le x \Leftrightarrow (x-y-1/4)^2 \le y \Leftrightarrow |x-y-1/4| \le \sqrt{y}$.

2. Маємо $(3\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 + 5(1+\sin 3x) + (1-\cos 12x) = 0$, звідки $3\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$, $\sin 3x = -1$, $\cos 12x = 1$. Відповідь:$2\pi n - \pi/6$, $2\pi n - 5\pi/6, n \in Z$.

3. Для площ маємо $S(CMD) = S(AKD) \Rightarrow S(CFK) = S(AFM) \Rightarrow S(CKA) = S(CMA) \Rightarrow MK \parallel AC \Rightarrow S(CKA) = S(CPA) \Rightarrow S(ABCK) = S(ABCP) \Rightarrow S(ABCP) = S(ABCD)/2$.

4. Нехай $f(-1) = a$. Для всіх $x \ne 0$ $f(x) - a = af(x) - af(1/x)$. Якщо $a = 1$, то $f(t) = 1$ для всіх $t \ne 0$, що суперечить умові. Підставляючи в останнє рівняння $1/x$ в якості x, маємо $f(1/x) - a = af(1/x) - af(x)$. З двох рівностей легко знаходимо, що $f(x)(1-2a) = a(1-2a)$. Якщо $a \ne 1/2$, то для всіх $x \ne 0$ $f(x) = a$, що суперечить умові. Відповідь: $f(-1) = 1/2$.

5. Доведемо відповідне твердження для прямокутників розміром $2^m \times 1998^2, m \ge 0$, індукцією по m. Для $m = 0$ твердження очевидне.

Припустимо, що твердження є вірним при $m = k$. Нехай $m = k+1$. Проведемо уявну пряму l, яка розбиває прямокутник P_{k+1} розміром $2^{k+1} \times 1998^2$ на два прямокутники розміром $2^k \times 1998^2$. Розглянемо спочатку всі розбивання прямокутника P_{k+1}, які містять принаймні одну фігурку, що розтинається прямою l. Сукупність всіх таких розбивань розпадається на пари неспівпадаючих розбивань, котрі взаємно симетричні відносно прямої l, і містить парну кількість N розбивань.

Всі інші розбивання прямокутника P_{k+1} породжують відповідні розбивання двох прямокутників розміром $2^k \times 1998^2$. За припущенням індукції, кожний з цих прямокутників розбивається непарним числом способів, яке позначимо через L.

Таким чином, кількість способів розбивання прямокутника P_{k+1} дорівнює $L^2 + N$, і є числом непарним.

Заключний етап XXXVIII Всеукраїнської олімпіади юних математиків

Фінальний етап національного змагання юних математиків 1997-98 навчального року проходив з 8 по 12 квітня в м. Миколаєві. В ньому взяли участь 198 учнів, олімпіада проходила за звичною схемою — в два тури, в кожному з яких пропонувалися для розв'язання по 4 задачі (в 8 класі — по 3). Час роботи кожного дня — 4 години (в 8 класі — 3). Головним критерієм для визначення місця кожного учасника була кількість задач, розв'язаних ним повністю чи з незначними недоробками.

Незважаючи на деякі незручності в проведенні національних олімпіад цього року, перенесення їх термінів, олімпіада в Миколаєві була добре організованою, учасникам і членам журі були створені всі умови для плідної роботи. Напевно, це допомогло багатьом учням успішно справитись із завданнями. Десять учасників розв'язали всі задачі. Всього понад сто учнів правильно розв'язали більше половини задач — саме такі роботи журі і відзначило дипломами першого, другого та третього ступеня. Наведемо прізвища переможців олімпіади, а потім — умови завдань, авторів запропонованих задач, вказівки та розв'язання цих задач.

Диплом I ступеня

8 клас

Голубов Олексій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Гринько Михайло (м. Харків, ФМЛ № 27)
Тьомкін Михайло (м. Харків, ФМЛ № 27)

9 клас

Берштейн Михайло (м. Харків, ФМЛ № 27)
Гоголев Андрій (м. Київ, ліцей "Лідер")
Сіденко Сергій (УФМЛ)
Федорчук Максим (м. Київ, ліцей "Лідер")
Ціцура Павло (м. Київ, ліцей "Лідер")

10 клас

Бойко Костянтин (м. Харків, ФМЛ № 27)
Давидов Максим (м. Львів, ФМЛ)
Забірник Олексій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Пилявський Павло (м. Вінниця, ліцей № 7)
Русанов Іван (м. Київ, ліцей № 145)

11 клас

Бондаренко Андрій (УФМЛ)
Бондаренко Сергій (УФМЛ)
Гречук Богдан (УФМЛ)
Мелліт Антон (м. Київ, ліцей "Лідер")
Торба Сергій (м. Київ, ліцей "Лідер")

Диплом II ступеня

8 клас

Волошин Денис (м. Київ, ліцей "Лідер")
Єгольніков Сергій (м. Миколаїв, ліцей № 1)
Жолудь Дмитро (м. Севастополь, школа № 3)
Мельниченко Святослав (м. Вінниця, школа № 21)
Руссєв Андрій (Одеська обл., Арцизський район, Деленська школа)

9 клас

Драган Роман (м. Миколаїв, муніципальний колегіум)
Карлюченко Олексій (м. Київ, Русанівський ліцей)
Кравченко Олексій (м. Київ, ліцей "Лідер")
Полякова Людмила (м. Харків, ФМЛ № 27)
Рибак Дмитро (м. Київ, ліцей "Наукова зміна")
Рибак Микола (м. Миколаїв, муніципальний колегіум)
Тихий Юрій (м. Київ, ліцей № 145)
Ткачук Микола (м. Харків, гімназія № 45)

10 клас

Боярин Іван (м. Тернопіль, школа № 15)
Волков Олег (м. Донецьк, технічний коледж)
Галицький Юрій (УФМЛ)
Зарайський Даніїл (м. Донецьк, школа № 37)
Лісова Надія (м. Вінниця, школа-ліцей № 7)
Майданський Максим (м. Київ, гімназія № 178)
Манзюк Олександр (м. Миколаїв, муніципальний колегіум)
Примак Андрій (УФМЛ)
Риженков Денис (м. Севастополь, школа-гімназія № 1)
Товт Федір (Закарпатська обл., Берегівська гімназія)

11 клас

Болтенков Андрій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Здомський Любомир (м. Львів, ФМЛ)
Каблучко Захар (м. Вінниця, гімназія № 17)
Купцов Олексій (УФМЛ)
Лабзін Олег (м. Донецьк, ліцей при ДДУ)
Майзліш Леонід (Хмельницька обл., м. Шепетівка, школа № 1)
Мартюшова Ірина (м. Київ, ліцей "Лідер")
Місюра Сергій (м. Запоріжжя, гімназія № 28)
Палієнко Микола (м. Київ, ліцей "Наукова зміна")
Работягов Андрій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Рябченко Валерій (м. Чернігів, школа № 12)

Диплом III ступеня

8 клас

Володько Сергій (Донецька обл., м. Краматорськ, школа № 22)
Воронко Андрій (Вінницька обл., м. Могилев-Подільський, школа № 6)
Давиденко Олег (Київська обл., м. Бородянка, школа № 1)
Кожан Ростислав (м. Львів, ФМЛ)
Кондратов Олексій (м. Київ, ліцей "Лідер")
Ящук Антон (м. Дніпропетровськ, школа-ліцей № 100)

9 клас

Копійка Ганна (м. Одеса, Рішельєвський ліцей)
Кравчук Віталій (УФМЛ)
Овечко Олег (м. Київ, ліцей "Лідер")
Паламарчук Олександра (м. Вінниця, школа № 34)
Сидорук Костянтин (м. Київ, ліцей "Лідер")
Ткаченко Андрій (м. Дніпропетровськ, школа-ліцей № 100)
Ткаченко Юрій (УФМЛ)
Харчук Павло (м. Севастополь, школа-гімназія № 1)
Хрипко Андрій (м. Черкаси, ФМЛ)
Якименко Данило (м. Київ, гімназія № 178)

10 клас

Батршин Руслан (м. Львів, ФМЛ)
Бородін Анатолій (м. Івано-Франківськ, ФМЛ при ІФДТУНГ)
Гайдош Бейла (Закарпатська обл., Берегівська гімназія)
Гринько Сергій (м. Харків, ФМЛ № 27)
Зеленський Олексій (Хмельницька обл., м. Кам'янець-Подільськиий, ліцей "Антей")
Комаров Олексій (м. Запоріжжя, гімназія № 28)
Назаренко Павло (Сумська обл., м. Шостка, школа № 12)
Полонський Микола (м. Кіровоград, навчально-науковий педагогічний комплекс)
Скоп Андрій (м. Суми, НВК № 10)
Скороход Олександр (м. Дніпропетровськ, ліцей інформаційних технологій)
Степанов Євген (м. Київ, ліцей "Наукова зміна")
Цвіркун Андрій (м. Хмельницький, школа-ліцей № 17)

11 клас

Антоненко Олександр (м. Одеса, Рішельєвський ліцей)
Берштейн Ольга (м. Харків, ФМЛ № 27)
Горностай Марія (м. Житомир, перший міський ліцей)
Губенко Елемир (Закарпатська обл., м. Берегове, школа № 4)
Делюков Микита (УФМЛ)
Дерев'ягін Максим (м. Донецьк, ФМШ № 35)
Дорошенко Олександр (Київська обл., м. Бровари, школа № 8)
Єнютін Андрій (м. Львів, школа № 52)
Жигінас Владислав (м. Київ, ліцей № 198)
Колесников Михайло (Донецька обл., м. Краматорськ, школа № 35)
Косцов Віктор (Одеська обл., м. Ізмаїл, Політехнічний ліцей)
Кучукбаєва Ірина (м. Миколаїв, муніципальний колегіум)
Лаб'як Олег (м. Тернопіль, педагогічний ліцей)
Ласійчук Ігор (м. Івано-Франківськ, гімназія № 1)

Лисаков Євген (Чернігівська обл., м. Ніжин, ліцей при НДПІ)
Махомед Вадим (м. Луцьк, школа № 20)
Панфілов Олексій (Дніпропетровська обл., м. Кривий Ріг, Жовтневий ліцей)
Ройтман Ігор (Хмельницька обл., м. Кам'янець-Подільськиий, ліцей "Антей")
Солоненко Ігор (м. Вінниця, технічний ліцей)
Телегеєв Дмитро (УФМЛ)
Шахова Катерина (м. Севастополь, школа-гімназія № 1)

Завдання олімпіади

8 клас

1. В сім'ї, що складається з п'яти осіб (тато, мати та троє дітей), помітили, що коли перемножити вік усіх членів сім'ї між собою, то отримаємо 1998. Який вік мають члени сім'ї, якщо тато старший за матір на 10 років?

2. Площина вимощена правильними шестикутниками. На цій площині відмічено довільним чином 1998 шестикутників. Довести, що серед відмічених шестикутників можна вибрати 666 таких, що жодні два з них не мають спільних вершин.

3. На дошці розміром $n \times n$ (n — натуральне число, $n \geq 2$) в лівому нижньому кутку стоїть фішка. За один хід гравець може пересунути її на на одну клітинку вправо, або на одну клітинку вгору, або на одну клітинку по діагоналі вправо вгору. Двоє гравців по черзі роблять такі ходи, а виграє той, хто поставить фішку в правий верхній кут дошки. Хто може забезпечити собі виграш — починаючий чи його суперник?

4. Знайти чотири останні цифри числа

$$1997 \cdot 5^{1998}$$

в його десятковому запису.

5. На площині задані пряма l та дві точки A і B, які лежать по один бік від прямої l. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку C так, щоб пряма l перетинала відрізки AC і BC відповідно в таких точках M і N, що відрізок BM — висота, а відрізок AN — медіана трикутника ABC.

6. Довести, що в клітинки прямокутної таблиці розміром 5×120 (5 стовпчиків та 120 рядків) можна вписати числа з набору $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ так, щоб виконувались наступні умови:

1) всі числа кожного рядка різні;

2) всі рядки різні;

3) можна розбити таблицю на 24 таблиці розмірами 5×5 і, не повертаючи їх, скласти з них таблицю розміром 120×5 (120 стовпчиків та 5 рядків), в якій всі стовпчики різні.

9 клас

1. Чи існує на координатній площині трикутник, в якого координати вершин, точки перетину медіан, точки перетину висот, точки перетину бісектрис та точки перетину серединих перпендикулярів є цілими числами?

2. Сторона AD чотирикутника $ABCD$ співпадає з діаметром описаного навколо нього кола. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте який-небудь вписаний в це саме коло трикутник, площа якого дорівнює площі чотирикутника $ABCD$.

3. Доведіть, що для довільних додатних дійсних чисел a, b та c, що задовольняють рівність $abc = 1$, виконується нерівність

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} \geq 3.$$

4. Відомо, що дійсні числа x та y не менші за 1. Крім того, для довільного натурального n виконується рівність

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]}$$

(через $[a]$ позначено цілу частину числа a, тобто найбільше ціле число, що не перевищує a). Доведіть, що $x = y$ або x та y є цілими числами, перше з яких ділиться на друге.

5. Доведіть, що рівняння

$$x^3 - x = y^2 - 19y + 98$$

не має розв'язків у цілих числах.

6. Доведіть, що сума квадратів довжин медіан довільного трикутника не менша за квадрат його півпериметра.

7. Двоє гравців по черзі вписують у клітини квадратної дошки $n \times n$ натуральні числа згідно наступних правил: у клітину, яка знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпчика, перший гравець має право вписати найбільший спільний дільник чисел i та j, а другий гравець має право вписати найменше спільне кратне цих чисел. Після заповнення дошки усі числа першого стовпчика діляться на 1, усі числа другого стовпчика діляться на 2, усі числа третього стовпчика діляться на 3 і так далі, аж до останнього стовпчика, усі числа якого діляться на n. Потім рахується добуток усіх отриманих чисел. Якщо результат менший за 1, виграє перший гравець, в іншому випадку виграє другий гравець. Хто з гравців може забезпечити собі перемогу — той хто починає гру чи його суперник?

8. На площині дано опуклий 2000-кутник. Доведіть, що на площині можна відмітити 1998 точок так, щоб кожен трикутник, вершини якого є вершинами даного 2000-кутника, містив всередині (але не на сторонах) рівно одну з відмічених точок.

10 клас

1. Знайти всі пари дійсних чисел (x, y), які задовольняють рівність

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{|x|}{x} + \frac{|y|}{y}.$$

2. На стороні AC трикутника ABC довільно вибирається точка M. Нехай O — точка перетину перпендикулярів, опущених з середин відрізків AM та MC відповідно на прямі BC та AB. При якому положенні точки M довжина відрізка OM досягає найменшого значення?

3. На прямій задана скінчена множина відрізків, яка задовольняє такій умові: серед будь-яких 1998 відрізків цієї множини знайдуться два таких, що мають спільну точку (хоча б одну). Довести, що на цій прямій можна можна відмітити 1997 точок так, щоб будь-який відрізок нашої множини містив хоча б одну з цих точок.

4. Функція f задана на проміжку $[1, +\infty)$ і при всіх $x \geq 1$ задовольняє нерівності $\frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq x$. Довести, що при кожному $x \geq 1$
$f(x) < \sqrt{2x}$.

5. Нехай m — найменше з чотирьох чисел: $1, x^9, y^9, z^7$, де x, y, z — невід'ємні числа. Довести, що $m \le xy^2z^3$.

6. AB і CD — діаметри кола з центром в точці O. Точка M належить меншій з дуг CB. Прямі MA і MD перетинають хорду CB в точках P і Q.

Довести, що сума площ трикутників CPM і MQB рівна площі трикутника DPQ.

7. Барон Мюнхаузен стверджує, що довільну кількість гостей він зможе розселити по кімнатах свого будинку так, що в кожній кімнаті або всі гості будуть попарно знайомі, або всі попарно незнайомі. Чи правду каже барон? (Вважаємо, що в кожну кімнату можна поселити довільну кількість гостей, але кількість кімнат в будинку Мюнхаузена скінчена.)

8. Знайти всі пари многочленів $f(x), g(x)$ таких, що для всіх чисел x, y виконана рівність

$$f(xy) = f(x) + g(x)f(y).$$

11 клас

1. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{1 + \{2x\}} = [x^2] + 2[x] + 3$$

($[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a, $\{a\} = a - [a]$).

2. Висота CD трикутника ABC перетинає бісектрису BK цього трикутника в точці M, а висоту KL трикутника BKC — в точці N. Навколо трикутника BKN описано коло, яке перетинає сторону AB в точці $P \neq B$. Довести, що трикутник KPM рівнобедрений.

3. Довести, що для будь-яких чисел x, y, z з проміжку $(0;1]$ виконується нерівність

$$\frac{x}{1+y+zx} + \frac{y}{1+z+xy} + \frac{z}{1+x+yz} \le \frac{3}{x+y+z}.$$

4. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$ і набуває значень з цього відрізку. Відомо, що існує таке число λ з проміжку $(0;1)$, для якого $f(\lambda) \neq 0$ та $f(\lambda) \neq \lambda$, і також

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y)$$

для всіх x та y, що входять до області визначення цієї рівності.

а) Навести приклад такої функції.

б) Довести, що для будь-якого $x \in [0;1]$

$$\underbrace{f(f(\ldots f}_{19}(x)\ldots)) = \underbrace{f(f(\ldots f}_{98}(x)\ldots)).$$

5. Скільки дійсних коренів має рівняння

$$\frac{2}{\pi}\arccos x = \sqrt{1-x^2} + 1 \quad ?$$

6. На дошці написано числа 1, 1998, 1999. За один крок дозволяється витерти одне з чисел і замість нього записати різницю між його квадратом та потроєнним добутком двох інших чисел. Чи можна, виконуючи такі дії, з початкового набору отримати трійку чисел, сума яких дорівнює нулю?

7. Дві кулі різних радіусів дотикаються зовнішнім чином в точці P. Дані відрізки AB і CD такі, що одна з куль дотикається до них в точках A і C, друга — в точках

B і D. Нехай M і N — це проекції середин відрізків A і BD на пряму, що проходить через центри даних куль. Довести, що $PM = PN$.

8. Нехай $x_1, x_2 \ldots x_n, \ldots$ — це послідовність дійсних чисел така, що

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{n^2}{x_n} + \frac{x_n}{n^2} + 2,\ n \geq 1.$$

Довести, що

а) $x_{n+1} \geq x_n$ для всіх $n \geq 4$;

б) $[x_n] = n$ для всіх $n \geq 4$ ($[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a).

Автори задач олімпіади: О.Ф.Крижанівський (9.6), О.Г.Кукуш (10.4), О.О.Курченко (8.2), В.М.Лейфура (11.5), В.С.Мазорчук (8.6, 9.1, 9.4, 9.7), В.С.Мазорчук та С.А.Овсієнко (10.8), І.П.Нагель (10.6), О.Н.Нестеренко (8.1), В.М.Радченко (8.3, 11.6), В.М.Радченко та В.А.Ясінський (11.3), І.В.Федак (9.2, 9.5, 11.2), Н.М.Шунда (11.1), В.А.Ясінський (8.4, 8.5, 9.3, 9.8, 10.1, 10.2, 10.3, 10.5, 10.7, 11.4, 11.7, 11.8).

Вказівки та розв'язання задач

8 клас

1. Розкладемо число 1998 на прості множники ($1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$) і скористаємось тим, що вік кожної особи сім'ї є дільником цього числа. Далі перебором встановлюємо, що татові 37 років, матері — 27, одній дитині 2 роки, а дві інші дитини мають по одному року.

2. Всі шестикутники площини можна пофарбувати в один з трьох кольорів так, щоб шестикутники однакового кольору не мали спільних вершин. З 1998 фігур знайдуться $1998 \ / \ 3 = 666$ шестикутників одного кольору.

3. Відмітимо клітинки так, як показано на малюнку, починаючи з другого зверху рядка та другого справа стовпчика. Гравець, що робить хід з відміченної позиції може забезпечити собі виграш. Це можна перевірити перебором, починаючи з верхнього відміченого рядка та правого відміченого стовпчика. Відповідь залежить від того, чи відмічена ліва нижня клітинка, тобто від парності n. При парних n виграш може забезпечити собі починаючий, при непарних — його суперник.

×	×	×	×	×	×	×	
						×	
×	×	×	×	×		×	
				×		×	
×	×	×		×		×	
		×		×		×	
×		×		×		×	

4. Неважко помітити, що останні чотири цифри чисел 5^n, починаючи з $n = 5$, періодично повторюються: 3125, 5625, 8125, 0625, 3125, 5625,$\ldots$ Тому останніми чотирма цифрами числа 5^{1998} будуть 5625, а числа $1997 \cdot 5^{1998}$ — 3125.

5. Нехай O — середина відрізка AB, тоді ON — середня лінія $\triangle ABC$, тобто $ON \parallel AC$. Оскільки $\angle AMB = 90°$, то точка M — це точка перетину l з колом, діаметром якого є відрізок AB. Звідси й випливає потрібна побудова.

6. Впишемо в рядки з номерами 1, 6, 11,$\ldots$, 116 всі можливі перестановки елементів набору $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, в яких на першому місці стоїть 1 (їх буде 24). Під кожним таким рядком напишемо його циклічний зсув вліво, під отриманим — ще зсув вліво, і так ще два рази. Далі таблиця розбивається на 24 квадрати 5×5, які розміщені один під одним. Потім викладемо їх горизонтально в будь-якому порядку. Доведемо, що виконується умова 3). Для цього досить помітити, що i-тий рядок кожної квадратної таблиці, яка утворилася після розбиття, співпадає з i-тим стовпчиком, прочитаним згори донизу. Виконання умови 3) тепер випливає з умови 1).

9 клас

1. Так, існує. Візьмемо трикутник ABC з вершинами $A(0,0)$, $B(3,0)$ та $C(0,4)$. Точкою перетину висот цього трикутника є точка $A(0,0)$, а точкою перетину серединних перпендикулярів є точка $D(3/2,2)$. Так як радіус вписаного в цей трикутник кола дорівнює $S/p = 1$, точка перетину бісектрис має координати $E(1,1)$. Крім того, точка перетину медіан має координати $F(1,4/3)$. Застосувавши до ABC гомотетію відносно $A(0,0)$ з коефіцієнтом 6, отримаємо шуканий трикутник.

2. Спершу проведемо через точку A пряму, що паралельна до прямої BD і позначимо через E точку перетину проведеної прямої з нашим колом. Так як AD є діаметром, матимемо прямокутник $ABDE$. Після цього побудуємо серединний перпендикуляр до AE, який проходить через C і точку N на відрізку AE. Доведемо, що трикутник ACE є шуканим. Позначимо через M точку перетину відрізків BD та CN. Тоді площа S трикутника AEC є половиною добутку довжин відрізків CN та AE. Так як $CN = NM + MC$, маємо $2S = AE \cdot NM + MC \cdot AE$. Так як $AE = BD$ і $MN = AB$, маємо $2S = BD \cdot AB + MC \cdot BD$. Але тепер права частина збігається з подвоєною площею чотирикутника $ABCD$. Це означає, що ACE є шуканим трикутником.

3. Використовуючи нерівність Коші і умову $abc = 1$, маємо

$$\frac{1+ab}{1+a} + \frac{1+bc}{1+b} + \frac{1+ac}{1+c} = \frac{1+c}{c(1+a)} + \frac{1+a}{a(1+b)} + \frac{1+b}{b(1+c)} \geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{1+c}{c(1+a)} \cdot \frac{1+a}{a(1+b)} \cdot \frac{1+b}{b(1+c)}} = 3.$$

4. Спочатку зауважимо, що при цілих x та y маємо $[x] = x$, $[y] = y$ і x ділиться на y, бо $\dfrac{[x]}{[y]} = \dfrac{x}{y} = \left[\dfrac{x}{y}\right]$ є цілим числом.

Нехай $x = k + a$, $y = l + b$, де $k = [x]$, $l = [y]$. Тоді, $\dfrac{[x]}{[y]} = \dfrac{k}{l} = \left[\dfrac{x}{y}\right]$ є цілим числом. Отже, k ділиться на l. Припустимо, що $a \neq 0$. Тоді, для деякого натурального n, матимемо $[na] = 1$. Отже,

$$\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{[nx]}{[ny]} = \frac{[n(k+a)]}{[ny]} = \frac{nk+1}{[ny]}.$$

З останньої рівності отримуємо $\left[\dfrac{x}{y}\right][ny] = nk + 1$. Але $\left[\dfrac{x}{y}\right] = \dfrac{k}{l}$, і k ділиться на $\dfrac{k}{l}$. Отже, 1 ділиться на $\dfrac{k}{l}$ і ми маємо $k = l$. Отже $\left[\dfrac{x}{y}\right] = 1$. З очевидної нерівності $x \geq y$ ми отримуємо $a \geq b$.

Якщо $a = b$ маємо $x = y$. Припустимо, що $a > b$. Тоді знайдеться таке натуральне число n, для якого $[n(a-b)] > 0$. Для цього n ми матимемо

$$1 = \frac{[nx]}{[ny]} = \frac{nk + [na]}{nk + [nb]} = \frac{nk + [nb + n(a-b)]}{nk + [nb]}.$$

Але значення останнього дробу більше 1, так як $[n(b-a)] > 0$ і ми отримуємо протиріччя. Остаточно $x = y$ або x та y є цілими числами, перше з яких ділиться на друге.

5. Так як $x^3 - x = (x-1)x(x+1)$, що є добутком трьох послідовних цілих чисел, ліва частина рівності ділиться на 3 при будь-якому x. З іншого боку, при $y = 3k$ або $y = 3k+1$ права частина дає остачу 2 при діленні на 3, а при $y = 3k+2$ права частина дає остачу 1 при діленні на 3. Звідси маємо, що дане рівняння не має цілочисельних розв'язків.

6. Використаємо відомі формули

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Додавши їх, матимемо

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4}.$$

Отже,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 - p^2 = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4} - \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc}{4} =$$
$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2}{4} \geq 0.$$

7. Забезпечити собі перемогу може другий гравець. Якщо n — парне, він має робити ходи в ту клітинку, що симетрична клітинці, в яку щойно походив перший гравець, відносно головної діагоналі дошки (якщо перший гравець походив на діагональ, другий також ходить на діагональ). Якщо n — непарне, він має ходити так само, як описано перед цим, в тому випадку, коли він може зробити такий хід. Якщо він не може походити таким чином, він робить будь-який хід. Дотримуючись подібної стратегії, другий забезпечить наступне: в кожну пару клітинок, симетричних відносно головної діагоналі, обидва гравці зроблять по одному ходу. Отже, добуток чисел у довільній парі клітинок, яка визначається числами i та j, згідно з відомою тотожністю про найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне, дорівнюватиме $i \cdot j$. Звідси, після заповнення дошки, добуток усіх чисел в ній дорівнюватиме $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)^n$. Виконавши ділення чисел у кожному стовпчику (можна спочатку рахувати добуток, а потім ділити), ми отримаємо в результаті 1, що означає перемогу другого гравця.

8. Позначимо послідовно вершини даного 2000-кутника через $A_1, A_2, \ldots, A_{2000}$. Для кожного $1 < k < 2000$ виберемо довільну точку B_k всередині перетину трикутників $A_1A_kA_{2000}$ та $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ і доведемо, що множина точок $\{B_k\}$ є шуканою. Для цього розглянемо $\triangle A_pA_qA_r$, де $1 \leq p < q < r \leq 2000$. Так як $p \leq q-1$ ($r \geq q+1$), промінь A_qA_p (A_qA_r) лежить всередині кута $\angle A_1A_qA_{q-1}$ ($\angle A_{2000}A_qA_{q+1}$). Звідси і з опуклості 2000-кутника випливає, що $\triangle A_pA_qA_r$ цілком містить перетин трикутників $A_1A_qA_{2000}$ та $A_{q-1}A_qA_{q+1}$, а отже, точка B_q лежить всередині трикутника $A_pA_qA_r$. З іншого боку, лише при $k = p, q, r$ трикутник $A_pA_qA_r$ має спільні внутрішні точки з $\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}$. Але, при $k = p, r$ трикутники $A_1A_kA_{2000}$ та $A_pA_qA_r$ не мають спільних внутрішніх точок. Отже, B_k не належить трикутнику $A_pA_qA_r$ при $n \neq k$.

10 клас

1. Якщо одне з чисел x, y — від'ємне, а інше додатне, то тоді $\sin^2 x + \sin^2 y = 0$, тому $\sin x = \sin y = 0$, отже $x = n\pi, y = m\pi$, де цілі числа m, n різних знаків.

Якщо обоє невідомих додатні, то $\sin^2 x + \sin^2 y = 2$, а оскільки $\sin^2 t \leq 1$ для кожного дійсного t, то $\sin x = \pm 1$ і $\sin y = \pm 1$. Отже $x = n\pi + \pi/2, y = m\pi + \pi/2$, де m, n — цілі невід'ємні числа.

Якщо ж обоє невідомих від'ємні, то $\sin^2 x + \sin^2 y = -2$, що неможливо.

Таким чином, або $x = n\pi, y = m\pi$, де цілі числа m, n різних знаків, або $x = n\pi + \pi/2, y = m\pi + \pi/2$, де m, n — цілі невід'ємні числа.

2. При гомотетії з коефіцієнтом 2 відносно точки M проведені перпендикуляри переходять у висоти трикутника ABC, отже точка O переходить в точку H перетину висот трикутника ABC. Отже $OM = \frac{1}{2}HM$, а тому найменшого значення величина OM набуває, коли M — основа висоти трикутника ABC, проведеної з вершини B.

3. Нехай A — дана множина відрізків на прямій. Нехай A' — множина всіх тих відрізків з A, які не покривають жодного відрізка множини A. Позначимо e_1 — відрізок з найбільшим правим кінцем серед усіх відрізків множини A'. Нехай A_1 — множина відрізків з A', що не мають спільних точок з відрізком e_1. Надалі, кожен відрізок e_{i+1} — відрізок з найбільшим правим кінцем серед відрізків множини A_i, а множина A_{i+1} — множина тих відрізків з A_i, що не перетинаються з відрізком e_{i+1}. Продовжимо цю процедуру вибору відрізків доки це можливо. Множина обраних відрізків $e_1, \ldots, e_n$ містить не більше ніж 1997 елементів, оскільки жодні два з них не мають спільних точок.

Для кожного відрізка e множини A' знайдеться такий номер i, що відрізок e належить множині A_i, але не належить множині A_{i+1} (зауважимо, що A_n — порожня множина, інакше ми ще могли б знайти відрізок e_{n+1}). Це означає, що відрізок e має спільні точки з відрізком e_{i+1}, а оскільки e_{i+1} — відрізок з найбільшим правим кінцем серед відрізків множини A_i, то правий кінець відрізка e_{i+1} не менший за правий кінець e, і крім того, e не може бути повністю покритим відрізком e_{i+1}, тому лівий кінець відрізка e_{i+1} лежить на відрізку e. Таким чином, кожен відрізок множини A' містить лівий кінець одного з відрізків $e_1, \ldots, e_n$.

Кожен відрізок множини A покриває деякий відрізок множини A', який в свою чергу містить лівий кінець деякого відрізку e_i. Отже прямій можна можна відмітити 1997 точок так, щоб будь-який відрізок множини A містив хоча б одну з цих точок. Для цього досить взяти ліві кінці відрізків $e_1, \ldots, e_n$, і додати до них $1997 - n$ довільних точок, якщо $n < 1997$.

4. Доведемо індукцією по n нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$ на кожному з інтервалів $[2^{n-1}, 2^n)$ окремо, де n — довільне натуральне число. Цим ми доведемо нерівність, оскільки такі інтервали покривають весь промінь $[1, +\infty)$.

База індукції. Для $1 \leq x < 2$ маємо $f(x) \leq x = \sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}$.

Крок індукції. Припустимо, для всіх x з інтервалу $[2^{n-1}, 2^n)$ нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$ має місце. Нехай $2^n \leq x < 2^{n+1}$. Тоді $f(x) \leq \sqrt{2}f(x/2) < \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}$, оскільки $2^{n-1} \leq x/2 < 2^n$.

5. Якщо $m=1$, то всі числа x^9, y^9, z^7 більші або рівні одиниці, тому і числа x, y, z не менші за одиницю. Тоді $m=1\le xy^2z^3$.

Якщо $z\le 1$, то ми маємо нерівності:

$$m\le x^9,\quad m^2\le y^{18},\quad m^6\le z^{42}\le z^{27}.$$

Перемноживши нерівності, отримуємо: $m^9\le x^9y^{18}z^{27}$, тобто $m\le xy^2z^3$.

Якщо ж $m<1$ і $z>1$, то перемноживши перші дві нерівності, отримуємо:

$$m^9<m^3\le x^9y^{18}<x^9y^{18}z^{27},$$

тобто $m<xy^2z^3$.

6. Досить довести, що площі трикутників $\triangle CMB$ і $\triangle DPM$ рівні. Площа трикутника $\triangle CMB$ рівна сумі площ трикутників $\triangle CMP$ і $\triangle PMB$. Перша рівна половині добутку довжини сторони PM на довжину висоти CH_1 трикутника $\triangle CMP$. Друга площа рівна половині добутку довжини сторони PM на висоту BH_2 трикутника $\triangle PMB$. Площа ж трикутника $\triangle DPM$ дорівнює половині добутку довжини сторони PM на висоту DH_3 цього трикутника. Таким чином, для доведення твердження задачі досить довести рівність

$$CH_1+BH_2=DH_3.$$

Сума CH_1+BH_2 рівна довжині прямої проекції відрізка CB на пряму, перпендикулярну прямій AM, в той час коли DH_3 дорівнює довжині прямої проекції відрізка AD на ту ж пряму. Але, оскільки AB і CD — діаметри, то $ACBD$ — прямокутник, тому відрізки CB і AD паралельні і рівні, отже їх прямі проекції рівні.

7. Барон каже неправду. Нехай в будинку барона n кімнат. Тоді він не зможе розселити компанію гостей, яка складається з $n+1$ групи, в кожній з яких $n+1$ попарно знайомих гостей, причому гості з різних груп між собою не знайомі.

Справді, як би не розселяв гостей Мюнхаузен, в кожній кімнаті знайдуться двоє знайомих із однієї групи гостей, отже в кожній кімнаті повинні бути попарно знайомі гості. Це означає, що в кожну кімнату треба поселяти лише гостей з однієї групи, але це не можливо, тому що груп гостей більше ніж кімнат.

8. Припустимо, що існує таке число y_0, що $f(y_0)\neq 0$. Тоді з умови задачі безпосередньо випливає, що $g(x)=\frac{f(xy_0)-f(x)}{f(y_0)}$ для всіх x.

Тоді

$$\begin{gathered}
g(x_1x_2)=\frac{f(x_1x_2y_0)-f(x_1x_2)}{f(y_0)}=\\
=\frac{1}{f(y_0)}\left(f(x_1)+g(x_1)f(x_2y_0)-f(x_1)-g(x_1)f(x_2)\right)=\\
=\frac{1}{f(y_0)}\left(f(x_1)+\frac{f(x_1y_0)-f(x_1)}{f(y_0)}f(x_2y_0)-f(x_1)-\frac{f(x_1y_0)-f(x_1)}{f(y_0)}f(x_2)\right)=\\
=\frac{f(x_1y_0)-f(x_1)}{f(y_0)}\cdot\frac{f(x_2y_0)-f(x_2)}{f(y_0)}=g(x_1)g(x_2).
\end{gathered}$$

Таким чином $g(x_1x_2)=g(x_1)g(x_2)$ для всіх x_1, x_2. Не важко довести, що якщо $g(x)$ — многочлен, то із такої рівності випливає, що $g(x)=x^n$, де n — невід'ємне ціле число, або $g(x)=0$ для всіх x. В останньому випадку $f(xy)=f(x)$ для всіх x, y, тобто $f(x)$ — константа.

У випадку, коли $g(x)=x^n$ підставимо в рівняння задачі $y=0$, отримуємо

$$f(0)=f(x)+x^n f(0),$$

тобто $f(x)=C(1-x^n)$ для деякої сталої C.

Якщо ж для всіх x маємо $f(x) = 0$, то тоді довільний многочлен $g(x)$ задовольнятиме умову задачі.

Таким чином, остаточна відповідь така: або $g(x) = 0$, а $f(x)$ — стала, або $f(x) = 0$, а $g(x)$ — довільний многочлен, або $f(x) = C(1-x^n)$, а $g(x) = x^n$ для деякого натурального n. За допомогою перевірки переконуємося, що всі ці розв'язки задовольняють умову задачі.

11 клас

1. Оскільки $1+2\{x\}$ ціле, можливі два випадки: 1)$x = k$, 2)$x = k+\frac{1}{2}$, де k є цілим числом. У випадку 1) приходимо до рівняння $k^2+2k+3 = 0$, яке не має розв'язків. У випадку 2) маємо $k^2+3k+2=0$, звідки $k_1=-1,\ k_2=-2$. Відповідь: $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{3}{2}$.

2. Маємо, що (див. малюнок) $\angle 1=\angle PBK=\angle PNK$ як вписані, що спираються на одну дугу, $\angle 1+\angle 2=90^\circ$. Тому $MN=NK$. $\angle DPN=\angle BKL=\angle 2$. Тому $\angle DNP = 90^\circ-\angle 2=\angle 1$, NQ є бісектрисою, $NQ\perp MK$, звідки $\triangle PMN=\triangle PKN, PM=PK$.

3. Правильною є нерівність

$$\frac{x}{1+y+zx}\le\frac{1}{x+y+z},$$

бо $x\in(0;1],\ x^2+xy\le 1+y$. Аналогічно оцінюємо і інші доданки.

4. а) Візьмемо число $\beta\in(0;1),\ \beta<\lambda$. Умові задачі буде, наприклад, задовольняти функція f така, що $f(x)=0$ для $0\le x\le\beta$, $f(x)=1$ для $\beta<x\le 1$.

б) Позначимо $f(0)=\varphi$. Якщо $\varphi=0$, то поклавши в рівнянні $y=0$, будемо мати $f(f(x))=f(x)$, звідки випливає твердження задачі. Нехай $\varphi\in(0,1]$, тоді $f(\varphi) = f(f(0)+0)=f(0)+f(0)=2\varphi$, і далі за індукцією доводимо, що $\underbrace{f(f(\dots f}_{n}(x)\dots)) = (n+1)\varphi$. В деякий момент ця величина перевищить 1, що суперечить даній множині значень f.

5. Відповідь: один корінь. Розгляньте монотонність лівої та правої частин на [-1;0], на [0;1] та їх значення на кінцях цих відрізків.

6. Якщо ми витираємо число кратне 3, то замість нього записуємо число, яке також кратне 3, в інших випадках отримуємо число вигляду $3k+1$, де k ціле. Тому сума записаних чисел завжди буде мати вигляд $3m+2$, m ціле, і нульову суму отримати не можна.

7. Нехай $\omega_1(O_1,R_1)$ та $\omega_2(O_2,R_2)$ — кулі, які дотикаються до відрізків AB і CD відповідно в точках A і C та B і D. Позначимо через K,G,F,L середини відрізків AB,BD,DC,CA відповідно. оскільки середина відрізка проектується в середину його проекції на пряму, то досить довести, що точка O перетину діагоналей паралелограма $KGFL$ проектується в точку P. Дійсно, $O_1A\perp AB, O_2B\perp AB$, а тому $O_1K^2-O_2K^2=(R_1^2+AB^2/4)-(R_2^2+AB^2/4)=O_1P^2-O_2P^2$, тобто $PK\perp O_1O_2$. Аналогічно доводимо, що $PF\perp O_1O_2$. Отже, KF проектується в точку P, тому і точка O проектується в точку P (розглядається проектування на пряму O_1O_2).

8. Розглянемо спочатку пункт б). Нехай

$$f(x)=\frac{x}{n^2}+\frac{n^2}{x}+2.$$

Тоді
$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \geq 1. \tag{1}$$
Функція $f(x)$ має похідну $f'(x) = (x^2 - n^4)/(n^2x^2)$, і тому є спадною на інтервалі $(0, n^2)$.

Легко підрахувати, що $x_1 = 1,\ x_2 = 4,\ x_3 = 4,\ x_4 = 169/36$ та $[x_4] = 4$. Методом математичної індукції доведемо, що при всіх $n \geq 4$ виконується нерівність
$$n + \frac{2}{n} < x_n < n + 1. \tag{2}$$
Базу індукції при $n = 4$ ми вже перевірили. Для обгрунтування індукційного кроку покажемо, що з (2) буде випливати, що
$$n + 1 + \frac{2}{n+1} < x_{n+1} < n + 2. \tag{3}$$
Через те, що функція f є спадною на (n, n^2), з (2) маємо
$$f(n+1) < f(x_n) = x_{n+1} < f(n + \frac{2}{n}). \tag{4}$$
Також маємо, що
$$f(n+1) = \frac{n^2}{n+1} + \frac{n+1}{n^2} + 2 = n + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{n+1}{n^2} > n + 1 + \frac{2}{n+1}. \tag{5}$$
Також отримуємо, що
$$f(n + \frac{2}{n}) = f(\frac{n^2+2}{n}) = \frac{n^3}{n^2+2} + \frac{n^2+2}{n^3} + 2.$$
Тепер відмітимо, що
$$f(n + \frac{2}{n}) < n + 2. \tag{6}$$
Ця нерівність випливає з того, що для $n > 1$
$$\frac{n^3}{n^2+2} + \frac{n^2+2}{n^3} + 2 - (n+2) = \frac{(3n^2+2)(2-n^2)}{n^3(n^2+2)} < 0.$$

Таким чином, з нерівностей (6), (5), (4) маємо
$$n + 1 + \frac{2}{n+1} < f(n+1) < x_{n+1} < f(n + \frac{2}{n}) < n + 2,$$
звідки випливає (3).

Тому (2) є правильними для всіх $n \geq 4$, і тоді маємо, що $[x_n] = n$, пункт б) доведено.

З розглянутих оцінок тепер легко отримується твердження пункта а). Справді,
$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{n^2} + \frac{n^2}{x_n} + 2 - x_n = \frac{(n^2 + x_n)^2 - (nx_n)^2}{n^2 x_n} > 0,$$
оскільки
$$x_n < n + 1 < \frac{n^2}{n-1} \ \Rightarrow\ x_n(n-1) < n^2 \ \Leftrightarrow nx_n < x_n + n^2.$$
Тому $x_{n+1} > x_n,\ n \geq 1$.

Відбірково-тренувальні збори команди України по підготовці до 39-ої Міжнародної математичної олімпіади

Як і в більшості інших країн, склад команди України для участі в Міжнародній олімпіаді був визначений на відбірково-тренувальних зборах. Вони проходили в травні на базі Львівського фізико-математичного ліцею, і на них були запрошені 12 кращих учасників останньої Всеукраїнської математичної олімпіади. Це були учні 11 класу А.Болтенков, А.Бондаренко, С.Бондаренко, Б.Гречук, З.Каблучко, А.Мелліт, С.Торба та учні 10 класу К.Бойко, М.Давидов, О.Забірник, П.Пилявський, І.Русанов. Чотири відбіркових тура визначили школярів, що увійшли до нашої команди, після чого для всіх учасників зборів були проведені теоретичні заняття (склад команди подано в розділі, присв'яченому Міжнародній математичній олімпіаді).

В проведенні зборів взяли участь викладачі В.М.Лейфура (м. Миколаїв, педагогічний інститут), І.М.Мітельман (м. Одеса, Рішельєвский ліцей), В.М.Радченко (м.Київ, університет ім. Тараса Шевченка) та В.А.Ясінський (м. Вінниця, педагогічний університет).

Далі подаються умови та розв'язання задач, що склали чотири відбіркові завдання для учасників зборів. На виконання кожного завдання давалося чотири з половиною години, розв'язання кожної задачі оцінювалося в 7 балів.

Завдання 1

1. Для кожної скінченої множини ненульових векторів U на площині позначимо через $l(U)$ довжину суми всіх векторів U. Для скінченої множини ненульових векторів V на площині її підмножина B буде називатись максимальною, якщо $l(B)$ не менша за $l(A)$ для будь-якої $A \subset V$.

а) Побудувати множини з 4 та 5 векторів, які мають 8 та 10 максимальних множин відповідно.

б) Довести, що кожна множина V з n векторів ($n \in \mathbf{N}$) має не більше, ніж $2n$ максимальних підмножин.

2. Знайти всі натуральні k, для яких справедливе наступне твердження:

Якщо $F(x)$ — многочлен з цілими коефіцієнтами, який задовольняє умову

$$0 \leq F(c) \leq k \text{ для всіх } c \in \{0, 1, \ldots, k+1\},$$

то $F(0) = F(1) = \cdots = F(k+1)$.

3. Нехай $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — послідовність, яка задається співвідношеннями

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{i+2} = f_i + f_{i+1} \text{ для } i \geq 0.$$

Нехай $n \geq 2$ та невід'ємні числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ задовольняють умовам

$$a_0 = 1,\ a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2} \text{ для } i = 0, 1, \ldots n-2.$$

Довести, що

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geq \frac{f_{n+2} - 1}{f_n}$$

та число в правій частині не може бути заміненим на більше.

Завдання 2

4. Дано квадрат розмірами $n \times n$, розбитий на n^2 квадратиків розмірами 1×1 звичайним чином. Знайти максимальну можливу кількість його розбиттів на прямокутники розмірами $1 \times k$ (горизонтально та вертикально розташовані, k — довільні натуральні) таких, що будь-які два розбиття не мають двох однакових прямокутників на одному і тому ж місці.

5. Дані натуральне число $n \geq 3$ та дійсне число x. Відомо, що дробові частини чисел x, x^2 та x^n однакові. Довести, що x — ціле.

6. На площині дано опуклий шестикутник $ABCDEF$. Прямі AB та EF, EF та CD, CD та AB перетинаються в точках P, Q, R відповідно. Прямі BC та DE, DE та FA, FA та BC перетинаються в точках S, T, U відповідно. Відомо, що

$$\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{RQ} = \frac{EF}{QP}.$$

Довести, що

$$\frac{BC}{US} = \frac{DE}{ST} = \frac{FA}{TU}.$$

Завдання 3

7. Дано паралелограм $ABCD$ такий, що трикутник ABD — гострокутний та $\angle BAD = 45°$. На сторонах паралелограма взято відмінні від вершин точки $K \in AB, L \in BC, M \in CD, N \in DA$ таким чином, що навколо чотирикутника $KLMN$ можна описати коло, і радіус цього кола дорівнює радіусам описаних кіл трикутників ANK та CLM. Нехай S — точка перетину діагоналей $KLMN$. Знайти множину всіх можливих положень точки S для всіх можливих вказаних положень точок K, L, M, N.

8. Дано взаємно прості натуральні числа m та n. Знайти найбільший спільний дільник чисел $5^m + 7^m$ та $5^n + 7^n$.

9. Нехай f та g — функції, кожна з яких є строго монотонною, визначеною на множині всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$, та множиною значень має $\mathbf{R}$. Для кожного $x \in \mathbf{R}$

$$f(g^{-1}(x)) + g(f^{-1}(x)) = 2x.$$

Відомо, що існує $x_0 \in \mathbf{R}$ таке, що $f(x_0) = f(x_0)$. Довести, що $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbf{R}$ (f^{-1} та g^{-1} позначають функції, обернені до f та g відповідно).

Завдання 4

10. Дано функцію f, визначену на множині всіх дійсних чисел $\mathbf{R}$ і таку, що для всіх $x \in \mathbf{R}$

$$f(f(x)) = 2 - x.$$

Довести, що графік f переходить в себе при повороті з центром в точці (1,1) на $90°$ (проти годинникової стрілки).

11. На площині дані дев'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Деякі з цих точок з'єднані відрізками. Яку найменшу кількість відрізків можна провести, щоб виконувалась така властивість: для будь-яких п'яти точок з даних знайдуться не менше двох відрізків, кожний з яких з'єднує деякі дві точки з цих п'яти.

12. Нехай $n \geq 2$ та дано многочлен

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + 1$$

такий, що всі a_k — натуральні числа та $a_i = a_{n-i}$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Довести, що існує нескінченна кількість різних пар натуральних чисел (k, l) таких, що $P(k)$ ділиться на l та $P(l)$ ділиться на k. (Пари називаються різними, якщо в них відрізняються або перші елементи, або другі елементи, або і ті і ті.)

Вказівки та розв'язання задач

1. а) Побудуємо приклад для $n = 4$. Візьмемо рівносторонній трикутник ABC, точку перетину медіан якого позначимо через O. Вектор $\overrightarrow{OC}$ розіб'ємо в суму $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ двох векторів однакової довжини, кожний з яких утворює кут $15°$ з $\overrightarrow{OC}$. Як можна переконатися за допомогою перебору, четвірка векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ має 8 максимальних підмножин.

Для $n = 5$ ми можемо взяти вектори, що співпадають із сторонами правильного п'ятикутника, і напрямок яких дає його обхід по периметру.

б) Зведемо початок всіх n векторів до однієї точки K. Нехай B — деяка максимальна підмножина. Проведемо через K пряму a, перпендикулярну до суми векторів B. Тоді до B входять ті і тільки ті вектори, які лежать в тій же півплощині по відношенню до a, що і сума векторів B. (Інакше вказана множина не була б максимальною). Таким чином, кожна максимальна підмножина є множина всіх векторів, що лежать по один бік від деякої прямої через K. Повертаючи пряму навколо K, ми отримаємо не більше n різних розбиттів наших векторів на дві підмножини, кожна з яких може виявитись максимальною, і інших максимальних підмножин не існує. Таким чином, всього може бути не більше за $2n$ таких підмножин.

2. Відповідь: для $k \geq 4$.

Покажемо, що при менших k дане твердження невірне. Це ілюструють, наприклад, такі многочлени:

для $k = 1 \quad F(x) = -x(x-2)$,

для $k = 2 \quad F(x) = x(x-2)(x-3)$,

для $k = 3 \quad F(x) = -x(x-2)^2(x-4)$.

Тепер нехай $k \geq 4$. Відомо, що для многочлена з цілими коефіцієнтами $F(x)$ та $m,\ n \in \mathbf{Z}$ $(m \neq n)$ $\quad F(m) - F(n)$ ділиться на $m - n$. Тому $F(k+1) - F(0)$ ділиться на $k+1$, і з умови $0 \leq F(x) \leq k$ маємо $F(k+1) = F(0), \quad F(x) - F(0) = x(x-k-1)G(x)$ для деякого многочлена з цілими коефіцієнтами $G(x)$. легко переконатись, що $|x(x-k-1)| > k$ для $x = 2,\ 3, \ldots k-1$. Оскільки $|F(x) - F(0)| \leq k$ для цих x, маємо $G(x) = 0,\ x = 2,\ 3, \ldots k-1$, звідки

$$F(x) - F(0) = x(x-2)\ldots(x-k+1)(x-k-1)H(x)$$

для деякого многочлена з цілими коефіцієнтами $H(x)$. Тепер маємо, що $|F(1) - F(0)| = k(k-2)!|H(1)N$. Оскільки $k(k-2)! > k$ для $k \geq 4$, з умови задачі отримуємо, що $H(1) = 0$. Аналогічно $H(k) = 0$. Отже, $F(x) - F(0) = 0,\ x = 0,\ 1, \ldots, k$.

3. (Б.Гречук) Покажемо, що дане число в правій частині не може бути збільшене. Покладемо

$$a_k = \frac{f_{n-k}}{f_n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Індукцією за n легко перевірити рівність $f_0 + f_1 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1,\ n \geq 0$, тому цей набір дає рівність в умові задачі.

Тепер доведемо, що дана нерівність завжди виконується. Візьмемо довільні числа $a_0,\ a_1, \ldots, a_n$, що задовольняють умовам задачі. Далі будемо використовувати позначення

$$c_k = \frac{f_{n-k}}{f_n}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Якби при деякому k ми мали $c_k > a_k,\ c_{k+1} > a_{k+1}$, то було б $c_{k-1} = c_k + c_{k+1} > a_k + a_{k+1} \geq a_{k-1}$. Аналогічно далі $c_{k-2} > a_{k-2}, \ldots, c_0 > a_0$, але $c_0 = a_0 = 1$. Тому такої пари нерівностей немає. При $c_k > a_k$ буде $c_k + c_{k+1} = c_{k-1} \leq a_{k-1} \leq a_k + a_{k+1}$.

Виділимо множину чисел $c_{k_j} > a_{k_j}$, тоді всі числа c_{k_j+1} до цієї множини не попадають, і для кожного $j \quad c_{k_j} + c_{k_j+1} \leq a_{k_j} + a_{k_j+1}$ (відмітимо, що c_n в цій множині немає, оскільки $c_n = 0$). Для інших значень індексу буде $c_k \leq a_k$. Додавши всі отримані нерівності, одержимо

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n \geq c_0 + c_1 + \cdots + c_n = \frac{f_0 + f_1 + \cdots + f_n}{f_n} = \frac{f_{n+2} - 1}{f_n}.$$

4. Відповідь: $2n - 1$.

Розглянемо лівий верхній квадрат розмірами 1×1. Існує рівно $2n - 1$ різних прямокутників розмірами $1 \times k,\ 1 \leq k \leq n$, що покривають цей квадрат. Тому якщо взяти більше ніж $2n - 1$ розбиттів, деякі два з них будуть мати співпадаючі прямокутники.

З іншого боку, існує множина з $2n - 1$ розбиттів, що задовольняє умову задачі.

Для $n = 1$ — це одне розбиття, що співпадає з нашим цілим квадратом 1×1.

Для $n = 2$ беремо розбиття квадрату 2×2 на дві рівні частини вертикальною лінією розрізу, аналогічне розбиття горизонтальною лінією та розбиття на одиничні квадрати.

Для $n \geq 3$ ми візьмемо $n - 3$ розбиття, що утворюються проведенням однієї вертикальної лінії на відстані k від лівої сторони квадрата, $2 \leq k \leq n - 2$ та проведенням $n - 1$ горизонтальної лінії, що ділять квадрат на смужки шириною 1. Додамо $n-3$ розбиттів, що утворюються з попередніх поворотом на $90°$. Візьмемо одне розбиття, в якому взято смужку розмірами $n \times 1$ вздовж лівої сторони квадрата, а залишена частина квадрата поділена на горизонтальні смужки розмірами $1 \times (n - 1)$. Додамо ще три розбиття, що утворюються з останнього поворотами на $90°,\ 180°,\ 270°$. Ще візьмемо розбиття на квадрати 1×1. Всього отримуємо $2n - 1$ розбиттів, які, неважко переконатись, задовольняють умову задачі.

5. З умови задачі випливає, що $x^2 = x + p,\ x^n = x + q$ для деяких цілих чисел p та q. При цьому $p = x^2 - x \geq -1/4$. Також p ціле, для $p = 0$ твердження задачі очевидне, тому $p \geq 1$. Маємо, що

$$x^3 = xx^2 = x(x + p) = x^2 + px = x + p + px = (p + 1)x + p.$$

Міркуючи аналогічно, за індукцією неважко довести, що для всіх $k \geq 3$ $x^k = a_k x + b_k$ для деяких цілих чисел $a_k \geq 2,\ b_k \geq 1$. Так приходимо до того, що $x^n = x + q = a_n x + b_n$, звідки x — раціональне число. До того ж воно задовольняє рівності $x^n - x - p = 0$. За відомим твердженням про раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами таке x повинне бути цілим.

6. (М.Давидов) Нехай
$$\frac{AB}{PR} = \frac{CD}{RQ} = \frac{EF}{QP} = k.$$
Тоді $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{PR},\ \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{RQ},\ \overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{QP}$, звідки $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$, і значить, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$. Значить, паралельним переносом векторів $\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{DE},\ \overrightarrow{FA}$ можна скласти трикутник. Його сторони будуть паралельні відповідним сторонам трикутника STU (оскільки перенос паралельний), тому рівні відповідні кути, і ці трикутники є подібними. Звідси маємо потрібну рівність.

7. Відповідь: відрізок BD без точок $B,\ D$.

Спочатку покажемо, що S лежить на відрізку BD (при цьому зрозуміло, що не в його кінцях).

Вписаний кут $\angle KLN$ спирається на той же самий відрізок, що і $\angle KAN = 45°$, причому в колі того ж самого радіуса. Тому $\angle KLN$ дорівнює $45°$ або $135°$. Аналогічні висновки робимо для кутів $\angle KMN,\ \angle LKM,\ \angle LNM$. Тепер відмітимо, що жоден з цих кутів не може дорівнювати $135°$, оскільки тоді в трикутнику KLS або MNS сума двох кутів виявилась би не меншою за $180°$.

Тому $SK = SL,\ \angle LSK = 90°$, і оскільки $\angle KBL = 135°$, на колі з центром S, що проходить через точки K та L, лежить ще й точка $B,\ SL = SB$. Аналогічно $SD = SN$. Тому $\angle SDN = \angle SND = \angle SLB = \angle SBL$. Прямі SB та SD паралельні, отже, вони співпадають, $S \in BD$.

Тепер візьмемо будь-яку внутрішню точку S діагоналі BD та покажемо, що для неї існує відповідний чотирикутник $KLMN$. Проведемо коло з центром в S та радіусом SB, на його перетині із стороною AB візьмемо точку K, із стороною BC — точку L. Також на колі з центром в S та радіусом SD на перетині із стороною CD візьмемо точку M, із стороною AD — точку N. Тоді $\angle SND = \angle SDN = \angle SBL = \angle SLB$, і S лежить на прямій LN. Аналогічно $S \in KM$. Оскільки $\angle KBL = \angle MDN = 135°$, в проведених колах буде $\angle KLM = \angle KMN = \angle LKM = \angle LNM = 45°$. Тому навколо $KLMN$ можна описати коло, і його радіус дорівнює радіусам описаних кіл трикутників CLM та AKN.

8. Нехай $m > n$. Оскільки 5 та 7 взаємно прості, маємо, що

$$\text{НСД}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n) = \text{НСД}(5^m + 7^m - 5^{m-n}(5^n + 7^n), 5^n + 7^n) = \\ \text{НСД}(7^n(7^{m-n} - 5^{m-n}), 5^n + 7^n) = \text{НСД}(7^{m-n} - 5^{m-n}, 5^n + 7^n).$$

Продовжуючи такі дії далі, з алгоритму Евкліда отримаємо, що шукане значення обов'язково є дільником одного з чисел

$$5^{\text{НСД}(m,n)} + 7^{\text{НСД}(m,n)}, \quad 7^{\text{НСД}(m,n)} - 5^{\text{НСД}(m,n)}.$$

Тому для взаємно простих $m,\ n$ це значення обов'язково є дільником 12.

З іншого боку, сума однакових непарних степенів ділиться на суму основ (це випливає з відомого розкладу такого двучлена на множники). Тому для непарних m та n будуть $5^m + 7^m$ та $5^n + 7^n$ ділитися на 12, і тому їх найбільший спільний дільник дорівнює 12.

Якщо, наприклад, число m парне, то розглядання остач значення $5^m + 7^m$ при діленні на 3 та 4 показує, що подільності на 3 та 4 немає. Тому шуканий НСД може дорівнювати тільки 1 або 2. Очевидно, що розглядувані значення парні, тому в цьому випадку НСД дорівнює 2.

Відповідь: 12 для обох непарних $m,\ n$; 2 в інших випадках.

9. (А.Мелліт) Припустимо, що твердження задачі невірне, та існує a_0 таке, що $f(a_0) \neq g(a_0)$. Позначимо $= f(a_0) - g(a_0)$. Ми розглянемо послідовність $a_i,\ i \geq 0$, таку, що $a_{i+1} = g^{-1}(f(a_i))$ для всіх $i \geq 0$. Також для $i \leq 0$ покладемо $a_{i-1} = f^{-1}(g(a_i))$.

Візьмемо $x = f(a_i) = g(a_{i+1})$, тоді буде $f(g^{-1}(x)) = f(a_{i+1}),\ g(f^{-1}(x)) = g(a_i)$. Тепер, враховуючи рівність з умови задачі, ми маємо:

$$f(a_{i+1}) + g(a_i) = 2x = f(a_i) + g(a_{i+1}).$$

Звідси отримуємо, що для всіх (додатних та від'ємних) i

$$f(a_{i+1}) - g(a_{i+1}) = f(a_i) - g(a_i) = \cdots = f(a_0) - g(a_0) = c.$$

Оскільки $g(a_i) = f(a_{i-1})$, будемо мати:

$$f(a_i) - f(a_{i-1}) = c, \quad f(a_i) = f(a_0) + ci.$$

Будемо вважати, що $c > 0$ (для $c < 0$ міркування проводяться аналогічно). Тоді знайдеться таке i, що $f(a_i) \leq f(x_0),\ f(a_{i+1}) > f(x_0)$. Також маємо:

$$g(a_{i+1}) = f(a_i) \leq f(x_0) = g(x_0).$$

Якщо $a_{i+1} > x_0$, то f — зростаюча функція, а g — спадна. Тоді f^{-1} — зростаюча функція, g^{-1} та $f(g^{-1}(x)) + g(f^{-1}(x))$ — спадні. Аналогічно отримуємо, що остання сума є спадною функцією і при $a_{i+1} < x_0$. Тому вона не може співпадати з $2x$ — зростаючою функцією. Отримана суперечність показує, що обов'язково $c = 0$.

10. Неважко перевірити, що при повороті координатної площини на $90°$ у вказаному в умові напрямку відносно центру $(1,\ 1)$ точка з координатами $(x,\ y)$ переходить в точку з координатами $(2-y,\ x)$. Тому довільна точка графіка $(x,\ f(x))$ при такому повороті перейде в точку $(2 - f(x),\ x)$. Щоб показати, що ця точка належить графіку, досить перевірити рівність

$$f(2 - f(x)) = x. \tag{7}$$

Якщо $f(y) = f(z)$, то $f(f(y)) = f(f(z))$, і з умови задачі отримуємо, що $y = z$. Тому для перевірки (7) досить показати, що

$$f(f(2 - f(x))) = f(x).$$

Тут ліва частина, за умовою, дорівнює $2 - (2 - f(x)) = f(x)$, і рівність є вірною.

11. (М. Давидов) Відповідь: 9 відрізків.

Для того, щоб довести, що 9 відрізків досить, розіб'ємо наші точки на три трійки, і в кожній трійці з'єднаємо точки в трикутник. Легко переконатись, що така конфігурація задовольняє умову.

Припустимо, що існує множина з 9 точок та 8 відрізків, що задовольняє умову задачі. Якщо проведено більше ніж $n/2$ відрізків з кінцями в n точках, то знайдеться точка, з якої виходять не менше 2 відрізків. На кожному кроці ми можемо з нашої множини вилучати таку точку з відрізками, що з неї виходять, і залишена конфігурація також буде задовольняти умову задачі. Так кожного разу будуть вилучатися не менше двох відрізків.

Починаючи з 9 точок та 8 відрізків ми або прийдемо до 5 точок без жодного відрізка (що, очевидно не задовольняє умову), або на деякому з попередніх кроків отримаємо множину з n точок ($6 \leq n \leq 8$), з кожної з яких виходять не більше одного відрізка. При цьому для $n = 6$ ми будемо мати не більше 2 відрізків. При таких умовах для кожного $n \in \{6,\ 7,\ 8\}$ легко вказати множину з 5 точок, серед яких не проведено двох відрізків.

12. (С.Бондаренко) Розглянемо послідовність $\{b_i,\ i \geq 0\}$ таку, що

$$b_0 = b_1 = 1, \quad b_{i+1} = \frac{P(b_i)}{b_{i-1}} \text{ для } i \geq 1.$$

Методом математичної індукції доведемо, що всі $b_i \in \mathbf{N}$. Цей факт, очевидно, є вірним для $i \leq 3$. Припустимо, що це твердження виконується для всіх $i \leq k$ ($k \geq 3$), і доведемо його для $i = k + 1$. Маємо, що

$$b_{k+1} = \frac{P(b_k)}{b_{k-1}} = \frac{1}{b_{k-1}} P\left(\frac{P(b_{k-1})}{b_{k-2}}\right) =$$
$$\frac{1}{b_{k-1}}\left(\frac{P^n(b_{k-1})}{b_{k-2}^n} + a_1\frac{P^{n-1}(b_{k-1})}{b_{k-2}^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{P(b_{k-1})}{b_{k-2}} + 1\right) =$$
$$\frac{P^n(b_{k-1}) + a_1P^{n-1}(b_{k-1})b_{k-2} + \cdots + a_{n-1}P(b_{k-1})b_{k-2}^{n-1} + b_{k-2}^n}{b_{k-1}b_{k-2}^n}. \quad (1)$$

Оскільки, за означенням послідовності, $b_ib_{i+2} = P(b_{i+1})$ та вільний член многочлена дорівнює 1, b_i та b_{i+1} взаємно прості. З припущення індукції ми маємо, що чисельник останнього дробу в (1) ділиться на b_{k-2}^n, і тому нам досить довести, що він ділиться на b_{k-1}. Маємо, що при діленні на b_{k-1} $P(b_{k-1})$ дає остачу 1, тому весь чисельник дає таку ж остачу, як і

$$1 + a_1b_{k-2} + \cdots + a_{n-1}b_{k-2}^{n-1} + b_{k-2}^n = P(b_{k-2})$$

(тут ми використали умову $a_i = a_{n-i}$). $P(b_{k-2}) = b_{k-1}b_{k-3}$, де, за припущенням індукції, всі b_i — натуральні числа. Тому наш чисельник ділиться на b_{k-1}.

Також, $b_2 > b_1$, і для всіх наступних i

$$b_{i+1} = \frac{P(b_i)}{b_{i-1}} > \frac{b_i^n}{b_{i-1}} > b_i^{n-1} \geq b_i.$$

Тепер легко бачити, що нескінченна послідовність різних пар чисел $(b_i,\ b_{i+1})$, $i \geq 0$, задовольняє умову задачі.

39-та Міжнародна математична олімпіада

З 10 по 21 липня 1998 року на Тайвані в місті Тайпей пройшло традиційне щорічне всесвітнє змагання юних математиків. В ньому взяли участь 419 школярів з 76 країн. Команду України склали учні:

Андрій Болтенков — м. Харків, ФМЛ № 27, 11 клас;

Сергій Бондаренко — м. Київ, УФМЛ, 11 клас;

Богдан Гречук — м. Київ, УФМЛ, 11 клас;

Антон Мелліт — м. Київ, ліцей "Лідер", 11 клас.

Павло Пилявський — м. Вінниця, ліцей № 7, 10 клас;

Сергій Торба — м. Київ, ліцей "Лідер", 11 клас.

Керівниками команди були В.О.Борисова (м. Київ, Інститут змісту і методів навчання), Г.М.Литвиненко (м. Київ, Міністерство освіти України) та В.М.Радченко (м. Київ, університет ім. Тараса Шевченка).

На попередній, 38-ій олімпіаді, наша команда зайняла високе 6-те місце в неофіційному (але дуже для всіх цікавому) командному заліку, тим самим вперше потрапивши до десятки кращих. Нам хотілося підтвердити невипадковість того успіху, а особливим це бажання було у А.Болтенкова, Б.Гречука та П.Пилявського, які представляли Україну і на олімпіаді минулого року.

Вважаємо, що підтвердження відбулося. Підсумки виступу наших школярів та результати всіх команд-учасниць олімпіади наведено в окремих таблицях. Золоті медалі отримали учні, що набрали 31 — 42 бали з 42 можливих, срібні медалі — учасники з 24 — 30 балами, бронзові — учні з 14 — 23 балами. Чудовий результат показав П.Пилявський, який потрапив до трійки кращих учасників змагання (повні 42 бали набрав лише один учень з команди Ірану, 41 бал — наш школяр та один учасник з Тайваня). В цілому, всі учасники нашої команди з повною відповідальністю віднеслися до свого виступу, старанно працюючи перед олімпіадою та проявивши свої можливості на самому конкурсі. Хочеться висловити свою подяку всім учням та їх вчителям.

З приємністю відмітимо і той факт, що вперше до варіанту завдань олімпіади за рішенням журі була відібрана одна із задач, запропонованих Україною. Автор цієї задачі (і багатьох задач математичних олімпіад на Україні) — В.А.Ясінський.

Дещо несподіваним може здатися чудовий виступ на олімпіаді команди Ірану. Але в цій державі олімпіадам з різних предметів та підготовці команди країни приділяється велика увага, і з кожним роком учні з Ірану показували все кращі результати. Конкуренцію іранським учням могла б скласти сильна команда Китаю, та вона відмовилась від участі в олімпіаді з політичних причин. Керівники команд-учасниць висловили загальний жаль з приводу такого впливу політики на олімпіадний рух і прийняли рішення надіслати в Китай всі матеріали олімпіади.

Також на засіданні міжнародного журі були затверджені країни, які будуть приймати наступні олімпіади. В цьому списку Румунія (1999 р.), Південна Корея (2000 р.), США (2001 р.), Філіппіни (2002 р.) та Японія (2003 р.). На проведення змагання 2004 р. претендують В'єтнам, Греція та Іран, 2006 р. — Словенія. Учням, які бажають успішно виступати на цих олімпіадах, вже сьогодні треба старанно працювати. Лише через велику роботу приходить успіх, і це можуть підтвердити всі учасники команди України.

Результати учасників команди України

Учасник	Задачі						Сума	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
А. Болтенков	3	0	1	7	7	1	19	Бронзова медаль
С. Бондаренко	7	0	1	7	7	0	22	Бронзова медаль
Б. Гречук	7	7	2	7	7	0	30	Срібна медаль
А. Мелліт	6	0	7	7	6	0	26	Срібна медаль
П. Пилявський	7	7	6	7	7	7	41	Золота медаль
С. Торба	4	7	7	7	0	3	28	Срібна медаль

Результати виступу команд на 39-ій Міжнародній математичній олімпіаді

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
1	Іран	211	5	1	-
2	Болгарія	195	3	3	-
3-4	США	186	3	3	-
3-4	Угорщина	186	4	2	-
5	Тайвань	184	3	2	1
6	Росія	175	2	3	1
7	Індія	174	3	3	-
8	Україна	166	1	3	2
9	В'єтнам	158	1	3	2
10	Югославія	156	-	5	-
11	Румунія	155	3	-	2
12	Південна Корея	154	2	2	2
13	Австралія	146	-	4	2
14	Японія	139	1	1	3
15	Чехія	135	-	3	3
16	ФРН	129	-	3	2
17-18	Велика Британія	122	-	1	4
17-18	Туреччина	122	-	2	4
19	Бєларусь	118	-	1	4
20	Канада	113	1	1	2
21	Польща	112	1	1	1
22-23	Сингапур	110	-	1	3
22-23	Хорватія	110	-	-	5
24	Ізраїль	104	-	-	5
25	Гонконг	102	-	1	3
26-27	Вірменія	100	-	2	2
26-27	Франція	100	1	-	2
28	Південна Африка	98	1	-	2
29	Аргентина	97	1	-	2
30-31	Бразилія	91	1	-	1
30-31	Монголія	91	-	2	2
32	Греція	90	-	2	1

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
33-34	Боснія та Герцеговина	88	-	1	2
33-34	Словаччина	88	-	1	4
35	Казахстан	81	-	-	2
36	Грузія	78	-	-	3
37	Латвія	74	-	1	3
38	Італія	72	-	-	3
39	Бельгія	71	-	1	1
40	Македонія	69	-	-	1
41	Колумбія	66	1	-	-
42	Таїланд	65	-	-	2
43	Естонія	63	-	1	1
44-45	Мексика	62	-	1	-
44-45	Нідерланди	62	-	1	-
46	Перу (3)	60	-	2	-
47	Швеція	58	-	-	1
48	Австрія	57	-	-	2
49	Нова Зеландія	50	-	-	2
50	Молдова (2)	45	-	1	1
51	Словенія	44	-	-	1
52-53	Ісландія	42	-	-	-
52-53	Марокко	42	-	-	-
54	Азербайджан	41	-	-	1
55	Литва	40	-	-	1
56	Кіпр (4)	39	-	-	1
57	Швейцарія	37	-	-	-
58-60	Ірландія	36	-	-	-
58-60	Іспанія	36	-	-	1
58-60	Тринідад і Тобаго	36	-	-	1
61	Норвегія	33	-	-	-
62	Малайзія	32	-	-	-
63	Фінляндія	30	-	-	-
64	Макао (5)	29	-	-	-
65	Люксембург (2)	25	-	-	1
66	Данія	21	-	-	-

Місце	Країна	Бали	Медалі		
			Золоті	Срібні	Бронзові
67	Куба (1)	19	-	-	1
68	Індонезія (5)	16	-	-	-
69	Киргизія (5)	14	-	-	-
70-71	Філіппіни (4)	11	-	-	-
70-71	Уругвай	11	-	-	-
72-73	Парагвай (5)	6	-	-	-
72-73	Португалія	6	-	-	-
74	Шрі Ланка (1)	5	-	-	-
75	Венесуела (2)	1	-	-	-
76	Кувейт (3)	0	-	-	-

Примітка. Якщо від країни виступало менше шести школярів, то в дужках вказується кількість членів команди.

Умови задач 39-ої Міжнародної математичної олімпіади (в дужках вказано країну, яка запропонувала задачу)

1. (Люксембург) В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC та BD перпендикулярні та протилежні сторони AB та DC не паралельні. Серединні перпендикуляри до сторін AB та DC перетинаються в точці P, що лежить всередині $ABCD$. Довести, що навколо чотирикутника $ABCD$ можна описати коло тоді і тільки тоді, коли площі трикутників ABP та CDP рівні.

2. (Індія) На змаганні виступили a учасників, які були оцінені b суддями, де b — непарне, $b \geq 3$. Кожний суддя виставив кожному з учасників одну з двох оцінок — "задовільно"або "незадовільно". Число k таке, що для будь-яких двох суддів знайдуться не більше ніж k учасників, що отримали в цих двох суддів однакові оцінки. Довести, що

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

3. (Бєларусь) Нехай $d(n)$ — кількість всіх різних натуральних дільників числа n (включаючи 1 та саме n.)

Знайти всі натуральні числа k такі, що

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

для деякого n.

4. (Велика Британія) Знайти всі пари (a, b) натуральних чисел такі, що $a^2 + a + b$ ділиться на $ab^2 + b + 7$.

5. (Україна, автор — В.А.Ясінський, м. Вінниця) Нехай I — це центр кола, вписаного в трикутник ABC. Позначимо через K, L, M точки, в яких це коло дотикається до сторін BC, CA, AB відповідно. Пряма, що проходить через точку B паралельно прямій MK, перетинає прямі LM та LK в точках R та S відповідно. Довести, що кут $\angle RIS$ — гострий.

6. (Болгарія) Розглянемо всі функції f, що визначені на множині всіх натуральних чисел та приймають натуральні значення і задовольняють умову:

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2$$

для всіх натуральних s та t. Знайти найменше можливе значення $f(1998)$.

Розв'язання задач

1. Нехай діагоналі AC та BD перетинаються в точці E. Не втрачаючи загальності, вважаємо, що точка P належить $\triangle ABE$. Позначимо через M та N основи перпендикулярів, проведених з P до AC та BD відповідно. Позначаючи далі через $[\mathcal{P}]$ площу многокутника $\mathcal{P}$, маємо:

$$2[ABP] = 2[ABE] - 2[PAE] - 2[PBE] = (AM + PN)(BN + PM) -$$
$$(AM + PN)PM - (BN + PM)PN = AM \cdot BN - PM \cdot PN,$$
$$2[CDP] = 2[CDE] + 2[PCE] + 2[PDE] = (CM - PN)(DN - PM) +$$
$$(CM - PN)PM + (DN - PM)PN = CM \cdot DN - PM \cdot PN.$$

Тому

$$2([ABP] - [CDP]) = AM \cdot BN - CM \cdot DN. \qquad (*)$$

З умови випливає, що $PA = PB$ та $PC = PD$. Нехай чотирикутник $ABCD$ є вписаним. Тоді P є центром його описаного кола, M та N — середини відрізків AC та BD відповідно. З рівностей $AM = CM$, $BN = DN$ та (*) випливає, що $[ABP] = [CDP]$.

Тепер нехай $[ABP] = [CDP]$. Тоді із (*) ми маємо, що $AM \cdot BN = CM \cdot DN$. Припустимо, що $PA \neq PC$, і для визначеності вважаємо $PA > PC$. Тоді $AM > CM$ та $BN > DN$, оскільки $PB > PD$. Звідси $AM \cdot BN > CM \cdot DN$, ми маємо суперечність. Отже, $PA = PC$, точка P є рівновіддаленою від A, B, C та D і є центром описаного кола нашого чотирикутника.

2. Оскільки існують C_b^2 різних пар суддів, і в кожній парі не більше k співпадінь оцінок, загальна кількість співпадінь не перевищує kC_b^2.

Для $1 \leq i \leq a$, нехай i-й учасник отримав незадовільну оцінку в x_i суддів та задовільну — в y_i суддів, тут $x_i + y_i = b$. Тоді кількість пар суддів, які виставили однакові оцінки цьому учаснику, дорівнює

$$C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2 = \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \geq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - b\right] = \frac{1}{4}[(b-1)^2 - 1].$$

Оскільки b — непарне, за нижню оцінку тут може бути взяте $\frac{1}{4}(b-1)^2$.

Розглядаючи загальну кількість співпадінь, отримуємо:

$$kC_b^2 \geq \sum_{i=1}^{a}\left[C_{x_i}^2 + C_{y_i}^2\right] \geq \frac{a(b-1)^2}{4}.$$

Записавши C_b^2 як $b(b-1)/2$, отримаємо потрібну нерівність.

3. Для взаємно простих натуральних чисел a та b буде $d(ab) = d(a)d(b)$. Нехай $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_t^{m_t}$, де $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — різні прості числа. Тоді $d(n) = (m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_t+1)$, $d(n^2) = (2m_1+1)(2m_2+1)\cdots(2m_t+1)$. Звідси випливає, що $d(n^2)$ є обов'язково непарним, тому умову задачі можуть задовольняти лише непарні k. Тепер ми доведемо, що такими є всі непарні числа. Для цього досить показати, що

$$k = \frac{2m_1+1}{m_1+1} \cdot \frac{2m_2+1}{m_2+1} \cdots \frac{2m_t+1}{m_t+1}$$

для деяких натуральних чисел $m_1, m_2, \ldots, m_t$.

Ми використаємо індукцію по k. Доведемо твердження: якщо число x задовольняє умову, то таким буде і $2^m x - 1$ для всіх $m \geq 1$. Нехай ℓ є таким, що $\dfrac{d(\ell^2)}{d(\ell)} = x$. Для $m = 1$ візьмемо $n = p^{x-1}\ell$ де p — просте число, що не є дільником ℓ. Тоді $\dfrac{d(n^2)}{d(n)} = \dfrac{2x-1}{x} \cdot x = 2x - 1$. Для $m > 1$ візьмемо

$$n = p_1^{2^{m-1}3x-2}p_2^{2^{m-2}3^2x-2}\cdots p_{m-1}^{2\cdot 3^{m-1}x-2}p_m^{3^{m-1}x-1}\ell,$$

де $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — довільні прості числа, на які не ділиться ℓ. В цьому випадку

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2^m 3x - 3}{2^{m-1}3x - 1} \cdot \frac{2^{m-1}3^2x - 3}{2^{m-2}3^2x - 1} \cdots \frac{2^2 3^{m-1}x - 3}{2\cdot 3^{m-1}x - 1} \cdot \frac{2\cdot 3^{m-1}x - 1}{3^{m-1}x} \cdot x = 2^m x - 1.$$

Наше твердження доведено.

Тепер покажемо, що кожне непарне число задовольняє умову задачі. Число 1 є таким, оскільки $\dfrac{d(1^2)}{d(1)} = 1$. Для довільного непарного числа $k > 1$, ми можемо записати $k+1=2^m x$, де $x<k$ — непарне. Оскільки число x задовольняє умову, таким буде і $k=2^m x-1$.

4. Якщо a^2b+a+b ділиться на ab^2+b+7, то таку подільність має і число $b(a^2b+a+b)-a(ab^2+b+7)=b^2-7a$.

Оскільки $a\geq 1$, ми маємо $b^2-7a<ab^2+b+7$. Тому, якщо $b^2-7a\geq 0$, то $b^2-7a=0$. Тоді b ділиться на 7, і $(a,b)=(7c^2,7c)$ для деякого натурального числа c. Легко переконатись, що кожна така пара задовольняє умову.

Нехай $b^2-7a<0$. Тоді $7a-b^2$ ділиться на ab^2+b+7, $0<7a-b^2<7a$. Це можливе лише тільки для $b=1$ або $b=2$, оскільки інакше $ab^2+b+7>9a$.

Для $b=1$, ми отримуємо, що $7a-1$ повинне ділитись на $a+8$. Маємо $7a-1=7(a+8)-57$, $57=1\cdot 57=3\cdot 19$, звідки можливими є тільки $a=11$ або $a=49$. Перевірка показує, що (11, 1) та (49, 1) задовольняють умову.

Для $b=2$ $7a-4$ повинне ділитись на $4a+9$. Оскільки $4(7a-4)=7(4a+9)-79$, та 79 не має дільників вигляду $4a+9$, в цьому випадку немає розв'язків.

Відповідь: $(a,b)=(7c^2,7c)$, $c=1,2,\ldots$, та $(a,b)=(11,1)$, $(a,b)=(49,1)$.

5. Оскільки прямі MK та RS паралельні, в $\triangle BMR$, ми маємо:

$$\angle BMR=90^\circ-\angle A/2,\quad \angle MBR=90^\circ-\angle B/2,\quad \angle BRM=90^\circ-\angle C/2.$$

Звідси, за теоремою синусів

$$BR=\frac{\cos(\angle A/2)}{\cos(\angle C/2)}\cdot BM. \tag{1}$$

Аналогічно, в $\triangle BKS$ ми маємо

$$\angle BKS=90^\circ-\angle C/2,\quad \angle BSK=90^\circ-\angle A/2,\quad \angle KBS=90^\circ-\angle B/2,$$

звідки

$$BS=\frac{\cos(\angle C/2)}{\cos(\angle A/2)}\cdot BK=\frac{\cos(\angle C/2)}{\cos(\angle A/2)}\cdot BM. \tag{2}$$

Відмітимо, що $BI\perp RS$ та $IM\perp AB$. Тоді, враховуючи (1) та (2), отримуємо

$$IR^2+IS^2-RS^2=\left(BI^2+BR^2\right)+\left(BI^2+BS^2\right)-(BR+BS)^2=$$
$$2\left(BI^2-BR\cdot BS\right)=2\left(BI^2-BM^2\right)=2IM^2>0.$$

З теореми косинусів випливає, що кут $\angle RIS$ є гострим.

6. Позначимо через S множину функцій, що задовольняють умову задачі. Нехай f — одна з них, і позначимо $f(1)=a$. Поклавши в рівності з умови $t=1$ та $s=1$, ми отримаємо:

$$f\left(f(s)\right)=a^2s,\quad f(at^2)=[f(t)]^2\quad \text{для всіх } s,t\in\mathbf{N}.$$

Далі маємо:

$$[f(s)f(t)]^2=[f(s)]^2 f(at^2)=f\left(s^2f\left(f(at^2)\right)\right)$$
$$=f(s^2a^2at^2)=f\left(a(ast)^2\right)=[f(ast)]^2.$$

Звідси випливає, що $f(ast)=f(s)f(t)$ для всіх s,t, зокрема, $f(as)=af(s)$, і тому

$$af(st)=f(s)f(t)\quad \text{для всіх } s,t\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

Тепер доведемо, що $f(t)$ ділиться на a для всіх $t\in\mathbf{N}$. Для простого числа p позначимо через p^α та p^β найбільші степені p, на які діляться a та $f(t)$ відповідно.

Стандартними міркуваннями за індукцією з (1) легко вивести, що $[f(t)]^k = a^{k-1}f(t^k)$ для всіх $k \in \mathbf{N}$. Найбільшим степінь p, на який ділиться $[f(t)]^k$ є $p^{k\beta}$, на який ділиться $a^{k-1} - p^{(k-1)\alpha}$. Тому $k\beta \geq (k-1)\alpha$ для всіх $k \in \mathbf{N}$, що є можливим тільки при $\beta \geq \alpha$. Це має місце для кожного простого числа p, і тому $f(t)$ ділиться на a.

Покладемо тепер $g(t) = f(t)/a$, отримавши нову функцію g з $\mathbf{N}$ в себе. Результати, отримані для f, переписуються слідуючим чином:

$$g(a) = a, \; g(st) = g(s)g(t), \; g(g(s)) = s \quad \text{для всіх } s, t \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Тут, фактично, $g(st) = g(s)g(t)$ є еквівалентним (1), та $g(g(s)) = s$ випливає з того, що

$$\begin{aligned} ag(g(s)) &= g(a)g(g(s)) = g(ag(s)) = g(f(s)) \\ &= \frac{f(f(s))}{a} = \frac{a^2 s}{a} = as. \end{aligned}$$

З (2) ми отримуємо, що $g(t^2 g(s)) = g(t^2)g(g(s)) = s[g(t)]^2$ для всіх $s, t \in \mathbf{N}$. Значить, g також є функцією з S та її значення не перевищують відповідні значення f. Тому ми можемо розглядати лише функції g, що задовольняють (2).

Тепер відмітимо той важливий факт, що значення такої функції g від простого числа саме є простим числом. Дійсно, нехай p — просте число, і $g(p) = uv$ для деяких натуральних u, v. Тоді з (2) маємо,що $p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$, тому одне з чисел $g(u)$ або $g(v)$ дорівнює 1. Якщо, наприклад, $g(u) = 1$, то обов'язково $u = g(g(u)) = g(1) = 1$, звідки випливає, що число $g(p)$ просте.

Щоб визначити потрібне найменше значення, візьмемо довільну g, що задовольняє (2). Така функція є взаємно однозначною (з того, що $g(s) = g(t)$, випливає $s = g(g(s)) = g(g(t)) = t$), і тому відображає різні прості числа в різні. Тому нижню границю значення $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)[g(3)]^3 g(37)$ ми отримуємо, коли $g(2), g(3), g(37)$ є трьома найменшими простими числами $2, 3, 5$, причому $g(3) = 2$. Значить, $g(1998) \geq 3 \cdot 2^3 \cdot 5 = 120$ для всіх $g \in S$.

З іншого боку, існує функція $g \in S$ з $g(1998) = 120$. Покладемо $g(1) = 1$, та визначимо g на простих числах слідуючим чином: $g(2) = 3$, $g(3) = 2$, $g(5) = 37$, $g(37) = 5$ та $g(p) = p$ для всіх простих $p \neq 2, 3, 5, 37$. Для довільного $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \in \mathbf{N}$ візьмемо $g(n) = g(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = g(p_1)^{\alpha_1} g(p_2)^{\alpha_2} \cdots g(p_k)^{\alpha_k}$. Рівності в (2) виконуються (для $a = 1$), тому $g \in S$. Також $g(1998) = 120$.

Відповідь: 120.

Зміст