МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ молоді та спорту УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ
МАЛОЇ АКАДЕМІЇ А УКРАЇНИ

II етап Всеукраїнського конкурсу-захисту
науково-дослідницьких робіт

Відділення: математика
Секція: математики

Метод збурення: алгебраїчні рівняння

Роботу виконав:
Кутовий Анатолій Сергійович
учень 10 класу Морського ліцею

Науковий керівник:
Альперіна Тамара Давидівна – Заслужений вчитель України, вчитель-методист Морського ліцею
Майборода Валерій Антонович – викладач математики Морського ліцею.

Миколаїв – 2011

Зміст

Вступ 3

1. Застосування методу збурень для знаходження коренів рівняння. 5

2. Формальні наближення в невироджених випадку. 8

3. Формальне наближення в вироджених випадках 12

Висновки 15

Список використаних джерел 15

Вступ

Теорія збурень вперше виникла в рамках однієї з найстаріших галузей прикладної математики - небесної механіки. Починаючи з античних часів для опису руху планет застосовувалися різні математичні методи. Після відкриття закону всесвітнього тяжіння виявилося можливим описувати планетарні руху на основі фундаментальних фізичних законів. Якщо розглядати тільки Сонце і одну планету, то вона рухається по еліпсу у фокусі якого перебувати Сонце. Однак реально спостерігається декілька інший рух. Справа в тому, що кожна планета робить вплив на інші своїм гравітаційним полем і тому збурює, тобто змінює, їх руху. Теорія збурень у її первісному значенні пов'язана з розробкою різних способів обліку таких змін. Дослідник бере в основу аналізу незбурений рішення, яке відповідає еліптичному руху як початкове наближення, і потім відповідним чином коригує це рішення, обчислюючи сили, з якими планети впливають на незбурений рух один одного.

У справжні час завдання, які стоять перед теорією збурень, набагато ширше, ніж її застосування в небесній механіці, але основна ідея збереглася. Дослідження починається з незбуреною або породжує завдання, вирішення якої розглядається як наближення більш складного завдання, що відрізняється наявністю додаткових малих членів у рівняннях. Потім будуються такі наближення, уточнюючі це рішення, зазвичай у формі статечних рядів (або їх модифікацій). Роль змінної в таких статечних лавах грає мала величина, яка називається малим параметром. Зазвичай використовуються тільки часткові суми рядів (у більшості завдань два-три доданків).

Найпростіша задача, в якій можна застосувати теорію збурень - це задача про обчисленні коренів многочленів. Ця задача дозволяє проілюструвати багато важливі ідеї: описи сімейства збурень, вироджені і невироджені випадки, рівномірні і нерівномірні рішення, масштабування координат і параметрів. Задачу будемо розглядати як чисто математичну, ми не будемо повертатися до її фізичним джерел кожного завдання, а будемо обговорювати суто математичні труднощі, породжувані природою теорії збурень. При такому підході поліноміальні рівняння представляють собою ідеальний об'єкт для вивчення.

1. Застосування методу збурень для знаходження коренів рівняння.

Застосування методу збурень для знаходження коренів продемонструємо на такому рівнянні:

$$0{,}98x^3 + 8{,}94x^2 + 23{,}02x + 15 = 0 \qquad (1)$$

Звичайно, це рівняння можна вирішити точно. Тим не менше ми опишемо підхід, заснований на методі збурень, відповідно до якого слід виконати програму дій, що складається з чотирьох кроків.

1. По-перше, зауважимо, що, оскільки $0{,}98 = 1 - 0{,}02$, $8{,}94 = 9 - 0{,}06$ і $23{,}02 = 23 + 0{,}02$ рівняння (1) майже те саме, що рівняння $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$ або $(x+5)(x+3)(x+1) = 0$ розв’язком якого є числа $x_1 = -5, x_2 = -3, x_3 = -1$

На другому кроці створюється сімейство завдань, що зв'язує легко вирішувати рівняння з вже відомими корінням і початкове рівняння (1) це можна зробити позначивши через малий параметр ε малу величину 0,02, так що $0{,}98 = 1 - \varepsilon;\ 8{,}94 = 9 - 3\varepsilon;\ 23{,}02 = 23 + \varepsilon$. Тоді рівняння (1) можна переписати таким чином:

$$(1-\varepsilon)x^3 + (9 - 3\varepsilon)x^2 + (23 + \varepsilon)x + 15 = 0 \qquad (2)$$

Якщо дозволити ε змінюватися, то одне рівняння (2) перетворитися на сімейство рівнянь, причому кожному значенню ε відповідає одне рівняння. Якщо $\varepsilon = 0$, то (2) зводитися до вже розв’язаного рівняння; якщо $\varepsilon = 0{,}02$, то маємо вихідне рівняння (1). Рівняння (2) дає приклад сімейства збурень, тобто сімейства завдань, що залежать від малого параметра ε, легко вирішуються при $\varepsilon = 0$

Третій крок полягає в знаходженні наближених рішень сімейства рівнянь (2) у вигляді многочленів (усічених статечних рядів), роль змінної відіграє малий параметр ε. Метод знаходження буде описаний у наступному розділі. Для розглянутого прикладу цілком придатними будуть наближені рішення

$$x^{(1)} \cong -5 + \frac{14}{15}\varepsilon + \frac{28}{25}\varepsilon^2$$

$$x^{(2)} \cong -3 - \frac{3}{22}\varepsilon - \frac{15}{144}\varepsilon^2 \qquad (3)$$

$$x^{(3)} \cong -1 + \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{21}{256}\varepsilon^2$$

Вважаючи в цих формулах $\varepsilon = 0{,}02$, отримаємо наближені рішення вихідного рівняння (1):

$$x^{(1)} \cong -4{,}9808853\; x^{(2)} \cong -3{,}0027686\; x^{(3)} \cong -0{,}9924671$$

На четвертому кроці слід, наскільки це можливо, оцінити помилку отриманого наближення. Цим питанням ми не будемо займатися в цій роботі.

Навіть цей простий приклад дає гарне уявлення про теорії збурень. Перш за все метод може застосовуватися тільки тоді, коли вихідна задача близька до легко розв'язуваної задачі (до задачі, рішення якої відомо точно або може бути знайдено наближено якимось методом, не пов'язаним з теорією збурень). Довільно вибраного алгебраїчне рівняння не завжди може бути вирішено методом збурень, так як воно необов'язково виявиться близьким до рівняння корені якого легко визначити. Крім того, цей приклад показує, що застосування методу збурень дає рішення не тільки вихідної задачі (1), а й кожного рівняння сімейства (2), якщо тільки величина ε досить мала. Обурене рішення типу (3) справедливо в тому сенсі, що дає хороше наближення тільки для досить малих значень ε. Що означають слова «досить мале», неясно до тих пір, поки не зроблений четвертий крок (аналіз помилки наближення). Може виявитися, що $\varepsilon = 0{,}02$ недостатньо мало, щоб дати хороше рішення нашої задачі. Тоді ми не можемо вирішити вихідну завдання, але в той же час можемо отримати хороше рішення задачі (2) для менших значень малого параметра, наприклад при $\varepsilon = 0{,}002$. Крім того, формули (3) можуть давати прийнятне рішення при $\varepsilon = 0{,}2$ і навіть для значень параметра 1 або 10. Тут ми зіткнулися з відзнакою природи сімейств збурень від індивідуальних завдань. Зазвичай вважають, що в теорії збурень $0 < \varepsilon < 1$, так що $\varepsilon^2 < \varepsilon$. При такому припущенні вищі ступені малого параметра зменшуються, що дає інтуїтивне обґрунтування можливості знехтування досить високими ступенями, наприклад членами, які містять малий параметр в ступені вище другий у формулах типу (3). У той же час впливу членів типу ε^3 залежить і від коефіцієнтів при цих членах. Один з підходів до цього питання ґрунтується на обчисленні радіуса збіжності степеневого ряду, який може виявитися більше за одиницю, і припущення $\varepsilon < 1$ не є обов'язковим.

2. Формальні наближення в невироджених випадку.

Наближені рішення в прикладній математиці часто будуються на основі припущень і ґрунтується пізніше, якщо взагалі обґрунтовуються. Для опису такої процедури часто використовують слова «евристична» або «формальна». Вона називається евристичної, якщо заснована на інтуїції і вгадуванні виду рішення, і називається формальною якщо ґрунтується тільки на формі запису рівняння. Необхідно відзначити, що в математиці поняття «формальний» використовується і в протилежному сенсі, коли говорять про строгу обґрунтованість (дотриманні всіх формальностей).

Ми будемо будувати наближені рішення обуреної завдання, використовуючи дві евристичні ідеї:

а) рішення шукається у вигляді многочлена

б) ігноруються вищі ступені малого параметра.

Друга ідея мотивується тим, що якщо $0 < \varepsilon < 1$, то $\ldots\varepsilon^4 < \varepsilon^3 < \varepsilon^2 < \varepsilon < 1$ Так, при $\varepsilon = 0{,}02$, $\varepsilon^2 = 0{,}0002$, $\varepsilon^3 = 0{,}000002$. Якщо цікавитися рішенням з точністю до трьох або чотирьох знаків після коми, то резонно ігнорувати величину ε^3, тобто при обчисленнях вважати, що $\varepsilon^3 = 0$ (нагадаємо, що це всього лише евристичне міркування, реальна помилка, породжувана ігноруванням ε^3 вимагає окремого вивчення і змінюється при переході від однієї задачі до іншої). Мотивування першої ідеї виходить з того факту, що багато функцій можуть бути представлені у вигляді степеневих рядів, а після ігнорування вищих ступенів в таких рядах вони стають многочленами. Комбінуючи обидві ці ідеї і вимикаючи ε^3, будемо шукати наближені рішення рівняння (1) у вигляді квадратичних многочленів

$$x^{(1)} \cong -5 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 \;\; x^{(2)} \cong -3 + c\varepsilon + d\varepsilon^{\,2} \;\; x^{(3)} \cong -5 + k\varepsilon + m\varepsilon^2 \quad (4)$$

Головні члени -5,-3 і -1 в (4) - це відомі коріння розглянутого рівняння при $\varepsilon = 0$. Підставляючи перше вираження з (4) в (2), маємо

$$(1-\varepsilon)(-5 + a\varepsilon + b\varepsilon^2\,)^3 + (9-3\varepsilon)(-5 + a\varepsilon + b\varepsilon^2\,)^2 + (23+\varepsilon)(-5 + a\varepsilon + b\varepsilon^2\,) + 15 = 0$$

На наступному кроці слід виконати множення і порядок члени за ступенями ε. Результат множення виглядає наступним чином:

$$\varepsilon(42 - 45a) + \varepsilon^2(8b - 6a^2 - 4a) + \varepsilon^3(a^3 - 12ab - 106b + 12a^2 + 10b^2) + \varepsilon^4(3a^2b - 6b^2 - a^3 + 24ab) + \varepsilon^5(3ab^2 - 3a^2b + 12b^2) + \varepsilon^6(b^3 - 3b^2a) + \varepsilon^7(-b^3) = 0 \quad (5)$$

Так як многочлен щодо змінної ε дорівнює нулю при всіх ε, то кожен коефіцієнт цього многочлена повинен дорівнювати нулю, тобто рівність (5) задовольняється точно, якщо

$$42 - 45a = 0$$

$$8b - 6a^2 - 4a = 0$$

$$a^3 - 12ab - 106b + 12a^2 + 10b^2 = 0$$

$$3a^2b - 6b^2 - a^3 + 24ab = 0 \quad (6)$$

$$3ab^2 - 3a^2b + 12b^2 = 0$$

$$b^3 - 3b^2a = 0$$

$$-b^3 = 0$$

Це система семи рівнянь з двома невідомими, яка, очевидно, не має рішення. Але цього й слід було очікувати, оскільки вираз (4) складалося як наближене рішення, а не точне. Для знаходження наближеного рішення використовуємо ідею 6. Якщо знехтувати членами з ε^3, ε^4 і …, то a і b повинні задовольняти тільки першим двом рівностям в (6), які мають рішення $a = 14/15, b = 28/25$. Аналогічні обчислення для c; d і k; m дають результат отриманий раніше в (3). Аналіз похибки ще не проводився, і передбачуване рішення може виявитися неприйнятним.

Ми спробували вирахувати рівняння (2). Але чи буде аналогічна процедура працювати в інших завданнях? Нижче покажемо, що в деяких випадках відповідь негативна, оскільки обчислення призводять до поділу на нуль. Тому для розуміння методу недостатньо розгляду одних прикладів, необхідно проаналізувати ситуацію в загальному випадку. Найближчою метою буде отримання умов, при яких описана вище обчислювальна процедура може бути виконана. Це можна назвати формальним аналізом методу, оскільки вона ґрунтується лише на формі рішень і не дає оцінки похибки. Такий формальний аналіз є суттєвою частиною методу збурень, але потрібно мати на увазі, що можливість виконання обчислень не гарантує їх точності.

В якості загальної завдання, різновидом якої було рівняння (2), будемо розглядати задачу знаходження наближеного рішення рівняння

$$\varphi(x, \varepsilon) = 0 \tag{7}$$

У формі
$$x \cong x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 \tag{8}$$

Тут φ - довільна задана функція двох змінних. Представлення (8) означає, що ми як і раніше ігноруємо ε^3. Відкидати можна будь-які ступеня малого параметра, але чим більше залишається, тим довше стають обчислення.

Перший крок полягає в підстановці (8) в (7):

$$\varphi(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \varepsilon) \cong 0. \qquad (9)$$

Наступний крок полягає в розкладанні (9) за степенями малого параметра. Якщо φ є многочленом, то для цього потрібно виконати множення і приведення подібних членів, як це робилося в прикладі розглянутому вище. У загальному ж випадку необхідно користуватися рядами Тейлора. Зручно ввести спеціальне позначення для лівої частини рівності (9), що розглядається як функція змінної ε. Будемо вважати $h(\varepsilon) = \varphi(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2, \varepsilon)$. Розкладання за ступенями ε і обмеження точності підрахунку до ε^3 призводить до наступноої рівності:

$$h(0)+h'(0)\varepsilon + \frac{1}{2}h''(0)\varepsilon^2 = \varphi(x_0,0) + \varepsilon\{\varphi_x(x_0,0)x_1 + \varphi_\varepsilon(x_0,0)\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\{\varphi_{xx}(x_0,0)x_1^2 + 2\varphi_{x\varepsilon}(x_0,0)x_1 + 2\varphi_x(x_0,0)x_2 + \varphi_{\varepsilon\varepsilon}(x_0,0)\} \qquad (10)$$

Коефіцієнти в рівності (10) мають дорівнювати нулю, отже, для x_0, x_1 і x_2 отримуємо такі співвідношення:

$$\varphi(x_0, 0) = 0$$

$$\mathrm{x}_1 = -\frac{\varphi_\varepsilon(\mathrm{x}_0,0)}{\varphi_\mathrm{x}(\mathrm{x}_0,0)} = -\frac{\varphi_\varepsilon}{\varphi_\mathrm{x}}\bigg|_{(\mathrm{x}_0,0)} \qquad (11)$$

$$x_2 = \frac{-\varphi_{xx}\varphi_\varepsilon^2 + 2\varphi_{x\varepsilon}\varphi_x - \varphi_{\varepsilon\varepsilon}\varphi_x^2}{2\varphi_x^3}\bigg|_{(x_0;0)}$$

Перше рівняння в (11) означає, що x_0 повинно бути рішенням породжує або виродженою завдання, яка отримується з (9) при $\varepsilon = 0$. При використанні теорії збурень необхідно знати рішення цього завдання. Якщо породжує рівняння має кілька коренів, потрібно вибрати один з них перед процесом наближеного рішення, а після його завершення можна повернутися до розгляду інших коренів. Якщо x_0 вибрано, то залишилися рівняння в (11) визначають x_1 і x_2.

З (11) легко виходять умови, що забезпечують можливість обчислень: функція φ повинна мати похідну першого і другого порядків в точці $(x_0;0)$ і величина $\varphi_x(x_0;0)$ повинна бути відмінною від нуля. Відзначимо що при цьому обидва знаменника в (11) відмінні від нуля. Більш того якщо у виразі вигляду (8) враховувати члени більш високих порядків, то при обчисленні коефіцієнтів $x_3, x_4 \ldots$ знаменники являють собою відповідні ступеня величини $\varphi_x(x_0;0)$. Таким чином, припущення $\varphi_x(x_0;0) \neq 0$ являться основним і саме його виконання характеризує так званий невироджений випадок.

3. Формальне наближення в вироджених випадках

Тепер розглянемо такий приклад:

$$\varphi(x;\varepsilon) = x^2 + \varepsilon = 0 \tag{12}$$

Точне рішення $x = \pm\sqrt{-\varepsilon}$ існує при $\varepsilon < 0$ але не існує при $\varepsilon > 0$. Побудувати наближене рішення, методом викладеним раніше, неможливо, так як в даному прикладі ми маємо справу з виродженим випадком: $x_0 = 0$ і $\varphi_x(x_0;0) = 0$. У математичній літературі для розгляду вироджених випадків зазвичай рекомендують використовувати метод діаграм Ньютона, однак у прикладних роботах широко використовується більш простий евристичний метод, який не має загальноприйнятої назви, але іноді званий методом невизначених масштабів. Суть методу полягає в тому, що наближене рішення шукається у формі:

$$x \cong x_0\delta_0(\varepsilon) + x_1\delta_1(\varepsilon) + \cdots + x_k\delta_k(\varepsilon) \tag{13}$$

Замість менш загальної поліноміальної форми $x \cong x_0 + \varepsilon x_1 + \cdots + \varepsilon^k x_k$. Функції $\delta_n(\varepsilon)$ визначає послідовно разом з коефіцієнтами x_n. Цей метод в комбінації з іншими методами важливий для складних завдань, які виникають, наприклад, в газовій динаміці, коли неможливо заздалегідь передбачити вид цих функцій. Ми продемонструємо застосування цього методу для наближеного знаходження коренів многочленів у вироджених випадках. Розглянемо вироджену задачу:

$$x^2 - 10x + 25 - 4\varepsilon - 4\varepsilon^2 = 0$$

має точні рішення $x = 5 \pm 2\sqrt{\varepsilon + \varepsilon^2}$. Ці рішення не можна розкласти в степеневі ряди по ε, але можна розкласти у степеневі ряди по $\sqrt{\varepsilon}$. Наприклад, $x_1 = 5 + 2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon} = 5 + 2\varepsilon^{1/2} + \varepsilon^{3/2}$.. Остання формула має вигляд (13) при $x_0 = 5$, $\delta_0 = 1$, $x_1 = 2$, $\delta_1 = \varepsilon^{1/2}$ і т.д. Вгадати вид функції $\delta_n(\varepsilon)$, виходячи з вигляді рівняння, не представляється можливим навіть у цьому простому випадку. У загальній ситуації заздалегідь можна припускати тільки те, що функції $\delta_n(\varepsilon)$ розташовуються в порядку важливості. Іншими словами, наближення найменшого порядку повинне задаватися формулою $x \cong x_0\delta_0(\varepsilon)$; член $x_1\delta_1(\varepsilon)$ має відігравати роль меншою (за абсолютною величиною) поправки; $x_2\delta_2(\varepsilon)$ - ще менше і т.д., щонайменше при досить малих значеннях ε. Точніше, для всіх n повинно виконуватися граничне співвідношення $\delta_{n+1}(\varepsilon)/\delta_\varepsilon \longrightarrow 0$, коли $\varepsilon \rightarrow 0$.

Розглянемо приклад:

$$(x-1)^3 + \varepsilon x = 0$$

Незбурене рівняння має трикратний корінь $x = 1$. Вважаючи $x \cong 1 + x_1\delta_1$ в вихідному рівнянні, отримаємо $x_1^3\delta_1^3 + x_1(\varepsilon\delta_1) + \varepsilon \cong 0$. Звідси знаходимо $\delta_1 = \varepsilon^{1/2}$, а для x_1 виходить рівняння $x_1^3 + 1 = 0$, має один речовий корінь $x_1 = -1$, в результаті отримаємо наступне наближене рішення:

$$x^{(1)} \cong 1 - \varepsilon^{1/3}$$

Висновки

Метод збурення не вивчається в шкільному курсі математики. В даній роботі я ознайомився з цим методом, історією його виникнення, застосуванням його для знаходження коренів квадратного рівняння. Розглядаються формальні наближення в невироджених і вироджених випадках. Самостійно дослідив застосування методу збурень до розв’язування кубічних рівнянь.

Планую на наступний рік дослідити застосування цього методу до розв’язування диференціальних рівнянь.

Вважаю ознайомлення з цим методом для себе корисним і буду на факультативних заняттях пояснювати цей метод всім зацікавленим у цьому учням.

Список використаних джерел

1. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х.* Математический аналіз. М.: Изд-во МГУ, 1985.Т.І.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений неленейных уравнений. М.:Наука, 1969
3. *Найф А.Х.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984.
4. *Murdock J.A. Perturbations:* Theory and Methods N.Y.: Wiley