Відділення математики, економіки, комп'ютерних наук та технічних наук

Контрольна робота з математики

9 клас.

1 рівень.

1. Шкільна бібліотека закуповує книги за ціною 70 гривень за штуку. При покупці на суму більш 500 грн. магазин дає знижку десять відсотків. Скільки коштуватиме закупівля 23 книг?

▾***Відповідь:***.1449

2. Знайдіть значення виразу $\left(558^2 - 23^2\right) : 581$

▾***Відповідь:***535

3. Скільки цілих x задовольняє нерівність $|3x-1|<7$?

▾*Розв'язок:*

$$|3x-1|<7 \Leftrightarrow -7<3x-1<7 \Leftrightarrow -6<3x<8 \Leftrightarrow -2<x<\frac{8}{3} \Rightarrow x\in\{-1;0;1;2\}$$

Відповідь: чотири цілих значення $x\in\{-1;0;1;2\}$

2 рівень.

1. Довести, що число 2011^{2011} + 2014 – складене.

▾Розв'язання

Число 2011^{2011} закінчується цифрою 1, тому число 2011^{2011} + 2014 закінчується цифрою 5, тобто воно кратне 5.

2. Відомо, що $f(x)$- квадратний тричлен. Розв'яжіть рівняння $f(x)=0$, якщо $f(3)=5,\ f(1)=-1,\ f(2)=1$.

▾*Розв'язок:*

Підставимо дані $f(3)=5,\ f(1)=-1,\ f(2)=1$ в функцію $f(x)=ax^2+bx+c$, отримаємо $\begin{cases} 9a+3b+c=5; \\ a+b+c=-1; \\ 4a+2b+c=1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+3b+c=8; \\ 6a-2c=8 \\ 3a+b=2.. \end{cases} \Rightarrow 9a+3(2-3a)+(3a-4)=8 \Rightarrow \begin{cases} a=1; \\ b=-1; \\ c=-1. \end{cases}$

Таким чином $f(x)=0 \Rightarrow x^2-x-1=0; \Rightarrow\ D=\sqrt{5} \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

▴*Відповідь*: $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

3рівень.

1. Про дійсні числа a і b відомо, що $0 \le a \le 1$ і $0 \le b \le 1$. Доведіть, що

$$0 \le a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - a^7b^{10} \le 1.$$

▾ *Розв'язок:*

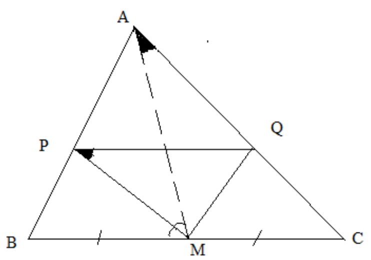
Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $0 \le a \le b \le 1$, тоді:

$$\begin{aligned} & a^{17} - a^{10}b^7 + b^{17} - a^7b^{10} = \\ & = a^{10}\left(a^7 - b^7\right) - b^{10}\left(a^7 - b^7\right) = \\ & = \left(a^{10} - b^{10}\right)\left(a^7 - b^7\right) = \\ & = \left(b^{10} - a^{10}\right)\left(b^7 - a^7\right). \end{aligned}$$

При $0 \le a \le b \le 1$, виконуються нерівності: $0 \le a^{10} \le b^{10} \le 1$ і $0 \le a^7 \le b^7 \le 1$, тобто значення обох дужок добутку $\left(b^{10} - a^{10}\right)\left(b^7 - a^7\right)$ належить проміжку $\left[0;1\right]$, а тому їх добуток також належить проміжку $\left[0;1\right]$.

2.В трикутнику *ABC* проведено медіану *AM*. В трикутниках *AMB* та *AMC* проведено бісектриси MP та MQ відповідно. З'ясувалось, що кути $\angle MAQ$ та $\angle MPQ$ рівні $\left(\angle MAQ = \angle MPQ\right)$. Доведіть, що $\angle PQM = \angle ABC$.

▾*Розв'язок:*



Оскільки MP та MQ бісектриси суміжних кутів, $\angle PMQ = 90^\circ$. З рівності $\left(\angle MAQ = \angle MPQ\right)$випливає, чотирикутник $MPAQ$ - вписаний. Тоді $\angle PAM = \angle PQM$ та $\angle PAQ = 180^\circ - \angle PMQ = 90^\circ$. Отже, трикутник ABC – прямокутний $\left(\angle BAC = 90^\circ\right)$. Таким чином, *AM* медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, тоді $AM = BM \Leftrightarrow \angle MBA = \angle BAM$. Отже, отримаємо $\angle PQM = \angle ABC$, щ.т.д.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА передбачає 6 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -9 балів
2 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -10
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -14
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -33 балів

Відділення економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

<u>10 клас.</u>

1.рівень.

1. Будівельна фірма планує придбати 72 кубометра піноблоків у одного з трьох постачальників. Скільки гривен фірма заплатить за саму дешеву покупку з доставкою? Ціна та умови доставки наведено в таблиці.

Постачальник	Ціна піноблоків (гр. за м^3)	Вартість доставки (гр.)	Додаткові умови
А	285	490	
Б	310	460	При замовлені на суму більше ніж 15000 гр. доставка безкоштовно
В	290	480	При замовлені на суму більше ніж 20000 гр. доставка безкоштовно

▼Розв’язок

$$\left.\begin{array}{l} A: 72\cdot 285 = 20520 + 490 = 21010 \\ Б: 72\cdot 310 = 22320 + 0 = 22320 \\ В: 72\cdot 290 = 20880 + 0 = 20880 \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{Відповідь}: 20880\ (\textit{фірма}\, В)\ \blacktriangle$$

$\textit{Відповідь}: 20880\ (\textit{фірма}\, В)$.

2. Знайти остачу від ділення 9^{2014} на 8.

▼*Розв’язок:*

При діленні числа 9 на 8 маємо в остачі 1. Але $1^{2014} = 1$. Тому остача від ділення 9^{2014} на 8 дорівнює 1.

▲*Відповідь*:1.

3. Знайти значення коефіцієнта k, при якому рівняння $3x^2 - 2kx - k + 6 = 0$ не має коренів.

▼*Розв’язок:*

$$-6 < k < 3.\ D = 4k^2 - 12(6-k) < 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 18 < 0 \Rightarrow -6 < k < 3.$$

▲<u>Відповідь</u>: $-6 < k < 3$

2.рівень.

1. Павло пронумерував картки підряд числами від 1 до 2014. Потім викинув ті з них, в яких номер закінчувався нулем. Після цього Павло перенумерував числами від 1 ті, що залишилися, і знову викинув ті з них, в яких номер закінчувався нулем. Скільки карток залишилось?

▼*Розв'язання*

Порахуємо, скільки чисел від 1 до 2014 закінчуються нулем. Серед одноцифрових таких чисел немає. Серед двоцифрових чисел – 9 $\underbrace{[a]\ [0]}_{\text{двоцифрове}},\ a=1,\ldots,9$. Серед трицифрових чисел – 90, $\underbrace{[a][b]\ [0]}_{\text{трицифрове}},\ a=1,\ldots,9;b=0,\ldots,9\Rightarrow 9\times 10=90$. Серед чисел від 1000 до 2014 – 102, $\underbrace{[1][a][b]\ [0]}_{\text{чотирицифрових}},\ a=0,\ldots,9;b=0,\ldots,9\Rightarrow 10\times 10=100+\underbrace{2000}_{1}+\underbrace{2010}_{1}=102$ числа.

Разом 9 + 90 + 102 = 201 число. Відкинувши 201 картку і пронумерувавши їх ще раз від 1 до 1813 (2014 – 201= 1813) Павло відкинув ще 181 картку,

$$\underbrace{9}_{\text{двоцифрових}}+\underbrace{90}_{\text{трицифрових}}+$$

$$+\left(\left(\underbrace{1[a][b]\ [0]}_{\text{чотирецифрових}<1800},\ a=0,\ldots,7;b=0,9\Rightarrow 8\times 10=80\right)+\left(\underbrace{18d0}_{2},d=0,1\right)\right)+82=181$$

після чого у хлопця залишилось 1632 карток.

▲Відповідь. 1632 карток.

2. Знайдіть найменше значення функції $f(x)=ax^2+bx+c$, якщо a,b,c- такі сталі, що $f(-3)=8,\ f(-1)=-2,\ f(1)=4$

▼*Розв'язок:*

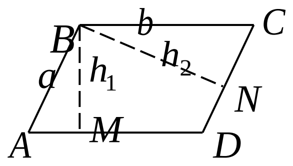
Підставимо дані $f(-3)=8,\ f(-1)=-2,\ f(1)=4$ в функцію $f(x)=ax^2+bx+c$, отримаємо $\begin{cases}9a-3b+c=8;\\ a-b+c=-2;\\ a+b+c=4.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9a-3b+c=8;\\ 8a-2b=10;\\ a+c=1.\end{cases}\Rightarrow 9a-3(4a-5)+(1-a)=8\Rightarrow\begin{cases}a=2;\\ b=3;\\ c=-1.\end{cases}$

Таким чином $f(x)=2x^2+3x-1$, вершина параболи задає найменше значення функції $\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)=\left(-\frac{3}{4};-\frac{17}{8}\right)$.

▲*Відповідь*: $f_{\text{найменьше значення}}\left(-\frac{3}{4}\right).=-\frac{17}{8}$.

3.рівень.

1. Сума відстаней від внутрішньої точки паралелограма до прямих, на яких розташовані сторони паралелограма дорівнює середньому арифметичному його сторін. Знайти кути паралелограма.



Відповідь: кути $30°, 150°$.Сума цих відстаней - це сума висот паралелограма, а тому $h_1 + h_2 = \frac{a+b}{2}$. З подібності трикутників ABM та BNC, позначимо $BC = b = kAB = ka,\ BN = h_2 = kBM = kh_1$, а тому $(k+1)h_1 = \frac{1}{2}(k+1)a$, тобто катет $BM = h_1$ вдвічі менший за гіпотенузу $AB = a$ трикутника ABM, а тому $\angle A = 30°$.

2. Про дійсні додатні числа a, b, c відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$. Доведіть, що

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c.$$

Розв'язок:

Скористаємося нерівністю між середнім арифметичним і середнім геометричним трьох додатних чисел:

$$\frac{a + a + a^4}{3} \geq \sqrt[3]{a \cdot a \cdot a^4} = a^2.$$

Звідси слідує, що $2a + a^4 \geq 3a^2$. Аналогічно, $2b + b^4 \geq 3b^2$ і $2c + c^4 \geq 3c^2$. Додавши ці три нерівності, одержимо:

$$2(a+b+c) + (a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Враховуючи, що $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, то із останньої нерівності одержуємо:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a + b + c,$$

що і треба було довести.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА передбачає 7 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -9 балів
2 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -10
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -14
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -33 балів

Відділення економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

11 клас.

1 рівень.

1. Рейтингова агенція визначає рейтинг співвідношення «ціна-якість» електричних фенів для волосся. Рейтинг визначається на основі середньої цини P, оцінки функціональності F, якості Q та дизайну D . кожний окремий показник оцінюється за 5-бальною шкалою від 0 до 4. Рейтинг обчислюється за формулі:
$R = 3(F+Q)+D-0{,}01\cdot P$.
В таблиці завдано показники для деяких моделей фенів. Визначте, яка модель має найменший рейтинг.

Модель фена	Середня ціна	Функціональність	Якість	Дизайн
А	220	4	3	3
Б	185	3	2	5
В	205	4	2	3
Г	210	3	3	4

▼ Розв'язок

$R = 3(F+Q)+D-0{,}01P$

$$\left.\begin{aligned} &A: R = 3(4+3)+3-0{,}1*220 = 2\\ &Б: R = 3(3+2)+5-0{,}1*185 = 1{,}5\\ &В: R = 3(4+2)+3-0{,}1*205 = 0{,}5\\ &Г: R = 3(3+3)+4-0{,}1*210 = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Відповідь}: 0{,}5\ (\text{модель } В)$$

▲

2. Скільки відсотків від числа $\frac{5}{6}$ становить число $\frac{3}{5}$?

▼ Розв'язок

$$\left.\begin{aligned} &\frac{5}{6} - 100\%\\ &\frac{3}{5} - x\%\end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{3\cdot 6\cdot 100\%}{5\cdot 5} = 72\%$$

3. Розв'язати рівняння $[x]+[2x]=2014$, де $[a]$ - найбільше ціле число, яке не перевищує a.

▼ Розв'язання:

Нехай $n \le x < n+\frac{1}{2},\ n \in Z,$

$$[x]+[2x]=2014$$

Тоді $n \le x < n+\frac{1}{2} \Leftrightarrow [n] \le [x] < \left[n+\frac{1}{2}\right] = n$

$$[2n] \le [2x] < \left[2\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2n+1\right] = 2n$$

Отже $n + 2n = 2014$,

$3n = 2014$,

$n \notin Z$. Це не можливо.

Нехай $n + \frac{1}{2} \le x < n + 1$, $n \in Z$, тоді

$$n+\frac{1}{2}\le x<n+1 \Leftrightarrow \left[n+\frac{1}{2}\right]\le[x]<[n+1]=n$$

$$[2n+1]\le[2x]<[2(n+1)=2n+2]=2n+1$$

маємо, що $n + 2n + 1 = 2014$. Звідси $3n = 2013$, $n = 671$.

▲Відповідь. $671{,}5 \le x < 672$.

2 рівень.

1. Знайдіть всі розв’язки рівняння $2014^x - 2013^x = 1$.

▼*Розв’язок:*

Запишемо рівняння у вигляді $\left(\frac{2014}{2013}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{2013}\right)^x$.

Функція в лівій частині рівняння зростає, а в правій частині спадає. Тому рівняння має не більше одного кореня.

Помічаємо, що $x = 1$: $\left(\frac{2014}{2013} - 1 = \frac{2014-2013}{2013} = \frac{1}{2013}\right)$ є коренем рівняння.

▲*Відповідь: 1.*

2. Скільки додатних цілих розв’язків $(x; y)$, $x < y$, має рівняння $x + y + xy = 2014$?

▼*Розв’язок:*

$$x+y+xy=2014 \Leftrightarrow x(1+y)+(y+1)=2015 \Leftrightarrow (x+1)\cdot(y+1)=2015=5\cdot13\cdot31$$

$x + y + x y + 1 = 2012$;

$x (1 + y) + (y + 1) = 2012$;

$(x + 1) (y + 1) = 2012$;

$2012 = 2^2 \cdot 503$.

Кількість дільників числа 2015, відмінних від 1 і 2015, є

$(5); \cdot (13); \cdot (31); (5\cdot13); \cdot (5\cdot31); \cdot (13\cdot31) = 2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$.

Стільки ж пар $(x; y) \in N$ очевидно, задовольняють співвідношення в умові задачі.

Кількість таких пар, що задовольняють додаткову умову $x < y$, є 6:2=3

x	5	13	31	5*13	5*31	13*31
y	13*31	5*31	5*13	31	13	5

.

▲ *Відповідь*: 3.

3 рівень.

1. Знайдіть всі значення параметра a, при яких система має два розв’язки.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2=2xy-2x=2y=2z \\ xy+yz+xz=a \end{cases}$$

Розв’язок ▼

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+2=2xy-2x+2y+2z; \\ xy+yz+xz=a \end{cases} \Rightarrow$$

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz) = x^2+y^2+z^2+2a \Rightarrow$$

розглянемоперше рівняння системи

$$x^2+y^2+z^2+2=2xy-2x+2y+2z \Rightarrow x^2-2xy+y^2+2=-z^2-2x+2y+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-y)^2+2(x-y)+1=-(z^2-2z+1) \Rightarrow (x-y+1)^2+(z-1)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0; \\ z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1; \\ z=1. \end{cases}$$

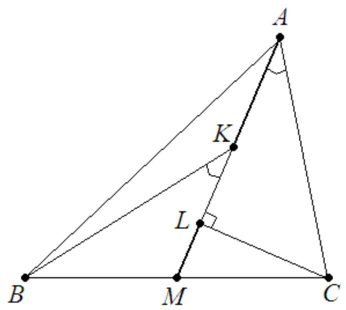
підставемо результат в друге рівняння системи

$$\begin{cases} y=x+1; \\ z=1 \\ xy+yz+xz=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+1; \\ z=1 \\ x(x+1)+(x+1)+x=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1; \\ z=1 \\ x^2+3x+1=a \end{cases} \Rightarrow x^2+3x+(1-a)=0$$

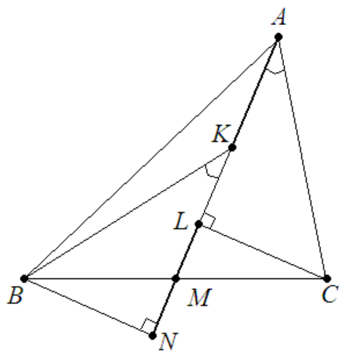
$$D=\sqrt{9-4(1-a)}>0 \Rightarrow a>-\frac{4}{5}$$

Відповідь: $a>-\dfrac{4}{5}$. ▲

2. Точка M – середина сторони BC трикутника ABC. На відрізку AM відмітили точки K і L так, що $AK = 2\cdot LM$ і $\angle ALC = 90°$. Доведіть, що $\angle BKM = \angle CAM$.



▼ Розв’язання:



Проведемо $BN \perp AM$. Оскільки $BM = CM$, то трикутники BNM і CLM рівні за гіпотенузою і гострим кутом. З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних сторін: $BM = CL$ і $NM = ML$. Оскільки $AK = 2\cdot LM$, то $AK = LN$ і $AL = KN$. Так як $BN = CL$ і $KN = AL$, то трикутники BNK і CLA рівні за двома катетами. З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle BKN = \angle CAL$, тобто $\angle BKM = \angle CAM$, що і треба було довести.

<u>КОНТРОЛЬНА РОБОТА</u> передбачає 7 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -9 балів

2 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -10

3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -14

МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -33 балів

Відділення математики та комп'ютерних наук

Контрольна робота з математики

10 клас.

1 рівень.

2

1. Знайти значення коефіцієнта k, при якому рівняння $3x^2-2kx-k+6=0$ не має коренів.

▾*Розв'язок:*

$$D=4k^2-12(6-k)<0 \Rightarrow k^2+3k-18<0 \Rightarrow -6<k<3.$$

▴Відповідь: $-6<k<3$

2. Знайдіть значення виразу

$$\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$$

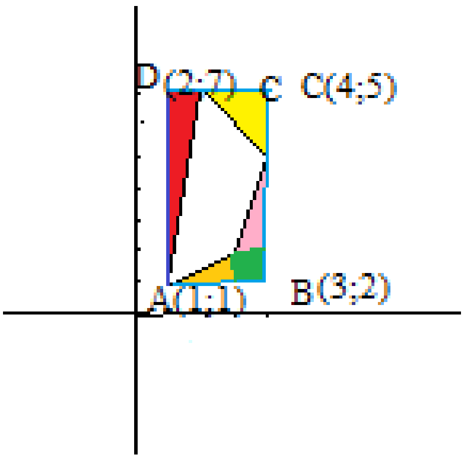
▾*Розв'язання:* Запишимо умову у вигляді

$$\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2=6-\sqrt{11}+2\sqrt{\left(6-\sqrt{11}\right)}\cdot\sqrt{\left(6+\sqrt{11}\right)}+6+\sqrt{11}=$$

$$=12+2\sqrt{36-11}=12+2\sqrt{25}=22$$

▴*Відповідь*: 22.

3. Знайдіть площу чотирикутника *ABCD*, заданого координатами вершин *A*(1;1), *B*(3;2), *C*(4;5), *D*(2;7),на координатній площині *Oxy*.



▾*Розв'язок:*

$$S_{ABCD}=S_{ПРЯМОКУТНИКА}-S_1-S_2-S_3-S_4-S_5=$$

$$=6\cdot 3-\frac{1}{2}2\cdot 1-\frac{1}{2}3\cdot 1-\frac{1}{2}2\cdot 2-\frac{1}{2}1\cdot 6-1\cdot 1=$$

$$=18-1-\frac{3}{2}-3-2-1=18-8{,}5=9{,}5$$

▴*Відповідь: S=9,5.*

3рівень.

1. Розв'язати рівняння $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 8$

▼*Розв'язок:*

До обох частин рівняння додамо вираз $\frac{2x^2}{x+1}$.

Отримаємо рівняння

$$x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} + \frac{2x^2}{x+1} = 8 + \frac{2x^2}{x+1} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2(x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{2(x+2)^2}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 = 0, \\ x + 2 = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}, \quad x_3 = 1 + \sqrt{3}.$$

▲*Відповідь:* $x_1 = 2, \; x_2 = 1 - \sqrt{3}, \; x_3 = 1 + \sqrt{3}.$

2. Розв'яжіть рівняння: $1 + \cos 2014x = 2^{1+|\sin 2014x|}$.

▼ *Розв'язання.*

Множина значень лівої частини [0;2]., а правої - [2; 4]. Отже, ліва і права частини рівності дорівнює 2.

$$\begin{cases} 1 + \cos 2014x = 2; \\ 2^{1+|\sin 2014x|} = 2. \end{cases}$$ або

$$\begin{cases} \cos 2014x = 1; \\ \sin 2014x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2014x = 2\pi k, \; k \in Z; \\ 2014x = \pi t, \; t \in Z; \end{cases} \Leftrightarrow \; x = \pi n, n \in Z .$$

▲ *Відповідь:* $x = \pi n, n \in Z$.

Зрівень.

1. Розв'яжіть систем рівнянь: $\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = \sqrt{3}, \\ \sin\alpha + \sin\beta = 1. \end{cases}$

▼*Розв'язання.*

Розглянемо два одиничних вектора $\vec{e}_1 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$; $|\vec{e}_1| = 1$, $\vec{e}_2 = (\cos\beta, \sin\beta)$; $|\vec{e}_2| = 1$. Ліві частини рівнянь – це координати суми $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$. Враховуючи праві частини рівнянь маємо координати вектора $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = (\sqrt{3}, 1)$. Знайдемо довжину вектора суми:

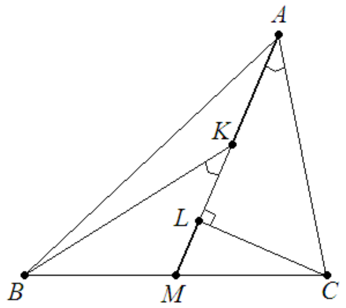
$$\left|\vec{e}_1+\vec{e}_2\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2.$$

З цього випливає, що вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – рівні, отже рівні і їх координати: $\cos\alpha=\cos\beta;\ \sin\alpha=\sin\beta$. Тому система зводиться до рівняння $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{3}\Rightarrow 2\cos\alpha=\sqrt{3}, \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,отже $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$.

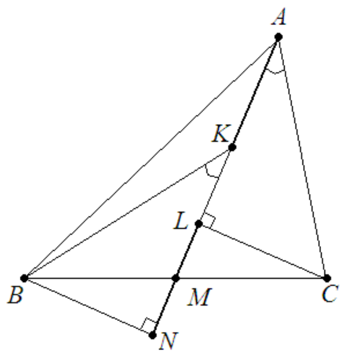
Аналогічно знаходимо β: $2\cos\beta=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \beta=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$.

▲ *Відповідь:* $\alpha=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$ $\qquad \beta=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$

2. Точка M – середина сторони BC трикутника ABC. На відрізку AM відмітили точки K і L так, що $AK=2\cdot LM$ і $\angle ALC=90°$. Доведіть, що $\angle BKM=\angle CAM$.



▼ Розв'язання:



Проведемо $BN\perp AM$. Оскільки $BM=CM$, то трикутники BNM і CLM рівні за гіпотенузою і гострим кутом. З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних сторін: $BM=CL$ і $NM=ML$. Оскільки $AK=2\cdot LM$, то $AK=LN$ і $AL=KN$. Так як $BN=CL$ і $KN=AL$, то трикутники BNK і CLA рівні за двома катетами. З рівності цих трикутників випливає рівність відповідних кутів: $\angle BKN=\angle CAL$, тобто $\angle BKM=\angle CAM$, що і треба було довести.

<u>КОНТРОЛЬНА РОБОТА</u> передбачає 6 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -9 балів
2 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -10
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -14
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -33 балів

Контрольна робота з математики

11 клас.

1 рівень.

1. Розглядаються квадратичні функції $y = x^2 + px + q$, для яких $p + \frac{q}{2} = 1005$. Доведіть, що їх графіки проходять через одну точку координатної площини.

▼ *Розв'язок:*

Усі ці графіки проходять через точку $(2;2014)$.

Розглянемо значення тричлена в точці $x_0 = 2$. Тоді

$$y = x^2 + px + q = \left\langle p + \frac{q}{2} = 1005 \Rightarrow q = 2(1005 - p) \right\rangle = x^2 + px + 2(1005 - p) =$$

$$= x^2 + p(x-2) + 2010 \Rightarrow \forall p \in R; \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 + 2010 = 2014$$

▲ *Відповідь:* Тобто графіки усіх тричленів проходять через точку $(2;2014)$.

2.. Розв'яжіть рівняння. $\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x - 1$.

▼ *Розв'язок:*

$$\sqrt{1-2x+x^2} + \sqrt{26+3x-5x^2} = x - 1 \Rightarrow \left(x - 1 \geq 0,\ так, як\ \sqrt{a} \geq 0\right)$$

$$\sqrt{1-2x+x^2} = |x-1| = x - 1; x \geq 1 \Rightarrow$$

$$x - 1 + \sqrt{26+3x-5x^2} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 26 + 3x - 5x^2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 5\left(x - \frac{13}{5}\right)\left(x + \frac{10}{5}\right) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x = 2{,}6$$

3..Знайдіть всі розв'язки рівняння $2013^x - 2014^x = -1$.

▼*Розв'язок:*

Запишемо рівняння у вигляді $\left(\frac{2014}{2013}\right)^x - 1 = \left(\frac{1}{2013}\right)^x$.

Функція в лівій частині рівняння зростає, а в правій частині спадає. Тому рівняння має не більше одного кореня.

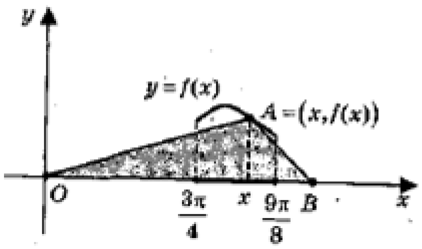
Помічаємо, що x = 1: $\left(\dfrac{2014}{2013}-1=\dfrac{2014-2013}{2013}=\dfrac{1}{2013}\right)$ є коренем рівняння.

▲*Відповідь: 1.*

2. рівень.

1. Точка *A* лежіть на графіку функції $y=\sqrt{7+3\sin x-(3x+1)\cos x}$, відомо, що її абсциса знаходиться в проміжку $\dfrac{3\pi}{4}\le x\le\dfrac{9\pi}{8}$, точка В лежіть на осі Ох її абсциса в чотири рази більше ординати точки А. Знайдіть найбільше значення площі трикутника АОВ, до О-початок координат

▼*Розв'язок:*



$$S_{OAB}=\frac{1}{2}f(x)\cdot 4f(x)=2\left(f(x)\right)^2=$$
$$=2\left(7+3\sin x-(3x+1)\cos x\right)=S(x),$$
$$де\ \ \frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{9\pi}{8};$$
$$а)\ \ S'(x)=2\left(7+3\sin x-(3x+1)\cos x\right)'=$$
$$=2\left(3\cos x-3\cos x+(3x+1)\sin x\right)=$$
$$=2(3x+1)\sin x;$$
$$б)\ S'(x)=0\Leftrightarrow\sin x=0\Rightarrow x=\pi;$$
$$так\ \ як\left(\frac{3\pi}{4}\le x\le\frac{9\pi}{8}\right)$$

В точці $x=\pi$ похідна змінює знак з плюса на мінус, отже

$$S_{OAB}=2\left(f(\pi)\right)^2=$$
$$=2\left(7+3\sin\pi-(3\pi+1)\cos\pi\right)=2\left(7+(3\pi+1)\right)=6\pi+16.$$

▲*Відповідь:* $S_{OAB}=6\pi+16.$

2. Послідовність числових функцій $\{f_n(x)\}=f_1(x),\ f_2(x),\ldots$, задовольняє умовам:

1) $f_1(x)=x;$
2) $f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{1-f_n(x)}$ для будь-якого $n\in N$.

Знайти $f_{2014}(2014)$.

▼Розв'язання

Безпосередньо перевіряємо, що $f_1(2014)=2014;\ \ f_2(2014)=\dfrac{1}{1-2014}=-\dfrac{1}{2013};$

$$f_3(2014)=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2013}\right)}=\frac{1}{\frac{2014}{2013}}=\frac{2013}{2014};\quad f_4(2014)=\frac{1}{1-\frac{2013}{2014}}=\frac{2014}{1}=2014.$$

Звідси $f_{n+3}(2014)=f_n(2014)$; та $f_{2014}(2014)=f_1(2014)=2014.$

▲Відповідь. $f_{2014}(2014)=2014$.

3 Рівень

1.. Розв'яжіть рівняння $\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]=\sqrt{\left[x+\frac{1}{2}\right]}$, де $[a]$ позначає цілу частину числа *a*, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує *a*.

▼Розв'язання

В лівій частині рівняння є $\sqrt{x}\Rightarrow x\ge 0$. Позначимо $\left[\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right]=n,\ n\in Z_+$.

Отже $n<\sqrt{x}+\frac{1}{2}<n+1\Rightarrow \quad n-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<n+\frac{1}{2}$ (1).

Тоді з правої частини випливає, що $\left[x+\frac{1}{2}\right]=n^2$, тоді

$$n^2<x+\frac{1}{2}<n^2+1\Rightarrow n^2-\frac{1}{2}<x<n^2+\frac{1}{2}\quad (2).$$

Таким чином вихідне рівняння, виконується при деякому x тоді і тільки тоді коли для деякого цілого невід'ємного n виконуються умови (1), (2).

I). Розглянемо випадок $n>0$. В цьому випадку (1) еквівалентне нерівності

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^2\le x<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow n^2-n+\frac{1}{4}\le x<n^2+n+\frac{1}{4},$$

Зауважимо, що при $n>0\Rightarrow n\ge 1$ випливає $n^2-n+\frac{1}{4}<n^2-\frac{1}{2}$,

і $n^2+n+\frac{1}{4}>n^2+\frac{1}{2}$. Таким чином система нерівностей (1), (2) еквівалентна нерівності (2), тобто всі x, що задовольняють (2) і є розв'язками даного рівняння.

II). Розглянемо випадок $n=0$. В цьому випадку нерівності (1) та (2) з врахуванням ОДЗ приймають вид $0\le\sqrt{x}<\frac{1}{2}$ (1); $0\le x<\frac{1}{2}$. Очевидно, що x задовольняє цім нерівностям, тоді і тільки тоді коли $0\le x<\frac{1}{4}$.

▲Відповідь. $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right)\cup\bigcup_{n\in N}\left[n^2-\frac{1}{2};n^2+\frac{1}{2}\right).$

2.. Задано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, де AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 - бічні ребра. Через вершину A_1, середину BC і центр грані DCC_1D_1 проведено площину. Знайти відношення, в якому ця площина поділяє об'єм куба.

▲Відповідь: 1;1

<u>КОНТРОЛЬНА РОБОТА</u> передбачає 6 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 3 годин:

1 рівень -3 завдання - максимальна кількість -9 балів

2 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -10

3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість -14

МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -33 балів