Відділення математики, економіки,
комп'ютерних наук та технічних наук

Контрольна робота з математики

9 клас.

I рівень

1. Що більше: число *a*, яке дорівнює 36 % від 53, чи число *b*, яке дорівнює 48% від 40?

▼*Розв'язок:*

$$a=\frac{53\cdot 36\%}{100\%}=19{,}08<b=\frac{40\cdot 48\%}{100\%}=19{,}2$$

▼***Відповідь:*** $a<b$.

2. На світанку дві бабусі вийшли назустріч одна одній з пунктів A і B. В 12 годин дня вони зустрілися і кожна продовжила свій путь. Після чого перша прийшла в пункт призначення в 16 годин, а друга – в 9 годин вечора. Коли в цей день наступив світанок?

▼*Розв'язок:* Відповідь. Бабусі вийшли в дорогу о 6 годині ранку.

3. Обчисліть: $\sqrt{13+\sqrt{48}}-2\sqrt{3}$.

▼*Розв'язок:*

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}-2\sqrt{3}=\sqrt{1+2\cdot 2\sqrt{3}+\left(2\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{3}=\left|1+2\sqrt{3}\right|-2\sqrt{3}=1.$$

II рівень

1. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x-8}{\sqrt[4]{x+3}}}$.

▼*Розв'язок:*: Задача зводиться до розв'язування системи

$$\begin{cases}x^2-2x-8\ge 0\\ x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-2\;]\cup[4;+\infty)\\ x\in(-3;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-3;-2\;]\cup[4;+\infty).$$

▼***Відповідь:***

2. При яких значеннях параметра ***a*** множиною розв'язків нерівності $x+2\ge ax$ буде скінченний проміжок?

▼*Розв'язок:*

III рівень

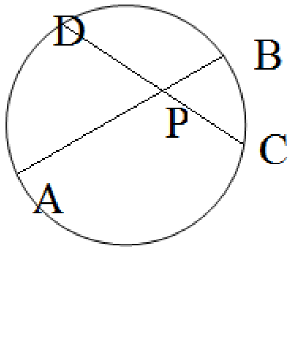
1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 дм і 20 дм. Знайдіть відстань від центра вписаного кола до висоти трикутника, яка проведена до гіпотенузи.

▼*Розв'язок:*

Відповідь. 1 дм. Скористатися умовою, що дотичні до кола, проведені з однієї точки, рівні і подібністю прямокутних трикутників.

2. Через точку *P* всередині деякого кола проведено хорди *AB* і *CD*. Відомо, що *AP* = 4 *см*, *BP* = 3 *см*, *CP* = 2 *см*. Знайти довжину відрізка *DP*.

▼*Розв'язок:*



Відділення економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1. . Знайти область визначення функції

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{6+7x-3x^2}}{-3x^2+2x+8}}+\sqrt[6]{\frac{4}{(x+1)^3\cdot(x+5)^2x^4}}.$$

▼*Розв'язок:* задача зводиться до системи

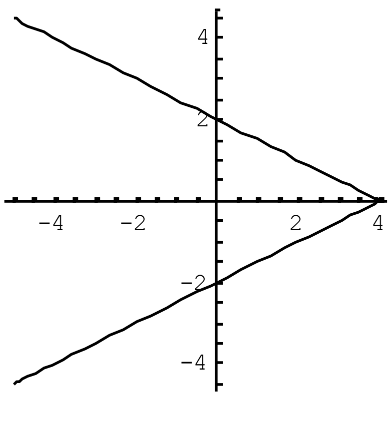
$$\begin{cases}6+7x-3x^2\ge 0\\ -3x^2+2x+8>0\\ x+1>0\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(x-3)\left(x+\frac{2}{3}\right)\le 0\\ 3(x-2)\left(x+\frac{4}{3}\right)<0\\ x>-1\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in\left[-\frac{2}{3};3\right]\\ x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)\\ x\in(-1;+\infty)\\ x\notin\{-5;0\}\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-\frac{2}{3};0)\cup(0;2).$$

2. Побудувати графік $x+2|y|=4$,

▼*Розв'язок:*

Можна розглянути два випадки: $y\ge 0$ і $y<0$, тоді у верхній півплощині будуємо графік прямої $x+2y=4$ або $y=-\frac{1}{2}x+2$, а у нижній — $x-2y=4$ або $y=\frac{1}{2}x-2$.



3. Спростити вираз: $\dfrac{2015}{201520152015^2-201520152014\cdot 201520152016}$

▼ Відповідь: 2015

▼*Розв'язок:* $\dfrac{a}{a^2-(a-1)(a+1)}=a$

II рівень

1. Знайти $3x$, якщо $\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{9}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}\left(3-\sqrt{5}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{45}-\sqrt{20}}$.

▼*Розв'язок:*

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{9}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}\left(3-\sqrt{5}\right)}=\frac{\sqrt{5}\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{45}-\sqrt{20}}\Leftrightarrow\frac{3x+2}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}}=$$

$$\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}}{3\sqrt{5}-2\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{3x+2}{2\sqrt{6-2\sqrt{5}}}=\sqrt{5}+1\Leftrightarrow\frac{3x+2}{2\left(\sqrt{5}-1\right)}=\sqrt{5}+1\Leftrightarrow 3x+2=2\left(5-1\right)\Leftrightarrow 3x=6.$$

2. Обчислити $\dfrac{1}{\sin 10^o}-4\sin 70^o$.

▼*Розв'язок:*

$$\frac{1}{\sin 10^o}-4\sin 70^o=$$

$$=\frac{2\cos 10^\circ}{2\sin 10^\circ\cdot\cos 10^\circ}-4\cos 20^\circ=\frac{2\cos 10^\circ-4\cos 20^\circ\cdot\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{2\cos 10^\circ-2\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$=\frac{2(\sin 80^\circ-\sin 40^\circ)}{\sin 20^\circ}=\frac{4\sin 20^\circ\cdot\cos 60^\circ}{\sin 20^\circ}=2.$$

III рівень

1. Різниця між висотою, опущеною на бічну сторону рівнобедреного трикутника, і висотою, опущеною на основу, дорівнює 4 см. Обчислити площу трикутника, якщо бічна сторона його і основа відносяться як 5:6.

▼*Розв'язок:*

розглянемо трикутник ABC. Позначимо висоту, опущену на основу AC, $h_2=BK$, а висоту, опущену на бічну сторону — $h_1=AM$. Тоді $h_1-h_2=4$.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot h_2=\dfrac{1}{2}BC\cdot h_1$, звідки $\dfrac{AC\cdot h_2}{BC\cdot h_1}=1$ або $\dfrac{6\cdot h_2}{5\cdot h_2}=1$. Маємо систему

$$\begin{cases}h_1-h_2=4\\ 6h_2=5h_1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}h_1=24\\ h_2=20\end{array}\right..$$

Тоді $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{BC^2-h_1^2}}{BC}=\dfrac{6}{5}\Rightarrow BC=30$, а $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot h_2=\dfrac{1}{2}30\cdot 20=300$ (см^2).

2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-4x-12}>2x+9$.

▼*Розв'язок:*: подана нерівність зводиться до сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x+9\ge 0\\ x^2-4x-12>4x^2+36x+81\end{cases}\\ \begin{cases}2x+9<0\\ x^2-4x-12\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -\dfrac{9}{2}\\ 3x^2+40x+93<0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-\dfrac{9}{2}\\ x\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-\dfrac{9}{2};+\infty)\\ x\in\left(-\dfrac{31}{3};-3\right)\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;-\dfrac{9}{2})\\ x\in(-\infty;-2]\cup[6;+\infty)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3).$$

Відділення економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

11 клас.

1 рівень.

1. Розв'язати рівняння $9^x - 2\cdot 3^x - 4 = 0$.

▼*Розв'язок:*

2. Побудувати графік $y = \dfrac{|x|}{|x-1|}$.

▼*Розв'язок:*

3. Скільки всього існує непарних шестицифрових чисел, які не діляться без остачі на 3

▼*Розв'язок:*

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
31.	32.	33.	34.	35.	36.	37.	38.	39.	40.
41.	42.	43.	44.	45.	46.	47.	48.	49.	50.
51.	52.	53.	54.	55.	56.	57.	58.	59.	60.
61.	62.	63.	64.	65.	66.	67.	68.	69.	70.
71.	72.	73.	74.	75.	76.	77.	78.	79.	80.
81.	82.	83.	84.	85.	86.	87.	88.	89.	90.

Всього чисел $9\cdot 10^5 - \dfrac{9\cdot 10^5}{2} - \dfrac{9\cdot 10^5}{3} + \dfrac{9\cdot 10^5}{6} = 9\cdot 10^5 \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = 9\cdot 10^5 \cdot \dfrac{1}{3} = 3\cdot 10^5$

ІІ рівень

1. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2 < 0$ на проміжку $[-8;+8]$.

▼*Розв'язок:*

$(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2 < 0 \Leftrightarrow (x-2)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2 > 0$.

Використавши «метод інтервалів», отримаємо $x\in[-8;-5)\cup(-5;-3)\cup(2;8]$. Вибираємо цілі значення: –8, –7, –6, –4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, тобто маємо десять цілих розв'язків.

2. Знайти найменший член геометричної прогресії з першим членом 1, знаменником 3, який перевищує число 2015.

▼*Розв'язок:* $b_n = b_1 q^{n-1} = 1\cdot 3^{n-1} > 2015,\quad 3^6 = 729,\ 3^7 = 2187 \Rightarrow n-1 = 7 \Rightarrow n = 8$

: $b_n = b_1 q^{n-1}$

ІІІ рівень

1. В паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відомі координати таких вершин: $A_1(1;1;2)$, $C_1(5;7;2)$, $B(1;5;12)$, $D(7;1;10)$. Знайти координати вершини C_1.

▼*Розв'язок:*

2. Розв'язати нерівність $x\sqrt{2-x} > \cos x \cdot \log_{\sin x} 2\sin\frac{\pi}{6}$.

▼*Розв'язок:*

Подана нерівність визначена, коли виконуються такі умови: $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \neq 1 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in Z \\ x \neq 2\pi n, n \in Z \\ x \leq 2 \end{cases}$. Оскільки $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, а $\log_{\sin x} 1 = 0$, то нерівність зводиться до $x\sqrt{2-x} > 0$, звідки $x > 0$ і $x \neq 2$. Врахувавши область визначення нерівності, будемо мати: $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; 2\right)$.

Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1. Знайди суму найменшого і найбільшого значень функції $f(x)=3x-\frac{12}{(x+1)^2}+5$ на відрізку $[-5;-2]$.

▼*Розв'язок:*

$$f(x)=3x-\frac{12}{(x+1)^2}+5\Rightarrow f'(x)=3+\frac{24}{(x+1)^3}=0\Rightarrow 3(x+1)^3+24=0\Rightarrow$$

$$(x+1)^3=-8\Rightarrow x=-2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-5)==-10\frac{3}{4} \\ f(-2)=-13 \\ f(-3)=-5\frac{1}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow(-13)+\left(-5\frac{1}{3}\right)=-18\frac{1}{3}$$

2. Знайдіть кількість цілочислових значень х, для яких визначена функція $y=\sqrt{\frac{-x^2+x+6}{x^2-2x+1}}$

▼*Розв'язок:*

$$y=\sqrt{\frac{-x^2+x+6}{x^2-2x+1}}\Rightarrow\begin{cases} x^2-2x+1\neq 0; \\ \frac{-x^2+x+6}{x^2-2x+1}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (x-1)^2\neq 0; \\ \frac{-x^2+x+6}{(x-1)^2}\geq 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x^2+x+6\geq 0; \\ x\neq 1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2-x-6\leq 0; \\ x\neq 1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} -2\leq x\leq 3; \\ x\neq 1 \end{cases}\Rightarrow x\in\{-2;-1;0;2;3\}$$

Відповідь: 5.

1. Спростити вираз: $\frac{2015}{201520152015^2-201520152014\cdot 201520152016}$

▼ Відповідь: 2015

▼*Розв'язок:* $\frac{a}{a^2-(a-1)(a+1)}=a$

ІІ рівень

1.Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2<0$ на проміжку $[-8;+8]$.

▼*Розв'язок:*

$(2-x)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2<0 \Leftrightarrow (x-2)^3\cdot(x+3)\cdot(x+5)^2>0$.

Використавши «метод інтервалів», отримаємо $x\in[-8;-5)\cup(-5;-3)\cup(2;8]$. Вибираємо цілі значення: –8, –7, –6, –4, 3, 4, 5, 6, 7, 8, тобто маємо десять цілих розв'язків.

2. Скільки розв'язків у залежності від значення параметра *a* має рівняння $(a-x^2+4x-5)(a-2x+4)(3a+x-9)=0$.

▼*Розв'язок:*

$$(a-x^2+4x-5)(a-2x+4)(3a+x-9)=0\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} a-x^2+4x-5=0,\\ a-2x+4=0,\\ 3a+x-9=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+5-a=0,\\ 2x-4=a,\\ x-9=-3a \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} D=16-4(5-a)\geq 0\Rightarrow 16-20+4a\geq 0\Rightarrow a\geq 1\rightarrow 2\,або\,1\,корінь\\ x=\dfrac{a+4}{2}\Rightarrow a\in R\rightarrow 1\,корінь\\ x=-3a+9\Rightarrow a\in R\rightarrow 1\,корінь \end{array}\right.$$

Отже при $x=\left[\begin{array}{l} >1\ -4\ розв'язка\\ =1-3\ розв'язка\\ <1-2\ розв'язка \end{array}\right.$

III рівень

1. Знайти кількість розв'язків рівняння sin5*x* = cos7*x* , які належать проміжку [4π ;5π], і вказати найбільший із цих розв'язків.

▼*Розв'язок:*

$$\sin 5x-\cos 7x=0 \Rightarrow \sin 5x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+7x\right)=0 \Rightarrow 2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+12x}{2}\sin\frac{-\frac{\pi}{2}-2x}{2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{4}+6x\right)=0;\\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}-x\right)=0;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{4}+6x=\frac{\pi}{2}+\pi k;\\ \frac{\pi}{4}+x=\pi l\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{6}+\frac{\pi}{24};\\ x=\pi l-\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[4\pi;5\pi]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}4\pi\le\frac{\pi k}{6}+\frac{\pi}{24}\le 5\pi;\\ 4\pi\le\pi l-\frac{\pi}{4}\le 5\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\pi-\frac{\pi}{24}\le\frac{\pi k}{6}\le 5\pi-\frac{\pi}{24};\\ 4\pi+\frac{\pi}{4}\le\pi l\le 5\pi+\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{6}{\pi}\left(4\pi-\frac{\pi}{24}\right)\le k\le\frac{6}{\pi}\left(5\pi-\frac{\pi}{24}\right);\\ 4+\frac{1}{4}\le l\le 5+\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

от

$$\left[\begin{array}{l}24-\frac{1}{4}\le k\le 30-\frac{1}{4};\\ 4+\frac{1}{4}\le l\le 5+\frac{1}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k\in\{24;25;26;27;28;29\}\\ l\in\{5\}\end{array}\right.$$

же ми маємо 7 коренів найбільший з яких

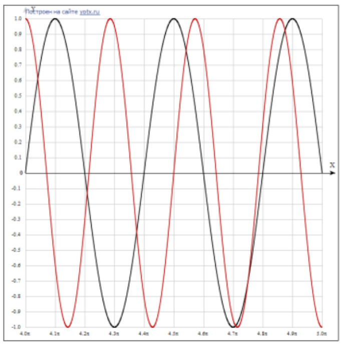
$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi k}{6}+\frac{\pi}{24};\\ x=\pi l-\frac{\pi}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[4\pi;5\pi]\Rightarrow \left[\begin{array}{l}k\in\{24;25;26;27;28;29\}\\ l\in\{5\}\end{array}\right.$$

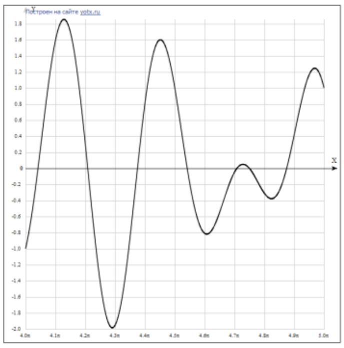
$$k=29\to x=\frac{29\pi}{6}+\frac{\pi}{24}=\frac{117}{24}\pi$$

$при\ \ l=5\to x=5\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{19}{4}\pi=\frac{114}{24}\pi$

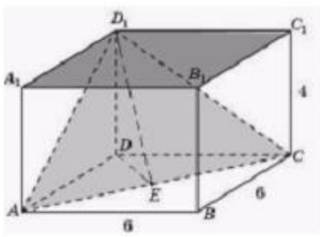
$$k=24\to x=\frac{24\pi}{6}+\frac{\pi}{24}=\frac{97}{24}\pi$$

$$k=29\to x=\frac{29\pi}{6}+\frac{\pi}{24}=\frac{117}{24}\pi$$





2.В прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдіть тангенс кута між площинами ACD_1 та $A_1B_1C_1$ якщо відомо, що
$AB=6,\ \ BC=6,\ \ CC_1=4$



▼*Розв'язок:* Замість площини $A_1B_1C_1$, візьмемо паралельну їй площину ABC. Нехай E середина AC. Кут $\angle DED_1$ - лінійний кут шуканого кута ($D_1E\perp AC;\quad DE\perp AC$).
З прямокутного трикутника D_1DE знаходимо

$$tg\angle DED_1 = \frac{DD_1}{DE} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Відповідь $tg\angle DED_1 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Контрольна робота з математики

11 клас.

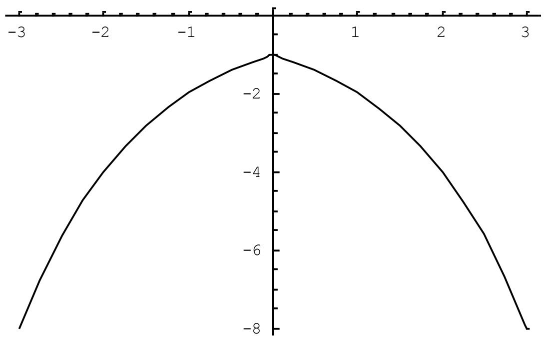
1 рівень.

1. Побудувати графік $y=-2^{|x|}$.

▼Розв'язок:

Відразу потрібно відмітити, що функція є парною; можна побудувати графік, використавши перетворення, тобто спочатку побудувати графік функції $y=2^x$, потім $y=2^{|x|}$ (графік, що відповідає $x\ge 0$, дзеркально відображаємо відносно осі oy) і остаточно — $y=-2^{|x|}$ (дзеркальне відображення відносно осі ox).

2.



2. Скільки розв'язків у залежності від значення параметра *a* має рівняння $(a-x^2+4x-5)(a-2x+4)(3a+x-9)=0$.

▼*Розв'язок:*

$$(a-x^2+4x-5)(a-2x+4)(3a+x-9)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a-x^2+4x-5=0\Rightarrow D=(16-4(5-a))=-4-a\ge 0\\ a-2x+4=0\Rightarrow x=\dfrac{a}{2}+2\\ 3a+x-9=0\Rightarrow x=-3a+9\end{array}\right.$$

При $a<4$ рівняння має 4 корені; при $a=4$ має три корені, при $a>4$ - два корені.

3. Розв'язати нерівність $x\sqrt{2-x}>\cos x\cdot\log_{\sin x}2\sin\frac{\pi}{6}$.

▼*Розв'язок:*

Подана нерівність визначена, коли виконуються такі умови:

$\begin{cases}\sin x>0\\ \sin x\ne 1\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(2\pi k;\pi+2\pi k),k\in Z\\ x\ne 2\pi n,n\in Z\\ x\le 2\end{cases}$. Оскільки $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, а $\log_{\sin x}1=0$, то нерівність зводиться до $x\sqrt{2-x}>0$, звідки $x>0$ і $x\ne 2$. Врахувавши область визначення нерівності, будемо мати: $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};2\right)$.

II рівень

1. Чи правда, що кожна дотична до графіка $y = x^3 - 3x$ має рівно дві спільні точки із цим графіком? Якщо відповідь позитивна, довести відповідне твердження. Якщо відповідь негативна, описати усі дотичні, які вказаної властивості не мають.

▼*Розв'язок:* Рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x - x_0) = x_0^3 - 3x_0 + (3x_0^2 - 3)(x - x_0) \Rightarrow$

$$\{x_0^3 - 3x_0 + (3x_0^2 - 3)(x - x_0) = x^3 - 3x \Rightarrow -2x_0^3 + 3x_0^2 x - 3x = x^3 - 3x \Rightarrow x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3 = 0$$

$x_1 = x_0;\ x_2 = -x_0;$

2. Розв'язати нерівність $\dfrac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \dfrac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11}$.

▼*Розв'язок:* ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

$$\frac{\sqrt[4]{15}}{\log_{x+1} 11} \geq \frac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt[4]{15}}{\dfrac{\log_{11} 11}{\log_{11}(x+1)}} \geq \dfrac{\log_{11}(x+1)}{\log_{123} 11} \\ \log_{11}(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{15}\log_{11}(x+1) \geq \dfrac{\log_{11}(x+1)}{\dfrac{\log_{11} 11}{\log_{11} 123}} \\ \log_{11}(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[4]{15}\log_{11}(x+1) \geq \log_{11} 123 \cdot \log_{11}(x+1) \\ \log_{11}(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123\right) \cdot \log_{11}(x+1) \geq 0 \\ \log_{11}(x+1) \neq 0 \end{cases}$$

Так як $\sqrt[4]{15} < \sqrt[4]{16} = 2 = \log_{11} 121 < \log_{11} 123$, то $\left(\sqrt[4]{15} - \log_{11} 123\right) < 0$ отже нерівність рівносильна системі :

$$\begin{cases} \log_{11}(x+1) \leq 0 \\ \log_{11}(x+1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_{11}(x+1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \\ x+1<1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x+1 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0.$$

Відповідь: $x \in (-1;0)$

III рівень

1. Розв'язати рівняння $2arctgx + \arccos\dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

▼*Розв'язок:* Очевидно, що $x = 0$.

$$2arctgx + \arccos\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2arctgx = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{3x}{2} \Rightarrow \left\langle \frac{\pi}{2} - \arccos x = arctg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right\rangle$$

$$2arctgx = arctg\,\frac{\frac{3x}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{3x}{2}\right)^2}} = arctg\,\frac{3x}{\sqrt{4-(3x)^2}} \Rightarrow$$

$$tg(2arctgx) = tg\left(arctg\,\frac{3x}{\sqrt{4-(3x)^2}}\right) \to \left\langle tg\,2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x} \right\rangle \to$$

$$\frac{2tg(arctgx)}{1-(tg(arctgx))^2} = tg\left(arctg\,\frac{3x}{\sqrt{4-(3x)^2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{3x}{\sqrt{4-(3x)^2}} \Rightarrow 2\sqrt{4-(3x)^2} = 3(1-x^2) \Rightarrow 4(4-9x^2) = 9(1-x^2)^2 \Rightarrow$$

$$16-36x^2 = 9-18x^2+9(x^2)^2 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow 9t^2+18t-7=0 \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{-18 \pm \sqrt{576}}{18} = \frac{-18 \pm 24}{18} \Leftrightarrow t_1 = \frac{1}{3};\ t_2 = -\frac{7}{3} \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x_3 = 0$$