Конкурс-захист -2012

Контрольна робота з математики

відділення економіки та технічних наук

<u>9 клас.</u>

1 рівень.

1. Швидкість руху човна за течією річки дорівнює 16 км/год, а проти 14 км/год. Знайдіть швидкість течії.

<u>*Відповідь:*</u> 1 км/год.

▼

$$+\begin{cases} V_Ч + V_T = 16, \\ V_Ч - V_T = 14. \end{cases} \Rightarrow V_Ч = 15 км/год,\ V_T = 1 км/год$$

▲

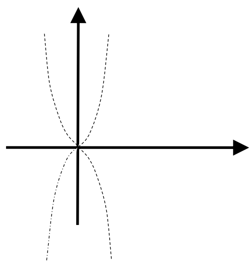
2. Обчисліть $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{17}+2\sqrt{3}\right)$.

▼ <u>*Відповідь:*</u> -5.

▲

3. Побудуйте графік функції $y = 2x - x^2$.

▼ <u>*Розв'язок:*</u>



$$y = 2x - x^2 = -\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) = -\left(x-1\right)^2 + 1.$$

$$y_1 = x^2 \Rightarrow y_2 = \left(x-1\right)^2 = y_1\left(x-1\right) \Rightarrow$$

$$y_3 = -\left(x-1\right)^2 = -y_2 \Rightarrow y_4 = y_3 + 1$$

▲

2 рівень.

1. Знайдіть всі тризначні числа, які зменшуються в п'ять разів після ви креслення першої цифри.

▼ <u>*Розв'язок:*</u>

$$\overline{abc} \vdots 5 = \overline{bc} \Rightarrow a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c = 5\left(b \cdot 10 + c\right) \Rightarrow 25a = 10b + c \Rightarrow c \in \{0;5\}$$

$$1)\,нехай\ c = 5 \Rightarrow 25a = 10b + 5 \Rightarrow 5a = 2b + 1 \Rightarrow (a;b) \in \{(1;2),(3;7)\}.$$

$$2)\,нехай\ c = 0 \Rightarrow 25a = 10b \Rightarrow 5a = 2b \Rightarrow (a;b) \in \{(2;5)\}.$$

▲ <u>*Відповідь:*</u>. $\overline{abc} \in \{125;\ 250;\ 375\}$

2. На сторонах BC і AD трапеції $ABBC, \left(BC \| AD\right)$ вибрано такі точки M і N відповідно так, що $MC = 3MB,\ ND = 3AN$. Чому дорівнює площа фігури $ABMN$, якщо відомо, що площа трапеції $ABCD$ дорівнює S.

▼ <u>*Розв'язок:*</u>

$$S = S_{ABCD} = \frac{4x+4y}{2}h = 4\left(\frac{x+y}{2}h\right) = 4S_{ABMN}. \Rightarrow S_{ABMN} = \frac{1}{4}S$$

▲ <u>*Відповідь:*</u>. $S_{ABMN} = \frac{1}{4}S$.

3 рівень.

1. Знайдіть всі значення параметра a при яких рівняння $x^2-4ax+1-2a+4a^2=0$ має два корені кожний з яких більше 1.

▼ *Розв'язок:*

$$x^2-4ax+1-2a+4a^2=0 \Rightarrow (x-2a)^2=2a-1$$

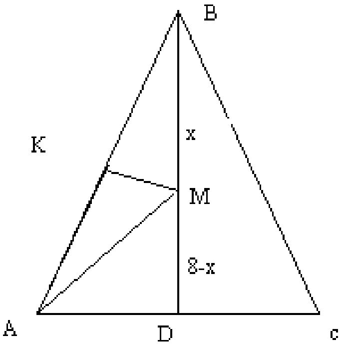
$$y_1=(x-2a)^2;\, y_2=2a-1,\ якщо\, x=1,\ то\ y_1=(1-2a)^2$$

Графік прямої $y_2=2a-1$ перетинає графік параболи в двох точках, при умові коли точки перетину більше 1. Тоді $0<y_2=2a-1<(1-2a)^2 \Rightarrow a>1$.

▲ *Відповідь:*. $a>1$.

2. В трикутнику ABC $AB=BC,\ BD\perp AC,\ AC=12ñì$, $BD=8ñì$. Через середину сторони AB точку K проведено перпендикуляр, який перетинає BD в точці M ($KM\perp AB$). Знайдіть довжину відрізка MD.

▼ *Розв'язок:*



$$AB=\sqrt{8^2+6^2}=10 \Rightarrow AK=KB=5.$$

З $\Delta AMD \Rightarrow AB=\sqrt{6^2+(8-x)^2}$.

Тоді з

$$\Delta KMA \Rightarrow KM=\sqrt{AM^2-AK^2}=\sqrt{6^2+(8-x)^2-5^2}.$$

$$\Delta BKM \Rightarrow KM=\sqrt{BM^2-BK^2}=\sqrt{x^2-5^2}.$$

$$\sqrt{6^2+(8-x)^2-5^2}=\sqrt{x^2-5^2} \Rightarrow x=\frac{25}{4} \Rightarrow$$

$$MD=8-x=\frac{7}{4}$$

▲ *Відповідь:*. $MD=\frac{7}{4}$.

Контрольна робота з математики

відділення математики та комп'ютерних наук

9 клас.

1 рівень.

1. Доведіть, що значення виразу $11^4+14^4-13^3$ кратне 10.

▼ ***Розв'язання**:*

$$11^4+14^4-13^3=\ldots1+\ldots6-\ldots7=\ldots0\,\vdots\,10$$

▲

2. Для кожного значення *a* розв'яжіть рівняння: $\dfrac{(x-4)(x+2)}{x-a}=0$

▼ ***Розв'язання**:*

$ОДЗ: x\neq a$

$x_1=4, x_2=-2$

При a=4   x=-2

При a=-2   x=4

При $a\neq 4$ і $a\neq -2$ $x_1=4$ $x_2=-2$

▲

3. Порівняйте, яке з чисел більше: $\sqrt{2012}+\sqrt{2013}$ і $\sqrt{2011}+\sqrt{2014}$.

▼

Оскільки обидва числа додатні, то достатньо порівняти їх квадрати:

$$(\sqrt{2012}+\sqrt{2013})^2=2012+2013+2\sqrt{2012\cdot2013}=4025+2\sqrt{(2000+12)(2000+13)}=$$

$$=4025+2\sqrt{2000^2+25\cdot2000+12\cdot13}=4025+2\sqrt{2000^2+25\cdot2000+156}$$

більше, ніж

$$\left(\sqrt{2011}+\sqrt{2014}\right)^2=2011+2014+2\sqrt{2011\cdot2014}=4025+2\sqrt{(2000+11)(2000+14)}=$$

$$=4025+2\sqrt{2000^2+25\cdot2000+11\cdot14}=4025+2\sqrt{2000^2+25\cdot2000+154}$$

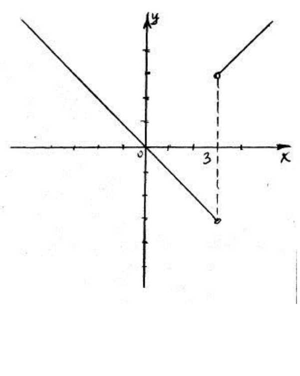
або !!!!! $(n+1)(n+2)>n(n+3)\Rightarrow\sqrt{2012\cdot2013}>\sqrt{2011\cdot2014}$

▲

2 рівень.

1. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{x(x-3)}{|x-3|}$.

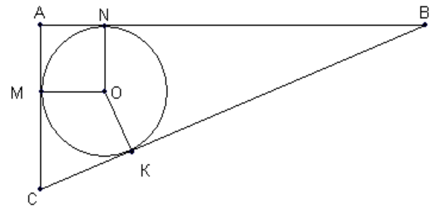
$$y=\frac{x(x-3)}{|x-3|}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3>0;\\ y=x;\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0;\\ y=-x.\end{cases}\end{array}\right.\quad D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$$



▲

2. Точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу прямокутного трикутника на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

▼



Якщо позначити відрізок СК за х, то ВК = х + 14.
Радіус кола ОК = ОМ = ON =4.
Тоді АС = х+4, АВ = х+18, ВС = 2х+14. За теоремою Піфагора: $(x+4)^2+(x+18)^2=(2x+14)^2$, звідки $x=-12$, або $x=6$. Перший корінь не підходить за змістом. Тоді АС = 10см, АВ=24см , а $S_\Delta=\frac{1}{2}AB\cdot AC=120см^2$.

▲Відповідь: $120см^2$.

3 рівень.

1. Розв'язати рівняння: $\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+3\right)=-6$.

▼ $\left(\sqrt{x^2+3x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3x}+3\right)=-6$. Нехай $\sqrt{x^2+3x}=t$, тоді $(t-2)\cdot(t+3)+6=0$,

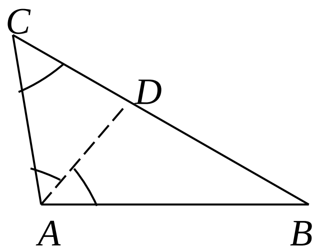
$t^2+t=0$ $\left[\begin{array}{l} t=0; \\ t=-1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+3x}=0; \\ \sqrt{x^2+3x}=-1. \end{array}\right.$ Друге рівняння не має коренів, тобто

$x^2+3x=0$, $x=0;\quad x=-3$.

▲ **Відповідь:** -3; 0.

2. У трикутнику ABC AD – бісектриса $\angle BAC$, виявилось, що ΔADC – рівнобедрений з вершиною D, стороною $CD=36$ та $BD=64$. Знайдіть довжини сторін ΔABC.

▼



Розв'язання. Очевидно, що $BC=100$. Оскільки $\angle BAD=\angle DAC=\angle ACB$, то $\Delta ABD\sim\Delta ABC$ $\Rightarrow$ $\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{AB}$ $\Rightarrow$ $AB=\sqrt{BD\cdot BC}=80$. Далі знову з цих рівностей маємо, що $AC=\frac{AD\cdot AB}{BD}=45$.

Відповідь: $BC=100,\ AB=80,\ AC=45$.

▲

Контрольна робота з математики
відділення економіки та технічних наук
10 клас.

1 рівень.

1. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

▼ *Відповідь:* $x \in (-3;3)$.

2. Знайти три перших члени арифметичної прогресії, у якої сума будь - якого числа членів дорівнює потроєному квадрату цього числа.

▼ *Відповідь:* -5.

Нехай невідомі перші три члени арифметичної прогресії будуть $a_1,\ a_2,\ a_3$. За умовою $S_n = 3n^2$. При $n = 1 \Rightarrow a_1 = 3$, а оскільки $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ і $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$, то $\dfrac{6 + d \cdot 1}{2} = 6 \Rightarrow d = 6$, $a_2 = 9,\ a_3 = 15$.

3. В січні завод перевиконав план на 10%, а в лютому перевиконав січневий випуск продукції на 6%. На скільки відсотків завод перевиконав двомісячний план випуску продукції.

▼ *Відповідь:*.13,3 %.

2 рівень.

1. Знайти висоту правильної трикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює стороні основи, а об'єм дорівнює $18\sqrt{2}$.

▼ *Відповідь:*.

Позначимо *a* – сторону основи піраміди, тоді висота основи $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, площа основи дорівнює $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, радіус вписаного кола дорівнює дві треті висоти, тоді за теоремою Піфагора дістанемо висоту піраміди $H = \sqrt{a^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. З формули об'єму піраміди вийде $a = 6,$ тому $H = 2\sqrt{6}$.

2. Розв'язати рівняння $(x-2)(x-3)(x-4)(x-6) = 30x^2$.

$(x^2-8x+12)(x^2-7x+12)=30x^2$ поділимо рівняння на $x^2\neq 0$ (x=0 – не є коренем рівняння). $\left(x-8+\frac{12}{x}\right)\left(x-7+\frac{12}{x}\right)=30$. Зробимо заміну

$x+\frac{12}{x}=t \Rightarrow (t-8)(t-7)=30 \Rightarrow t\in\{2;13\}$. Маємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l} x+\frac{12}{x}=2; \\ x+\frac{12}{x}=13 \end{array}\right.$

▼ *Відповідь:*.
$x\in\{1;12\}$

3 рівень.

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{4}{x-y}+\frac{3}{x+y}=7, \\ \frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=2 \end{cases}$

▼

Позначимо $\frac{1}{x+y}=u;\ \frac{1}{x-y}=v \Rightarrow \begin{cases} 4v+3u=7, \\ v+u=2 \end{cases} \Rightarrow v=1;\ u=1 \Rightarrow x=1,\ \ y=0$

Відповідь: $x=1,\ \ y=0$

2. Скільки розв'язків має рівняння $|2x+2|-|x-1|-|x|=a$ в залежності від параметра *a*?

▼

Відповідь:.при a<3 – рівняння має єдиний розв'язок, при $a\geq 3$ – рівняння має безліч розв'язків,

Контрольна робота з математики
відділення економіки та технічних наук

11 клас.
1 рівень.

1. Розв’яжіть нерівність: $\dfrac{3}{1+|x+3|}<1$.

ОДЗ $: x\in R$.

▼ *Розв’язок:* *так як* $1+|x+3|>0 \Rightarrow 3<1+|x+3| \Rightarrow |x+3|>2 \Rightarrow \begin{cases} 1)\ x\ge -3 \Rightarrow x>-1; \\ 2)\ x<-3 \Rightarrow x<-5. \end{cases}$

▲ *Відповідь:*. $x\in(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$.

2. У простому двоцифровому числі цифра одиниць на 2 більша за цифру десятків. Якщо до цього числа додати 9, то одержана сума буде більшою за 50, але меншою від 97. Знайти це число.

▼ Нехай задане число $\overline{ab}=10a+b$, якщо $b=a+2$, то $\overline{ab}=10a+a+2=11a+2$, $50<11a+2+9<97$, $39<11a<86$, тоді $a=4;5;6;7$, $b=6;7;8;9$.

Серед чисел 46, 57, 68, 79 тільки 79 є простим.

▼ *Відповідь:*.79.

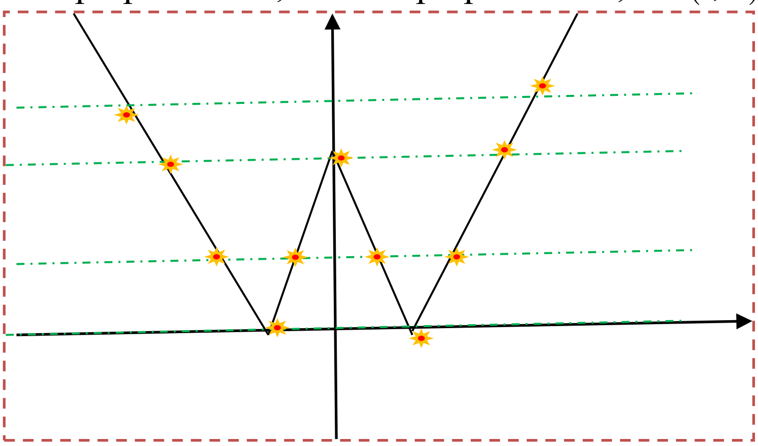
3. За планом кожного місяця бригада повинна випускати k одиниць продукції. В січні бригада перевиконала план на 20%, а в лютому випустила 540 одиниць продукції, що на 50% більше, ніж в січні. Знайдіть значення k.

▼ *Відповідь:*.300

2 рівень.

1. Знайдіть кількість розв’язків рівняння $|2|x|-5|=a$ в залежності від значень параметра *a*.

▼ Якщо $a\in(-\infty;0)$ розв’язків немає, при $a=0$ - два розв’язки, коли $a\in(0,5)$ - чотири розв’язки, $a=5$ - три розв’язки, $a\in(5,\infty)$ - два розв’язки.



2. Розв'яжіть нерівність $(x-2012)\sqrt{x^2-2011} \le 0$.

▼ Задана нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2-2011=0; \\ \begin{cases} x-2012<0, \\ x^2-2011>0 \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь:. $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2011}\right] \cup \left[\sqrt{2011}, 2012\right]$

3 рівень.

1. Обчислити $\dfrac{a^4+a^3+a^2+9}{a^5-a^2-a+6}$, якщо $a^3+a-1=0$.

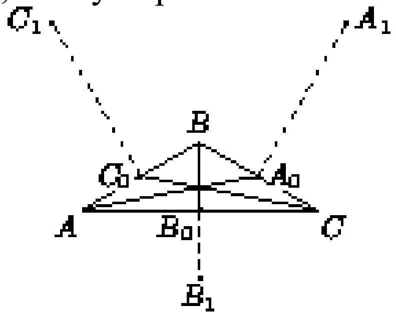
▼ $a^4+a^3+a^2+9=a^4+a^2-a+a^3+a-1+10=a(a^3+a-1)+(a^3+a-1)+10=10$;
$a^5-a^2-a+6=a^5+a^3-a^2-a^3-a+1+5=a^2(a^3+a-1)-(a^3+a-1)+5=5$. Отже, значення записаного дробу дорівнює 2.

▲ *Відповідь:*. 2.

1. Медіану AA_0 трикутника ABC відклали від точки A_0 перпендикулярно стороні BC з зовнішньої сторони трикутника. Позначимо другий кінець побудованого відрізка через A_1. Аналогічно побудуємо точки B_1 та C_1. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо кути трикутника ABC рівні 30^o, 30^o та 120^o.

▼ *Розв'язання*

$\Delta\ A_1B_1C_1$ – рівносторонній, всі кути рівні 60^o.



Так як $\Delta\ ABC$ рівнобедрений, то BB_0 – серединний перпендикуляр до основи AC. Тоді B_1 лежить на цьому перпендикулярі и $CB_0 \perp BB_1$.

В $\Delta\ BCB_1$ точка B_0– основа висоти та медіані на стороні BB_1, отже $BC=B_1C$, $\angle B_1BC=\frac{1}{2}\angle ABC=60^o$. Тоді, $\Delta\ B_1BC$– рівносторонній, а A_0, є основою висоти в трикутнику B_1BC , тому що є серединою сторони BC. Таким чином отримаємо, що точки A_1 і B_1 лежать на серединному перпендикулярі до відрізка BC. Аналогічно, C_1 і B_1 лежать на серединному перпендикулярі до відрізка AB. Отже, $\angle C_1B_1A_1=180^o-\angle ABC=60^o$, $B_1A_1=B_1A_0+A_0A_1=B_1A_0+A_0A=B_1C_0+C_0C=B_1C_0+C_0C_1=B_1C_1$, т.е. $\Delta\ A_1B_1C_1$ – рівнобедрений з кутом при вершині 60^o.

Контрольна робота з математики

відділення математики та комп'ютерних наук

10 клас.

1 рівень.

1. Знайдіть область визначення функції $y=\dfrac{4}{\sqrt{16-x^2}}$.

▼ *Відповідь:*. $x\in(-4;4)$

2. Спростіть вираз $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

▼

Всі підкореневі вирази більше нуля, так як $2>\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, піднесемо до квадрату: $2>\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$, піднесемо до квадрату ще раз: $2>\sqrt{3}\cdot$.

Добуток третього і четвертого множників дорівнює:

$\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Тепер помножимо отриманий вираз на другий множник отримаємо: $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ та помноживши на перший співмножник маємо $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=1$.

▼ *Відповідь:*1.

3. Обчисліть значення виразу $\sqrt[3]{\dfrac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+\ldots+n\cdot2n\cdot4n}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+\ldots+n\cdot3n\cdot9n}}$ для $n=2012$.

▼ $\sqrt[3]{\dfrac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+\ldots+n\cdot2n\cdot4n}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+\ldots+n\cdot3n\cdot9n}}=\sqrt[3]{\dfrac{8\cdot(1\cdot+\cdot8+\ldots+n^3)}{27\cdot(1\cdot+\cdot8+\ldots+n^3)}}=\dfrac{2}{3}$

Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

2 рівень.

1. Розв’яжіть рівняння $\sin^2 x\cdot\sin 2x+\cos^2 x\cdot\cos 2x=\dfrac{1}{2}$.

Вказівка: спочатку використати формули зниження степеня $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$, а потім способом групування розкласти на множники.

▼ *Відповідь:*. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; $-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

2. Розв’яжіть у натуральних числах рівняння:

$$\frac{2}{x^2}+\frac{3}{xy}+\frac{4}{y^2}=1.$$

▼ *Відповідь:*. $x=y=3$.

Розв’язання. З умов $\frac{2}{x^2}<1$ та $\frac{4}{y^2}<1$ маємо, що $x\geq2$, а $y\geq3$.

Якщо $x=2$, дістаємо рівняння для y: $\frac{2}{4}+\frac{3}{2y}+\frac{4}{y^2}=1 \Rightarrow y^2-3y-8=0$. Це рівняння не має натуральних коренів.

Якщо $x=y=3$, рівність справджується: $\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=1$.

Якщо $x=3$, а $y>3$, або $x>3$ (y завжди не менший за 3), то можемо записати:

$$\frac{2}{x^2}+\frac{3}{xy}+\frac{4}{y^2}<\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\frac{4}{9}=1.$$

Таким чином, $x=y=3$ є єдиним розв'язком рівняння в натуральних числах.

Інший варіант (більш олімпіадний?):

Доведемо, що $x=y$:

Нехай $x>y$, тоді $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}\Rightarrow 1<\frac{9}{y^2}\Rightarrow y<3, \textit{що,очевидно,неможливо}$

нехай $x<y$, тоді $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}\Rightarrow 1>\frac{9}{y^2}\Rightarrow x>y>3, \textit{що,очевидно,неможливо}$,

оскільки, у цьому випадку, ліва частина менше за 1.

3 рівень.

1. Знайдіть всі значення параметра a такі, що фігура на координатній площині, задана умовою $|x|+|y-a|\le 2$, в перетині з прямою $y=2012$ дає відрізок довжини більшої 2.

▼ *Відповідь:*.

Дана фігура є квадрат з центром в точці $(0;a)$ і діагоналями довжини 4, паралельними координатним осям з цього випливає, що пряма $y=2012$ повинна бути віддалена від центра квадрата не більше ніж два, тому $|a-2012|<2$.

2. Точка E — середина сторони CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що якщо $2S_{ABE}=S_{ABCD}$, то $ABCD$ — трапеція або паралелограм.

▼ ***Розв'язання.*** Нехай A' — точка, що симетрична до точки A відносно точки E (рис. 1). З рівності трикутників DEA та CEA' маємо:

3. $S_{BCE}+S_{CEA'}=S_{BCE}+S_{DEA}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

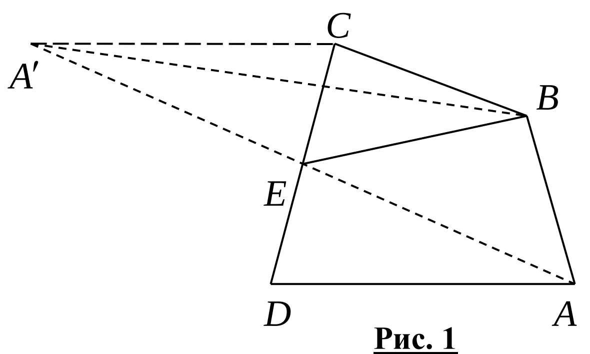


Рис. 1

Оскільки площі трикутників BEA і BEA' рівні (трикутники мають однакові основи $AE=A'E$ і спільну висоту), $S_{BEA'}=S_{BEA}=\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{BCE}+S_{CEA'}$. А це, своєю чергою, можливо лише за умови, що $C\in A'B$. $A'C \parallel AD$, позаяк $\angle DAE=\angle EA'C$, а отже й $BC\parallel AD$, тобто чотирикутник є паралелограмом або трапецією.

Контрольна робота з математики

Відділення математики та комп'ютерних наук

11 клас.

1 рівень.

1. Обчисліть значення виразу: $\frac{16\cdot 503^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}$.

▼ *Відповідь:* 4044119.

Розв'язання. Позначимо число $x=2011$, тоді заданий дріб можна подати у такому вигляді:

$$\frac{16\cdot 503^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}=\frac{(4\cdot 503)^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}=\frac{2012^2\cdot 2010^2-1}{2011^2}=\frac{(x+1)^2(x-1)^2-1}{x^2}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2-1}{x^2}=\frac{(x^2-2)\cdot x^2}{x^2}=x^2-2=2011^2-2=4044119$$

2. Розв'язати рівняння . $\frac{\left(\sqrt{-x}\right)^2+\sqrt{x^2}}{2x^2}=2012.$

▼ *Відповідь:*.

$$ОДЗ: x<0. \qquad \frac{-x+|x|}{2x^2}=2012\Rightarrow\frac{-x-x}{2x^2}=2012\Rightarrow x=-\frac{1}{2012}$$

3. При яких значеннях параметра a рівняння $(x-2012)(\sqrt{x}-a)=0$ має рівно два різних дійсних корені?

▼ *Відповідь:* для дійсних $a\ge 0$, окрім значення $\sqrt{2012}$.

Розв'язання. Легко обчислити, що це рівняння має корені: 2012 та a^2 при $a\ge 0$. Залишається прибрати випадки, коли вони співпадають. Це можливо лише коли $a=\sqrt{2012}$, звідки й маємо наведену відповідь.

2 рівень.

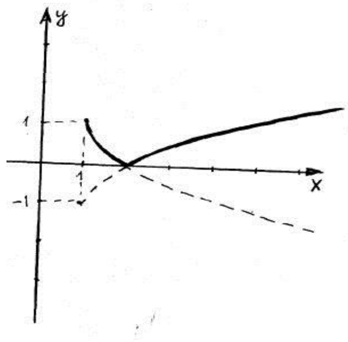
1. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

▼ *Відповідь:*.

$y=\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$. $D(y)=[1;+\infty)$.

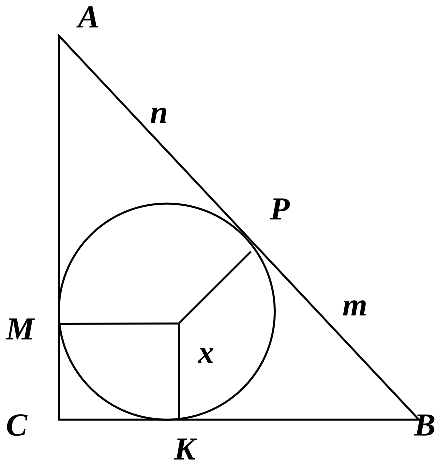
$\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}-1\right|=$

$$=\begin{cases}1-\sqrt{x-1}, якщо 1\le x\le 2;\\ \sqrt{x-1}-1, якщо x\ge 2.\end{cases}$$



2. Точка дотику вписаного в прямокутний

трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки ***m*** та ***n*** . Знайти площу цього трикутника.



Нехай радіус трикутника рівний x . За влстивостями дотичних і теоремою Піфагора матимемо:

$$(x+m)^2+(x+n)^2=(m+n)^2,$$

$$x^2+x(m+n)-mn=0.$$

$$S=\frac{1}{2}(x+m)(x+n)=\frac{1}{2}\left(x^2+x(m+n)+mn\right),$$

$$де \quad x^2+x(m+n)=mn,$$

$$S=mn.$$

3 рівень

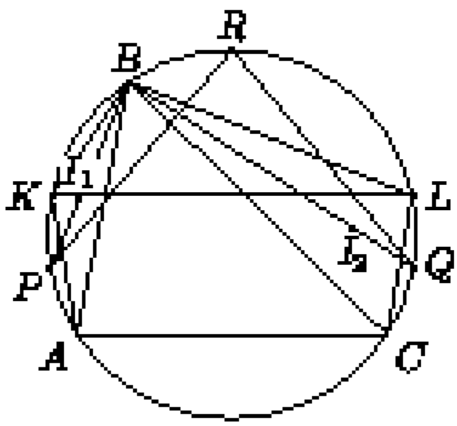
1. Розв'яжіть нерівність $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)\ldots(x^{2012}-1)\le 0$

▼ *Відповідь:*.

Рівняння $x^n-1=0$ має два корені 1 та -1, якщо *n* – парне, та один корінь 1, якщо *n* – непарне. Тому $x\in(-\infty;-1]\cup\{1\}$.

2. На дугах *AB* і *BC* кола, описаного навколо трикутника *ABC*, вибрані відповідно точки *K* та *L* так, що прямі *KL* і *AC* паралельні. Доведіть, що центри вписаних окружностей трикутників *ABK* та *CBL* рівновіддалені від середини дуги *ABC*.

▼ *Розв'язання:*.



Якщо припустити що *AB=BC*, то твердження задачі є очевидним.

Припустимо, що *AB<BC (див. рис.)* .

Позначимо через I_1, I_2 центри вписаних окружностей трикутників *AKB* та *CLB* відповідно, через *P*, *Q*–точки перетину прямих BI_1, BI_2 з описаною окружністю трикутника *ABC*, а через *R*– середину дуги *ABC* цієї окружності. Тоді *PA=QC* як хорди, що стягують половини рівних дуг.

Так як $\angle PAI_1=\angle PAK+\angle KAI_1=\angle PBK+\angle BAI_1=\angle ABI_1+\angle BAI_1=\angle AI_1P$, то трикутник AI_1P рівнобедрений, і $PA=PI_1$. Аналогічно $QC=QI_2$; тоді, $PI_1=QI_2$.

PR=QR як хорди, що стягують рівні дуги, а $\angle I_2QR=\angle I_1PR$ як кути, що спираються на одну дугу. Тоді трикутники RI_1P і RI_2Q рівні за двома сторонами та куту між ними, с цього випливає твердження задачі.