

Міністерство освіти, науки, молоді та спорту України
Головне управління освіти і науки Миколаївської
облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України
Миколаївське районне наукове товариство учнів
«Мала академія наук»

Відділення: математики

Секція: математичне моделювання

ЦИКЛОЇДАЛЬНІ КРИВІ

Роботу виконав:

Копцев Євгеній Олександрович,
учень 11 класу
Миколаївського морського ліцею
імені професора М. Александрова
Миколаївської міської ради

Науковий керівник:

Піскунова Наталя Юріївна,
учитель математики
Миколаївського морського ліцею
імені професора М. Александрова;

Науковий консультант:

Меламуд Євген Євгенович,
Аспірант кафедри мат. аналізу

Миколаїв
2016

Міністерство освіти, науки, молоді та спорту України
Головне управління освіти і науки Миколаївської
облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України
Миколаївське районне наукове товариство учнів
«Мала академія наук»

Відділення: математики

Секція: математичне моделювання

ТЕЗИ ДО РОБОТИ

«ЦИКЛОЇДАЛЬНІ КРИВІ»

Підготував

учень 11 класу
Миколаївського морського ліцею
імені професора М. Александрова
Миколаївської міської ради
Копцев Євгеній Олександрович,

Науковий керівник:

Піскунова Наталя Юріївна,
учитель математики
Миколаївського морського ліцею
імені професора М. Александрова;

Науковий консультант:

Меламуд Євген Євгенович
Аспірант кафедри мат. аналізу

Тези

Науково-дослідницької роботи «Циклоїдальні Криві»

Автор: Копцев Євгеній Олександрович, учень 11 класу Миколаївського морського ліцею імені професора М. Александрова, м. Миколаїв Миколаївської області

Науковий керівник:

Піскунова Наталя Юріївна, вчитель математики ММЛ;

Науковий консультант:

Меламуд Євген Євгенович

Секція: математичне моделювання

Математика інтенсивно розвивається, досліджуються нові теми, виникають нові розділи, та деякі теми не використовують так, як можна було б використати і не досліджують, бо не вважають за потрібне.

Моя робота описує циклоїдальні криві, а також досліджує криві, так чи інакше, пов'язані з ними.

Метою роботи є дослідження кривих, що нині не досліджуються так, як раніше, однак часто зустрічаються в природі і можуть знадобитися для моделювання певних явищ.

Об'єм та структура роботи. Робота викладена на 21 сторінках комп'ютерного набору. Робота складається з трьох розділів і висновків:

1. Дослідження наукової літератури, присвяченої циклоїді та циклоїдальним кривим.
2. Кінематичне задання траєкторій точок рухомого сектору.
3. Дослідження траєкторій руху точки в системі кіл, що котяться одне по одному.

Результати проведених досліджень даної роботи такі:

- 1) узагальнено відомості наукової літератури про циклоїдальні криві, їх властивості;
- 2) виведено рівняння деяких траєкторій, досліджено їх властивості;
- 3) зроблено висновки про можливе використання циклоїдальних кривих та їх властивостей.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1 Основні теоретичні відомості про циклоїдальні криві.....	8
1.1 Циклоїдальні криві, теоретичні відомості про них.....	8
1.2 Властивості циклоїди.....	13
1.3 Застосування циклоїдальних кривих.....	13
Розділ 2 Частини круга.....	15
2.1 Сектор	15
2.2 Півкруг	19
Розділ 3 Системи кіл.....	20
3.1 Гіпоциклоїда 2 порядку.....	20
3.2 Гіпоциклоїда порядку n	22
Висновки.....	25
Список використаних джерел.....	26
Додатки.....	27

ВСТУП

Світ неминуче змінюється.

Змінюється і людство: нові наукові відкриття, нові течії в мистецтві. Поступово утворюються нові міждисциплінарні галузі.

Так чи інакше, одну з головних ролей в житті людини займає математика.

Математика інтенсивно розвивається, досліджуються нові задачі та методи їх розв'язання, виникають нові розділи, та деякі теми не використовують так, як можна було б використати і не досліджують, бо не вважають за потрібне.

Моя робота описує циклоїдальні криві, а також досліджує криві, так чи інакше, пов'язані з ними.

Існує ще немало випадків і задач, таких, як коло, кинуте під кутом до горизонту, яке рухатиметься по параболі і обертатиметься, а для більш точних моделей потрібно буде використовувати, не коло, а кільце з двома радіусами, що більш реалістично, та моя робота, сподіваюсь, дасть опору, від якої надалі можна відштовхуватись у моделюванні явищ і дослідженні подібних кривих.

Актуальність теми

Актуальність цієї теми в першу чергу пов'язана з розвитком комп'ютерного моделювання, що потребує виведення рівнянь траєкторій певних явищ, що не завжди просто. Часто потрібно скласти математичну модель певного явища, щоб вже спираючись на неї, вирішувати фізичні або астрономічні задачі.

Мета і завдання досліджень

Метою роботи є дослідження кривих, що часто зустрічаються в природі і можуть знадобитися для моделювання певних явищ.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі завдання:

- 1) узагальнення відомостей наукової літератури про циклоїдальні криві, їх властивості;
- 2) виведення рівнянь кривих, що мають схожий фізичний зміст з циклоїдальними;
- 3) аналіз отриманих рівнянь та їх графіків;
- 4) дослідження властивостей циклоїдальних кривих та їх можливого використання.

Об`єкт досліджень

Циклоїдальні та трохоїдальні криві, криві, геометричний та фізичний зміст яких близький до них.

Предмет досліджень

Траєкторії точок:

- а) частини рухомого кола, круга (півкруг, сектор, сегмент);
- б) системи рухомих кіл.

Методи досліджень:

- 1) Аналіз наукової літератури;
- 2) виведення рівнянь певних траєкторій;
- 3) аналіз, синтез і узагальнення відомих та отриманих в ході роботи даних;
- 4) дослідження за графіками властивостей кривих.

Наукова новизна одержаних результатів

У роботі досить докладно узагальнені відомості про циклоїдальні криві, наведені приклади використання існуючої досі інформації про них.

Під час дослідження виведено деякі рівняння, що описують задані фізично та геометрично траєкторії, встановлено коефіцієнти, від яких залежить зовнішній вигляд цих траєкторій.

Наведено ілюстровані приклади цих кривих та деякі задачі, розв'язком яких є отримані рівняння.

Практична цінність роботи

Результати проведених досліджень можуть бути використані:

- 1) на виробництві, де необхідні креслення деяких кривих;
- 2) для креслярської справи та вирішення задач на побудову (за допомогою спірографа та циркуля);
- 3) для комп'ютерного моделювання певних фізичних явищ.

Об'єм та структура роботи

Робота викладена на 21 сторінках комп'ютерного набору. Складається з вступу, огляду літератури, двох розділів досліджень та висновків.

Бібліографія

В переліку літератури наведено 6 джерел. Текст ілюстрований додатками.

Особистий внесок дослідника

Під керівництвом консультантів досліджено циклоїдальні криві, їх властивості, та рівняння.

Самостійно виконано аналіз літературних джерел, виведення більшості наведених в роботі рівнянь, дослідження залежності вигляду їх графіків від коефіцієнтів, а також сформульовані висновки роботи.

РОЗДІЛ 1

1.1. Циклоїдальні криві, теоретичні відомості про них.

Циклоїдальна крива – це плоска крива, що описує траєкторію точки, розміщеної на колі, що котиться без ковзання по будь-якій кривій.

Прийнято виділяти три основні циклоїдальні криві:

- Трохоїда
- Епітрохоїда
- Гіпотрохоїда

Частковими випадками цих кривих є відповідно циклоїда, епіциклоїда та гіпоциклоїда.

Трохоїда

Трохоїда – це крива, яку описує точка, закріплена на радіусі (продовженні радіуса) кола, що котиться по прямій без ковзання.

Параметричне рівняння трохойди:

$$x=rt-h\sin(t)$$

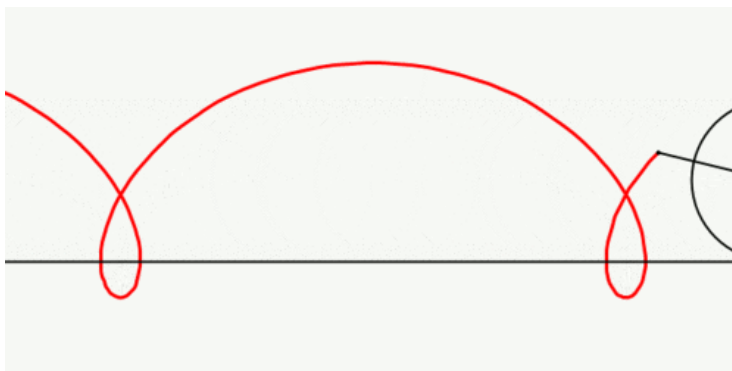
$y=r-h\cos(t)$, де h – «висота трохойди», відстань від точки до центра кола;

r – радіус кола;

t – параметр, кут, на який повертається коло.

В залежності від відношення висоти h до радіуса трохойду також називають укороченою або подовженою циклоїдою.

Циклоїда – це трохойда при $h=r$.

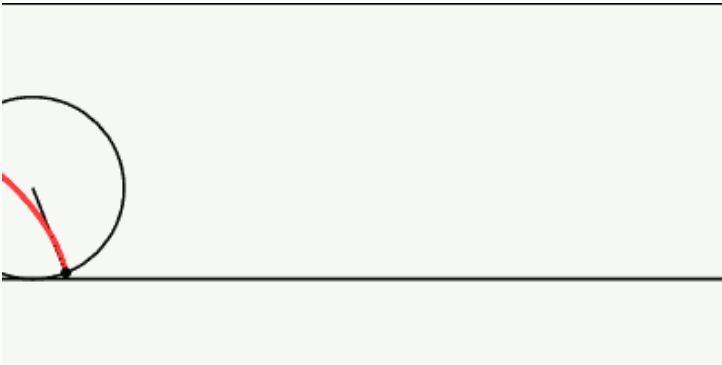


Подовжена циклоїда

$$r=1, h=1.5$$



Укорочена циклоїда
 $r=1, h=0.8$

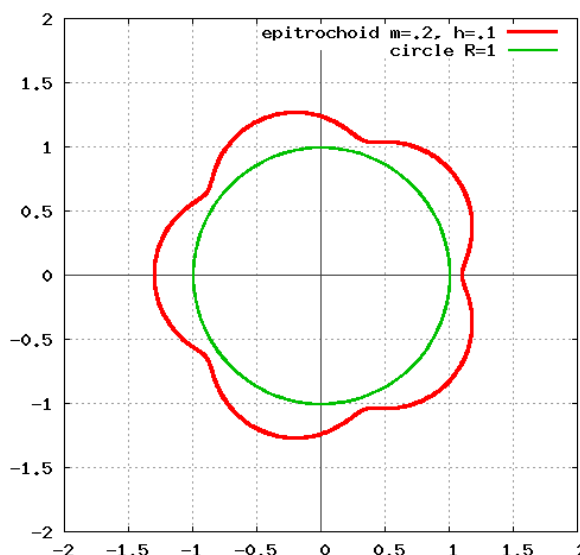
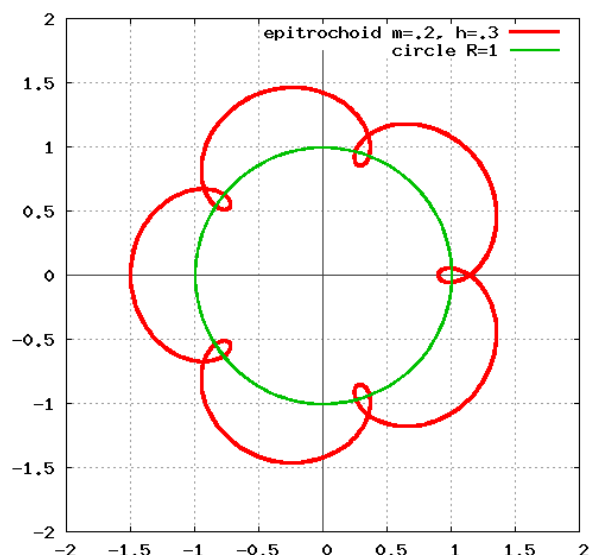


Циклоїда
 $x=r(t-\sin t);$
 $y=r(1-\cos t)$



Епітрохоїда

Епітрохоїда – це крива, яку описує точка, закріплена на певній відстані від центра кола, що котиться без ковзання по іншому колу ззовні.



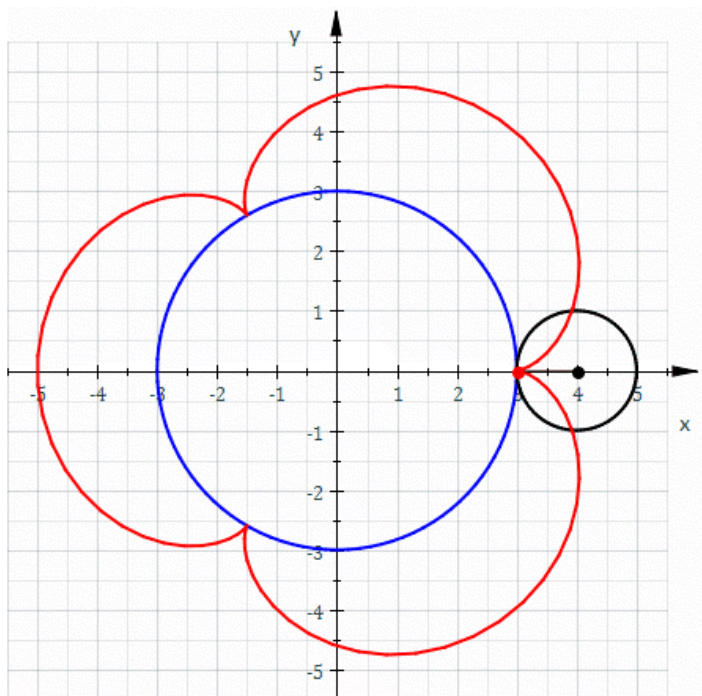
Рівняння епітрохіди має такий вигляд:

$$x = (R + r) \cos(t) - h \cos\left(\frac{R+r}{r} t\right); \quad , \quad \text{де } R - \text{ радіус нерухомого кола};$$

$$y = (R + r) \sin(t) - h \sin\left(\frac{R+r}{r} t\right). r - \text{ радіус кола, що котиться};$$

h – висота; t – значення центрального кута, що спирається на дугу рухомого кола, яка вже торкалась нерухомого.

Аналогічно до трохиї, епітрохіда при $r=h$ називається епіциклоїдою.

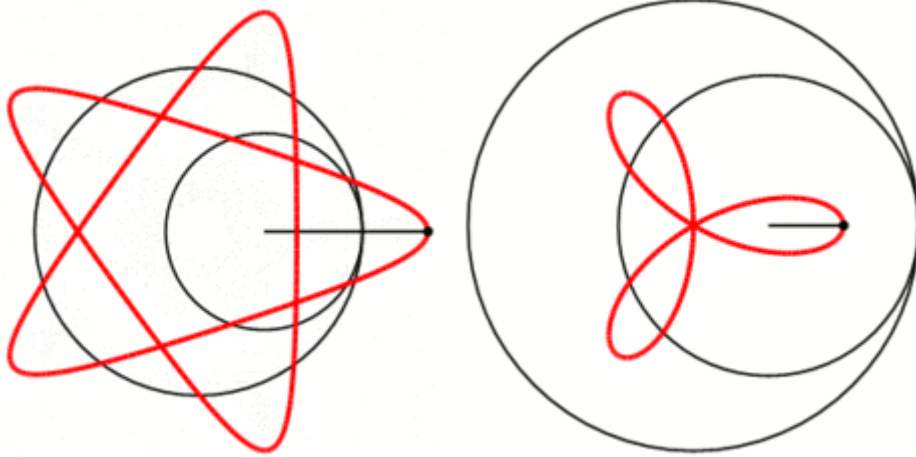


Для епітрохід та гіпотрохід часто вводиться коефіцієнт $k = \frac{R}{r}$.

Епіциклоїда при $k=3$.

Гіпотрохіда

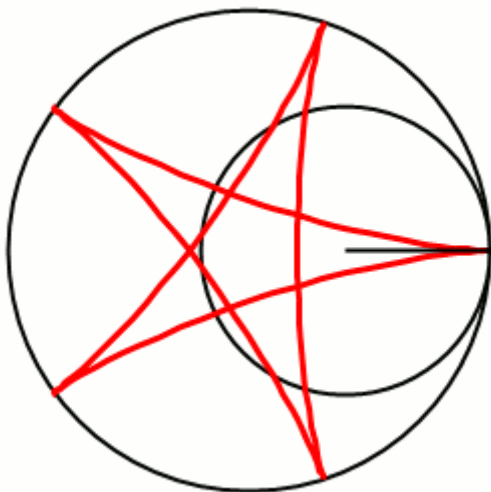
Гіпотрохіда – це крива, яку описує точка, закріплена на певній відстані від центра кола, що котиться без ковзання по іншому колу зсередини.



Рівняння гіпотрохоїди:

$$x = (R - r)\cos t + h\cos((k - 1)t);$$

$$y = (R - r)\sin t - h\sin((k - 1)t)., k = \frac{R}{r}.$$



$h=r$ – гіпоциклоїда.

Зауваження.

$$x = (R - r)\cos t + r\cos((k - 1)t);$$

$$y = (R - r)\sin t - r\sin((k - 1)t).$$

При $k=2$ рівняння задає діаметр нерухомого кола:

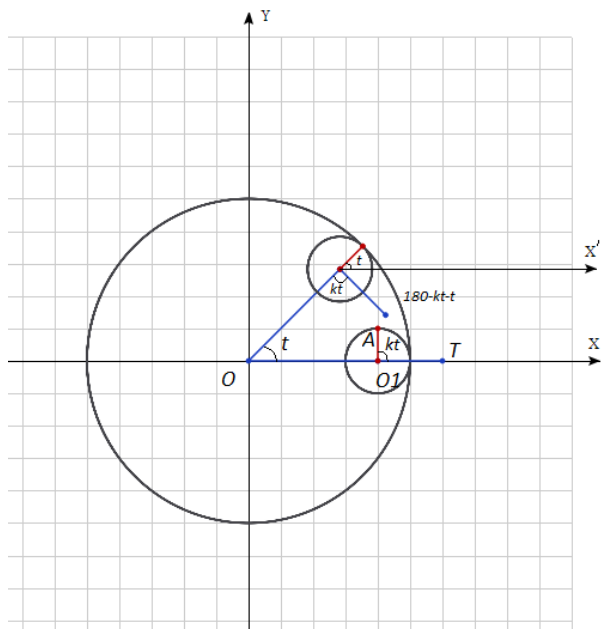
$$x = r\cos t + r\cos(t) = 2r\cos t = R\cos t;$$

$$y = r\sin t - r\sin(t)=0.$$

Якщо $k = \frac{m}{n}$ – нескоротний дріб, то m – кількість каспів (точок повернення),

а n – кількість повних обертів рухомого кола.

Оскільки моя робота ґрунтується на рівняннях і графіках, було б неправильно не записати вивід вище вказаних рівнянь.



Спочатку знаходимо рівняння траєкторії т. O1:

$$x=(R-r)\text{cost};$$

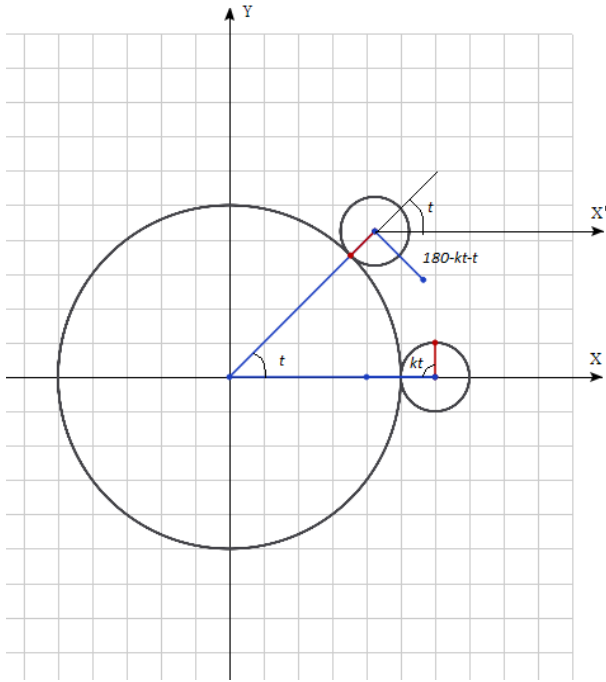
$$y=(R-r)\text{sint}.$$

Далі знаходимо координати точки T відносно т. O1 та додаємо їх до відомих координат т. O1.

$$x = (R - r)\text{cost} + h\text{cos}((k - 1)t);$$

$$y = (R - r)\text{sint} - h\text{sin}((k - 1)t), \quad k = \frac{R}{r}.$$

Аналогічно знаходимо й рівняння епітрохіди:



O1:

$$x = (R + r)\cos t$$

$$y = (R + r)\sin t$$

T:

$$x = (R + r)\cos t + h\cos(-(180^\circ - kt - t))$$

$$y = (R + r)\sin t + h\sin(-(180^\circ - kt - t))$$

$$x = (R + r)\cos t - h\cos(kt + t)$$

$$y = (R + r)\sin t - h\sin(kt + t)$$

1.2. Властивості циклоїди

У циклоїди є 2 основні властивості, які на мою

думку дуже цікаві й корисні.

1) Циклоїда є брахістохроною, тобто лінією найшвидшого спуску.

Це означає, що щоб за найменший можливий проміжок часу потрапити з точки А в точку В лише під дією сили тяжіння, тіло має рухатись по дузі циклоїди.

2) Таутохронність циклоїди:

Тіло, що має вагу, поміщене в будь-яку точку перевернутої арки циклоїди досягне горизонталі за один і той самий проміжок.

1.3. Застосування циклоїдальних кривих

1) Трохотрон- електронно-променевий перемикач, який використовує рух електронів по трохотроїдам в схрещених електричному і магнітному полях.

(мал.1) в додатку

Призначення: за допомогою трохотронів можливо здійснювати

- рахунок імпульсів (від одиниць до 10⁵ Гц),

- вимір проміжків часу тривалістю від одиниць мікросекунд до декількох хвилин,
- комутацію електричних ланцюгів,
- генерування імпульсів,
- імпульсну модуляцію і демодуляцію та ін.

2) Шестерна гідромашина

(патент 606006)

<http://www.findpatent.ru/patent/60/606006.html>

(Мал.2) в додатках

3) Спірограф

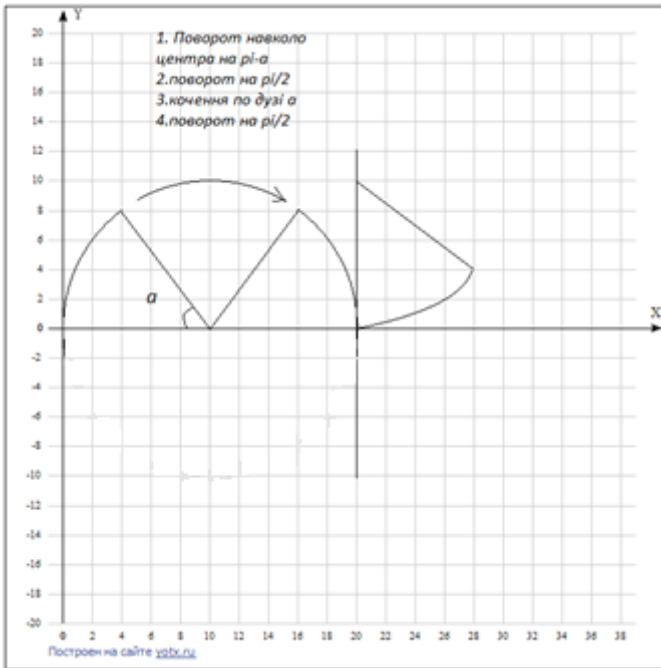
Фігура, отримана з допомогою простого спірографа – гіпотрохоїда, та якщо видозмінити спірограф, то можна з його допомогою креслити будь-які циклоїдальні криві, кола та траєкторії.(Мал.3-4 дод.)

Крім того, існує лазерний спірограф, який одразу виводить зображення без зайвих дій. Можливостей в нього більше, за допомогою нього можна креслити не тільки гіпотрохоїди, а й гіпоциклоїди, епітрохоїди і т.д.

(Мал.5 додаток)

РОЗДІЛ 2

2.1. Сектор

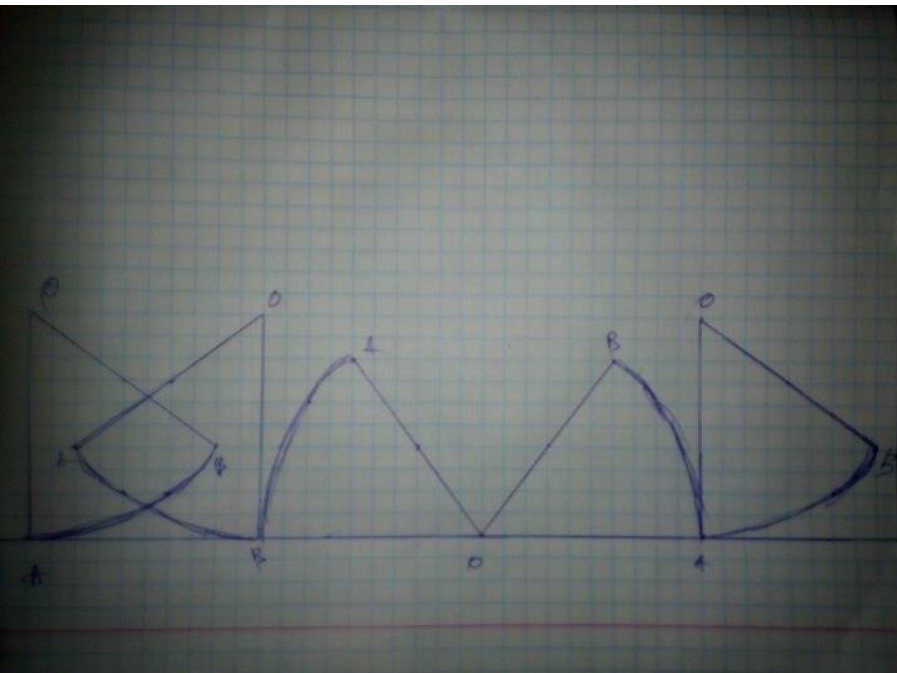


Розглянемо явище, яке умовно можна назвати «коченням» сектора.

Воно є рухом, який відбувається в 4 етапи.

Виведемо параметричні рівняння, що задаватимуть рух точки A , вважаючи заданими радіус R та центральний кут сектора α .

Розглянемо кожен з 4 етапів.



Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що рух починається з кочення, тобто в початковому стані сектор дотикається до прямої, по якій котитиметься точкою, що лежить на кінці дуги(т. A)

Розглянемо рівняння для двох точок, решта рівнянь виводяться

аналогічно.

Дослідимо рух т. A .

Рух будемо параметризувати через кут t між вектором \overrightarrow{OA} та його початковим положенням.

Етап 1.Кочення

Тут т. А описує дугу циклоїди, тобто її координати обчислюватимуться за формулами

$$\begin{cases} x = rt - rsint \\ y = r - rcost \end{cases};$$

при цьому t змінюється в межах від 0 до α включно.

Етап 2. Поворот навколо другого кінця дуги (т. В($r\alpha$;0)) на $\frac{\pi}{2}$. (одразу після кочення радіус ОВ перпендикулярний до прямої)

т. А описує дугу кола.

$$\begin{cases} x = r\alpha + k\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2} - t\right) \\ y = k\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2} - t\right) \end{cases};$$

$t \in \left(\alpha; \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$, де k – хорда сектора АВ.

$$k = r\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} = r\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$$

Етап 3. Поворот навколо т. О($r(\alpha+1)$;0) на $(\pi - \alpha)$.

Дуга кола з радіусом r .

Тут $t \in \left[\alpha + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} x = r(\alpha + 1) + r\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \\ y = r\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \end{cases};$$

Етап 4. Поворот навколо т. А ($r(\alpha + 2)$;0) на $\frac{\pi}{2}$ - тут т. А залишається нерухомою.

$$\begin{cases} x = r(\alpha + 2) \\ y = 0 \end{cases}$$

$$t \in \left(\alpha + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

Рух т. А періодичний вздовж осі ОУ періодичний з періодом $T=2\pi$. Це потрібно врахувати в рівняннях координат.

Отже, ми маємо рівняння, задане на таких проміжках:

$$1. t \in (2\pi n; \alpha + 2\pi n], n \in Z$$

$$\begin{cases} x = rt - rsint \\ y = r - rcost \end{cases}$$

$$2. t \in \left(\alpha + 2\pi n; \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in Z$$

$$\begin{cases} x = r\alpha + k\cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2} - t\right) \\ y = k\sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2} - t\right) \end{cases}$$

$$3. t \in \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right], n \in Z$$

$$\begin{cases} x = r(\alpha + 1) + r\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \\ y = r\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \end{cases}$$

$$4. t \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi(n + 1) \right], n \in Z$$

$$\begin{matrix} \text{точка} \\ \begin{cases} x = r(\alpha + 2) \\ y = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

Для $\alpha = \frac{\pi}{3}$ траєкторія т. А в дод. (Мал.6)

Траєкторія для т. О (центра)

Розглядаючи траєкторію центра(т. О), ми бачимо відрізок прямої. Це пояснюється означенням кола, як ГМТ, рівновіддалених від центра.

Таким чином ми знову маємо 4 етапи на тих самих проміжках:

Етап 1. Кочення

Відрізок прямої

$$\begin{cases} x = rt \\ y = r \end{cases}$$

$$t \in [2\pi n; \alpha + 2\pi n], n \in Z$$

Етап 2. Поворот на $\frac{\pi}{2}$ навколо т. В($r\alpha;0$)

Дуга кола

$$\begin{cases} x = r\alpha + r \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - t\right) = r\alpha - r \sin(\alpha - t) \\ y = r \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - t\right) = r \cos(\alpha - t) \end{cases}$$

$$t \in \left(\alpha + 2\pi n; \alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$$

Етап 3. Поворот на $\pi - \alpha$ навколо т. О($r(\alpha + 1);0$)

Точка

$$\begin{cases} x = r\alpha + r \\ y = 0 \end{cases}$$

$$t \in \left[\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in Z$$

Етап 4. Поворот навколо т. А ($r(\alpha + 2);0$) на $\frac{\pi}{2}$

Дуга кола

$$\begin{cases} x = r(\alpha + 2) + r \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r(\alpha + 2) + r \sin(t) \\ y = r \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = r \cos t \end{cases}$$

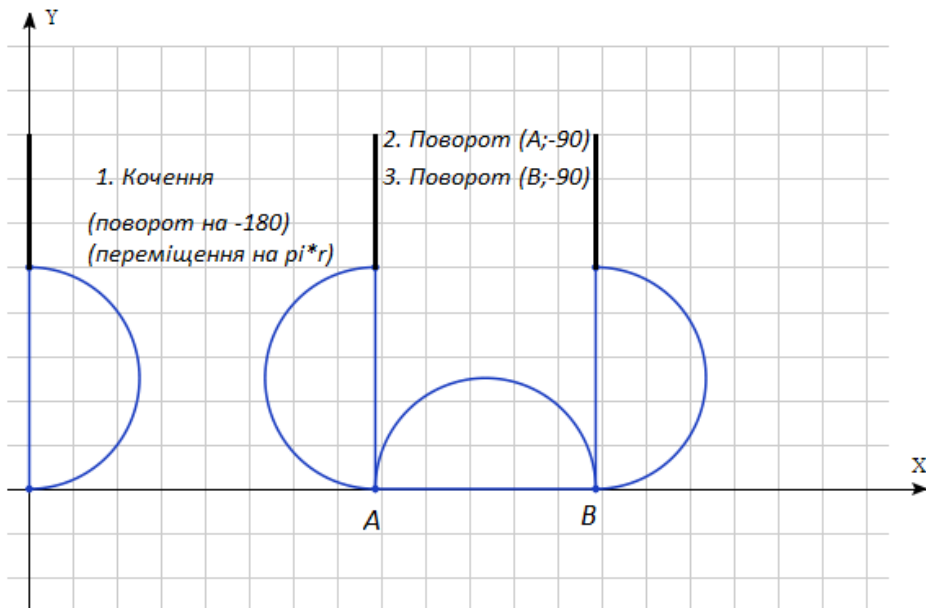
$$t \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi(n + 1)\right), n \in Z$$

Якщо розглядати іншу точку, віддалену від центра на певну відстань то ми матимемо трохоїду. Звідси маємо, що трохоїда з висотою $h=0$ – це пряма.

2.2. Півкруг

Розглянемо явище кочення для півкруга:

Його умовно можна поділити не на 4, а на 3 етапи:



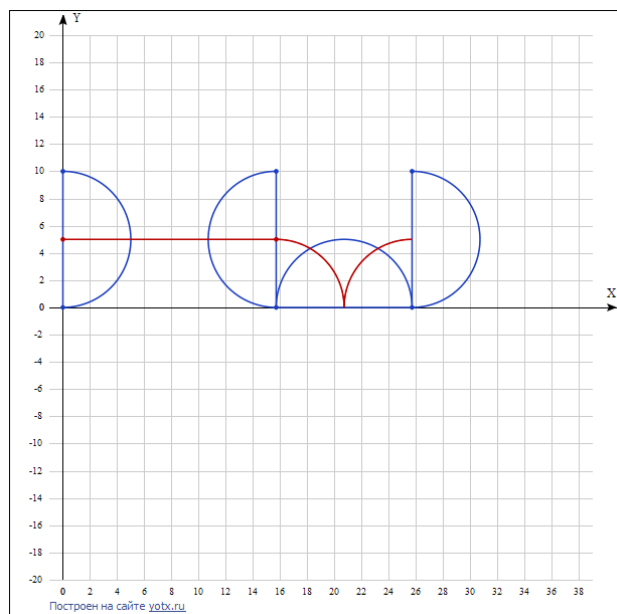
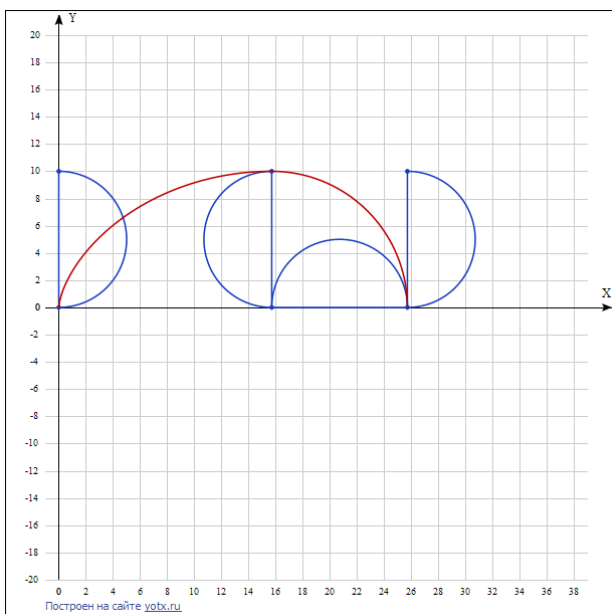
- Безпосередньо кочення
- Поворот навколо т. А на $\pi/2$
- Поворот навколо т. В на $\pi/2$

Як ви можете побачити, третій етап руху для сектора для півкруга відсутній.

Це пояснюється тим, що кут

$$\text{повороту дорівнює } 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 180^\circ = 0$$

Отже, ми матимемо рівняння кола, циклоїди або трохоїди, в залежності від того, яку точку ми досліджуватимемо та який процес відбувається з сектором. (Приблизний вигляд можливих траєкторій інших точок для півкруга та сектора при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ в додатку Мал.№7-12)



РОЗДІЛ 3

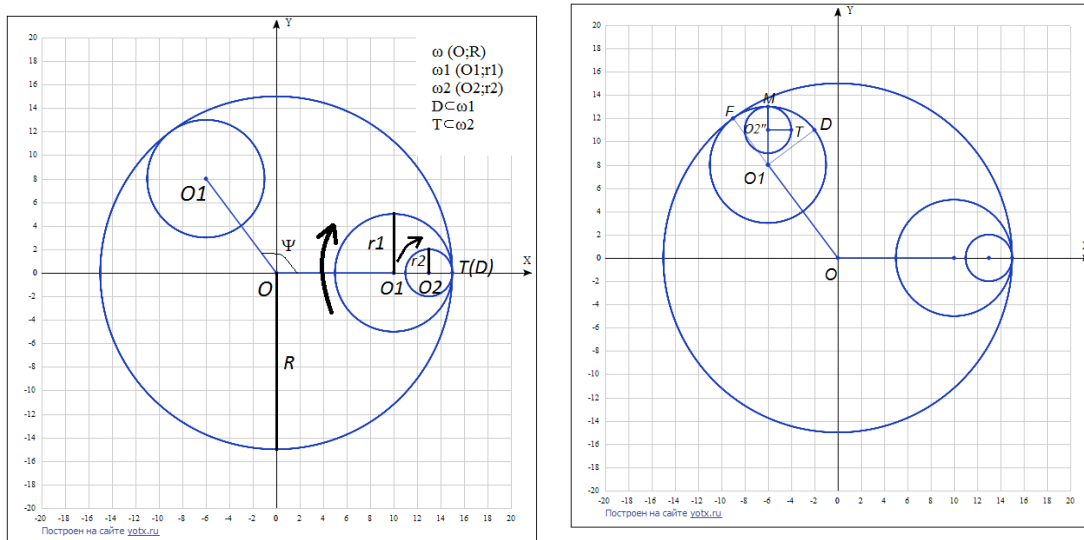
3.1 Циклоїдальні криві 2 порядку

Тепер розглянемо такий випадок:

Коло(1) котиться всередині кола(0), а в ньому котиться коло(2).

Таким чином, траєкторію, що ми шукатимемо можна умовно назвати гіпоциклоїдою другого порядку.

Отже, розглянемо вивід рівняння цієї кривої:



(Проміжні ілюстрації в додатках мал. 13-16)

O_1 :

$$x = (R - r_1)\cos(\omega_1 t)$$

$$y = (R - r_1)\sin(\omega_1 t)$$

, де ω_1 – кутовашвидкість обертання т. O_1 навколо нерухомої т. O .

т. O_2' лежить на O_1D , т. O_2' була б центром кола ω_2 , якби воно не котилось.

O_2' :

$$x = (R - r_1)\cos(\omega_1 t) + (r_1 - r_2)\cos\left(\omega_1 t - \omega_1 \frac{R}{r_1} t\right)$$

$$y = (R - r_1) \sin(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \sin(\omega_1 t - \omega_1 \frac{R}{r_1} t)$$

т. O_2'' - реальний центр рухомого кола $\omega_2 \cdot O_2''$:

$$x = (R - r_1) \cos(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \cos(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t)$$

$$y = (R - r_1) \sin(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \sin(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t)$$

, ω_2 – кутова швидкість т. O_2 ;

k_1 – відношення радіуса нерухомого кола R до радіуса 1 рухомого кола r_1

Отже, тепер знайдемо координати т. T :

$$x = (R - r_1) \cos(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \cos(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t) + r_2 \cos(t(\omega_1(1 - k) + \omega_2(1 - k)))$$

$$y = (R - r_1) \sin(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \sin(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t) + r_2 \sin(t(\omega_1(1 - k) + \omega_2(1 - k)))$$

$$x = (R - r_1) \cos(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \cos(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t) + r_2 \cos(t(1 - k)(\omega_1 + \omega_2))$$

$$y = (R - r_1) \sin(\omega_1 t) + (r_1 - r_2) \sin(\omega_1 t(1 - k_1) + \omega_2 t) + r_2 \sin(t(1 - k)(\omega_1 + \omega_2))$$

Завв.

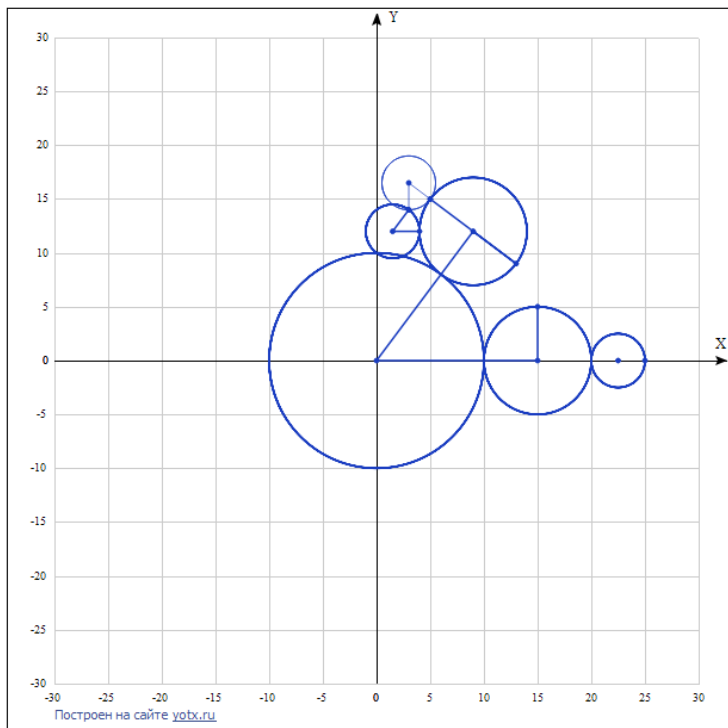
При $\omega_1 = 0$ маємо гіпоциклоїду 1 порядку з $R = r_1$; $r = r_2$

При $\omega_2 = 0$ $R = R$; $r = r_1$

При $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1}{k_2}$ гіпоциклоїду з $R = R$; $r = r_2$

Приклади гіпоциклоїди 2 порядку в дод. (Мал. 21-27)

Аналогічно можна вивести рівняння епіциклоїди(епітрохоїди) 2 порядку:



$$\begin{aligned}
 x &= (R + r_1)\cos\omega_1 t \\
 &\quad + (r_1 + r_2) \cos t(\omega_1(k_1 + 1) \\
 &\quad + \omega_2) + r_2 \cos t(\omega_1(k_1 + 1) \\
 &\quad + \omega_2(k_2 + 1)) \\
 y &= (R + r_1)\sin\omega_1 t \\
 &\quad + (r_1 + r_2) \sin t(\omega_1(k_1 + 1) \\
 &\quad + \omega_2) + r_2 \sin t(\omega_1(k_1 + 1) \\
 &\quad + \omega_2(k_2 + 1))
 \end{aligned}$$

3.2 Циклоїдальні криві порядку n

В ході досліджень циклоїдальних кривих 1 та 2 порядку а також спроб виводу рівнянь циклоїдальних кривих вищого порядку, я помітив деяку циклічність у рівняннях, а тому припустив, що можливо скласти рівняння будь-якої циклоїдальної кривої порядку n, де n – натуральне число.

Розглянемо вивід рівняння на прикладі гіпоциклоїди порядку n.

Оскільки рівняння для x(t) та y(t) відрізняються тільки тригонометричними функціями, розглянемо саме рівняння x(t), рівняння для y виводитиметься аналогічно.

За припущенням,

$$\begin{aligned}x_n = & (R - r_1)\cos\omega_1 t + (r_1 - r_2) \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots \\ & + (r_{n-1} - r_n) \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{n-1}(1 - k_{n-1}) + \omega_n) \\ & + r_n \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_n(1 - k_n))\end{aligned}$$

Отже, ми бачимо зміну рівняння при заміні n-1 на n:

$$\begin{aligned}x_n = & x_{n-1} - r_n \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{n-1}(1 - k_{n-1}) + \omega_n) \\ & + r_n \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_n(1 - k_n))\end{aligned}$$

Доведемо це Методом Математичної Індукції:

1) Для n=1

$$x = (R - r_1)\cos\omega_1 t + r_1 \cos\omega_1 t(1 - k_1)$$

Оскільки ми маємо тільки одну кутову швидкість, зміна якої не впливає на зовнішній вигляд графіка рівняння, а тільки на швидкість його побудови, вважатимемо, що $\omega_1 = 1$

Отримуємо:

$$x = (R - r)\cos t + r\cos t(1 - k)$$

(Аналогічно $y = (R - r)\sin t + r\sin t(1 - k)$)

Врахувавши парність(непарність) функцій косинуса та синуса, отримуємо:

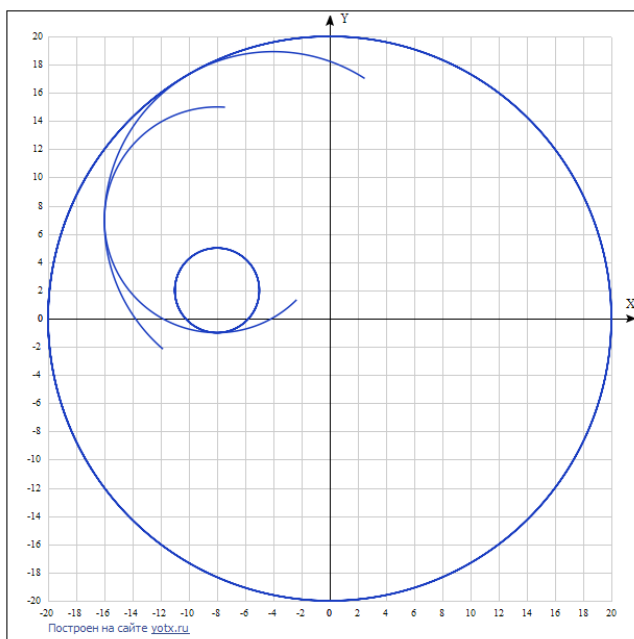
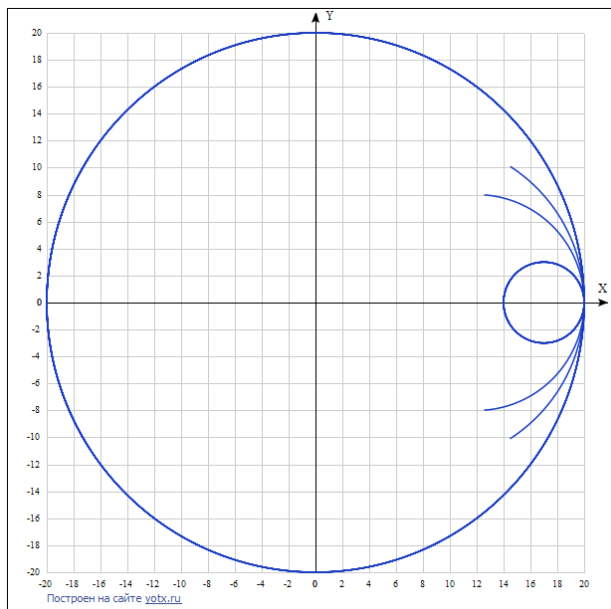
$$x = (R - r)\cos t + r\cos t(k - 1)$$

($y = (R - r)\sin t - r\sin t(k - 1)$)

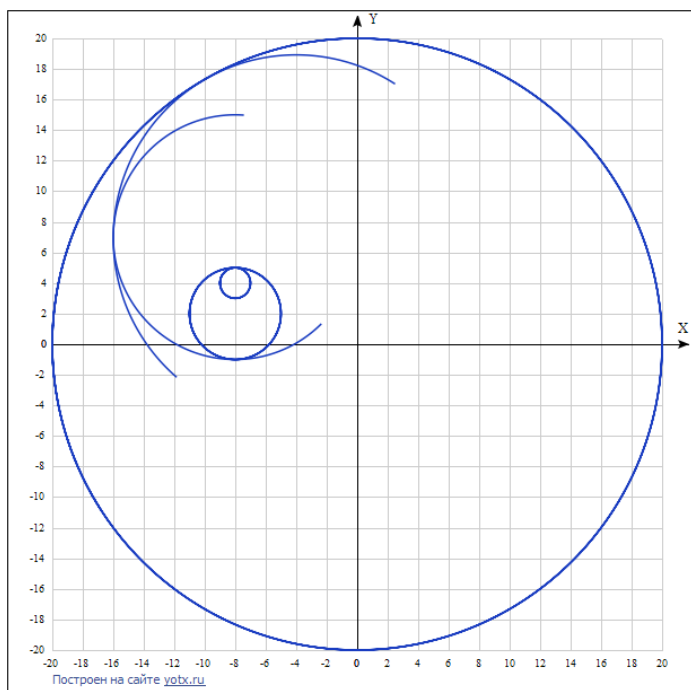
- загальновідоме рівняння гіпоциклоїди.

2) Нехай для $n=s$ виконується формула

$$x_s = (R - r_1)\cos\omega_1 t + (r_1 - r_2)\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots + (r_{s-1} - r_s)\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{s-1}(1 - k_{s-1}) + \omega_s) + r_s\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_s(1 - k_s))$$

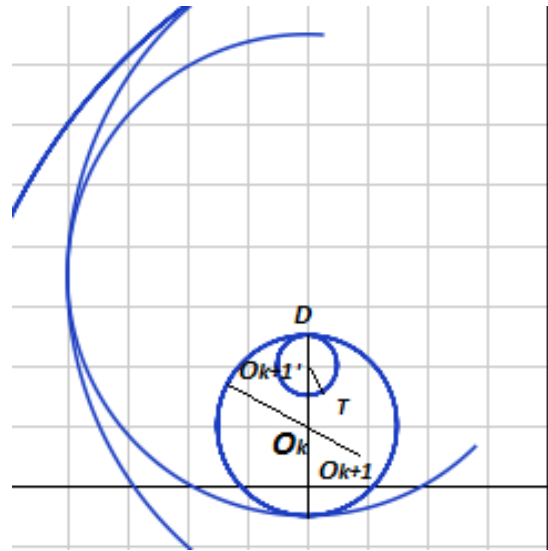
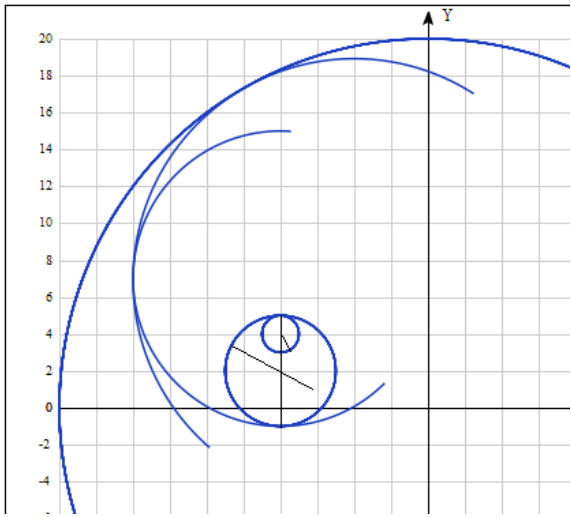


3) Тоді при $n=s+1$



Аналогічно до рівняння гіпоциклоїди 2 порядку знаходимо координати т. O_{s+1} :

$$x_{O_{s+1}} = (R - r_1)\cos\omega_1 t + (r_1 - r_2)\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots + (r_{s-1} - r_s)\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{s-1}(1 - k_{s-1}) + \omega_s) + r_s\cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_s(1 - k_s) + \omega_{s+1})$$



$$TO'_{s+1}D = \omega_{s+1}k_{s+1}t$$

Тепер знаходимо координати т. Т:

$$\begin{aligned} x_{s+1} = & (R - r_1)\cos\omega_1 t + (r_1 - r_2) \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots \\ & + r_s \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_k(1 - k_s) + \omega_{s+1}) \\ & + r_{s+1} \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_s(1 - k_s) + \omega_{s+1}(1 - k_{s+1})) \end{aligned}$$

Як ми можемо побачити,

$$\begin{aligned} x_{s+1} = & x_s - r_s \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_s(1 - k_s) + \omega_s) \\ & + r_{s+1} \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{s+1}(1 - k_{s+1})) \end{aligned}$$

Отже, ми довели, що для будь-якого натурального n гіпоциклоїду порядку n можна задати рівнянням вигляду

$$\begin{aligned} x_n = & (R - r_1)\cos\omega_1 t + (r_1 - r_2) \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots \\ & + (r_{n-1} - r_n) \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{n-1}(1 - k_{n-1}) + \omega_n) \\ & + r_n \cos t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_n(1 - k_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n = & (R - r_1)\sin \omega_1 t + (r_1 - r_2) \sin t(\omega_1(1 - k_1) + \omega_2) + \dots + (r_{n-1} - \\ & r_n) \sin t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \omega_{n-1}(1 - k_{n-1}) + \omega_n) + r_n \sin t(\omega_1(1 - k_1) + \dots + \\ & \omega_n(1 - k_n)) \end{aligned}$$

ВИСНОВКИ

Отже, в ході виконання роботи було досліджено основні властивості циклоїди та циклоїдальних кривих, геометричний зміст циклоїдальних кривих.

Мені вдалося зібрати достатньо інформації, синтезувати її, скласти необхідні рівняння та зробити певні висновки.

Було виведено рівняння гіпоциклоїди 2 порядку та порядку n та кінетично задано деякі криві, що частково складаються з циклоїдальних.

Результати досліджень можуть бути використані для вирішення фізичних задач, для комп'ютерного моделювання певних кінетичних явищ.

Надалі, від цієї роботи можна буде відштовхуватись і в майбутньому я хотів би дослідити та пов'язати з цією темою поняття еволюти, вивести рівняння, які ще не вивів, наприклад, для кола, що котиться по прямій, нахиленій відносно осей, скласти й записати решту рівнянь для різних точок сектора та сегмента, дослідити спіралі та пов'язати їх з циклоїдальними кривими.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ТА ЛІТЕРАТУРИ

ЕРАСОВ Ф. Н. Шестеренная гидромашина внутреннего зацепления. Патент.:
Электронный ресурс. <http://www.findpatent.ru/patent/60/601456.html>

Берман Г.Н. Циклоида. – М., 1980, 200 с.

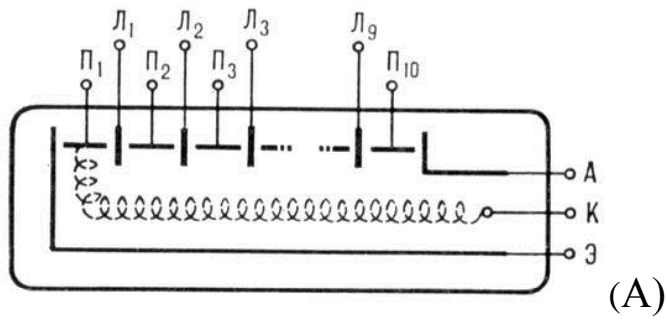
Веров С. Касательные к рулеттам. – Квант, 1975, № 5, с. 22-30.

Веров С. Тайны циклоиды. – Квант, 1975, № 8, с. 19-27.

Веров С. Брахистохрона, или Еще одна тайна циклоиды. – Квант, 1975, № 12,
с. 29-35.

Смирнова И.М., Смирнов В.А. Кривые. – М.: Мнемозина, 2007.

ДОДАТКИ

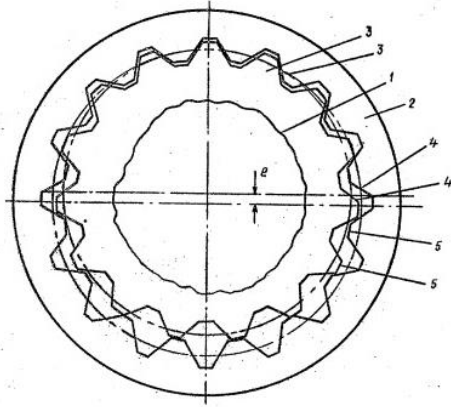


Мал.1

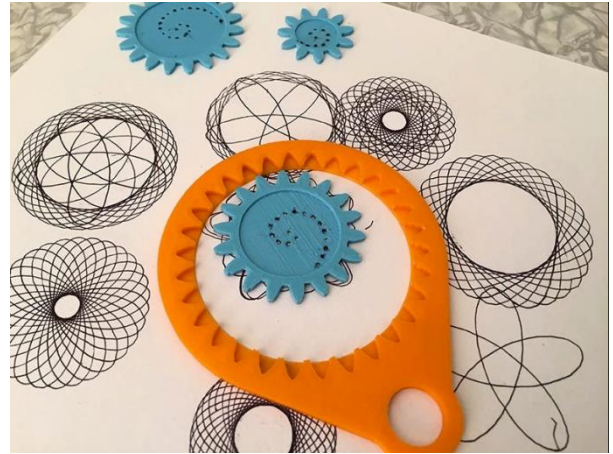
3 606006 4

боковых участков зубьев очерчен по эвольвенте, а участки контакта зубьев при их вершинах одной шестерни выполнены в форме части кругового профиля, а другой – очерчены по эквидистанте циклоиды.

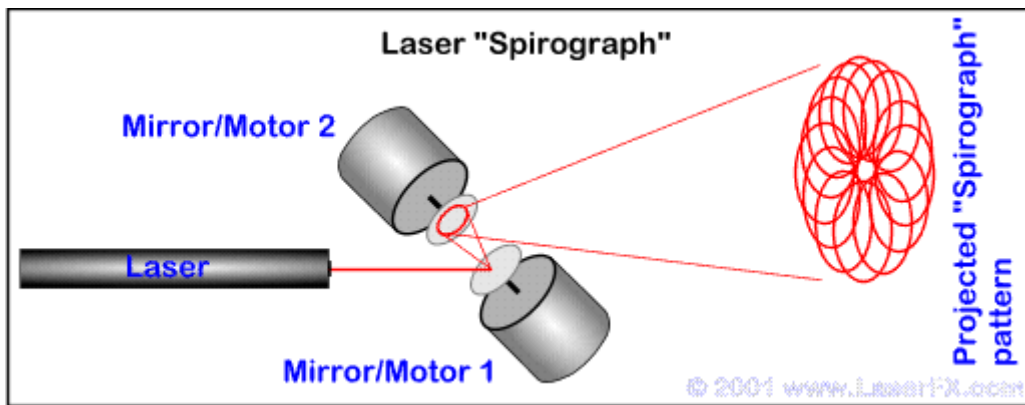
Источники информации, принятые во внимание при экспертизе:
1. Бириков Б.Н. Роторно-поршневые гидравлические машины, М., "Машиностроение", 1972, с.25, рис.17.



мал.2

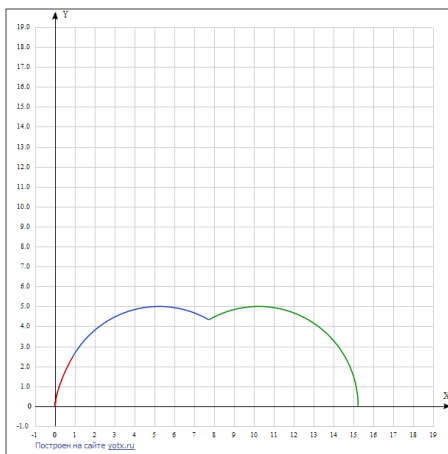


Мал. 3-4



Мал. 5

Траєкторія точки А на секторі при $\alpha = \frac{\pi}{3}$



(Мал.6)

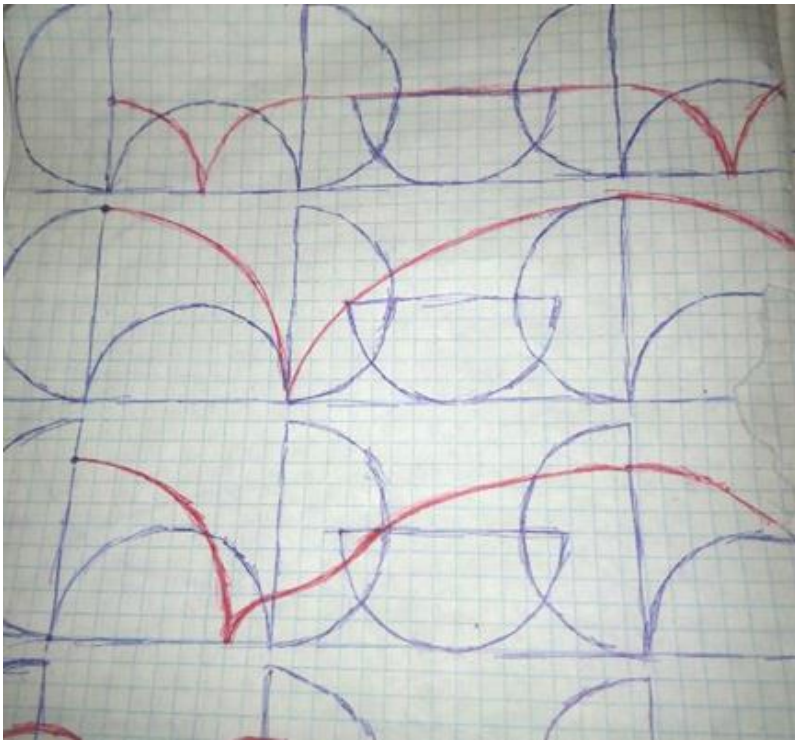
Траєкторії точок півкруга:(Б)

1) Якщо т. лежить на діаметрі (не О, А або В), то траєкторією буде крива, що складатиметься з дуг кола та відрізків трохоїди.

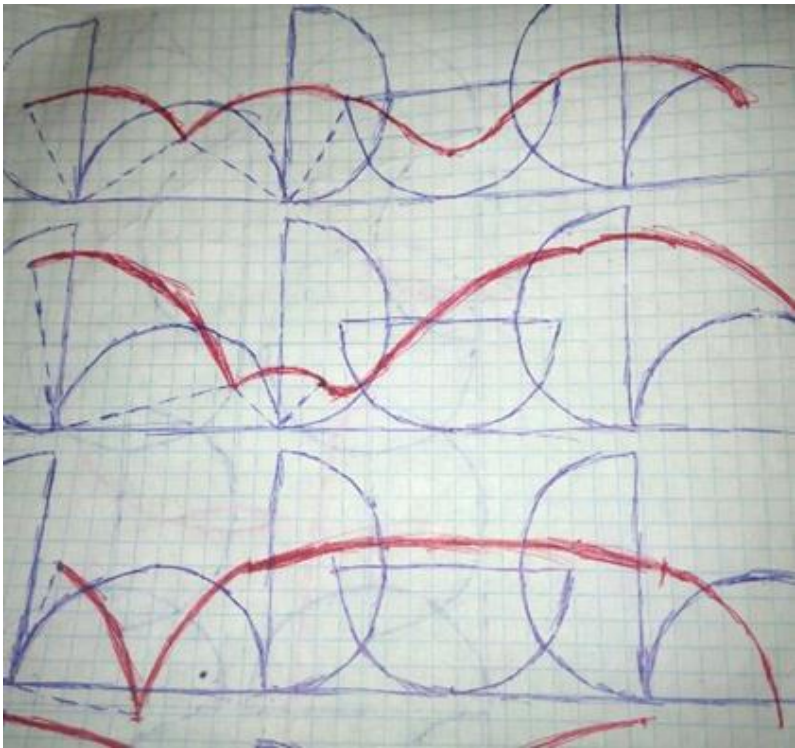
2) Якщо т. лежить на дузі, то траєкторія складатиметься з дуг кола та відрізків циклоїди.

3) Якщо т. буде закріплена всередині чи зовні півкруга, то матимемо відрізки трохоїди й дуги кіл.

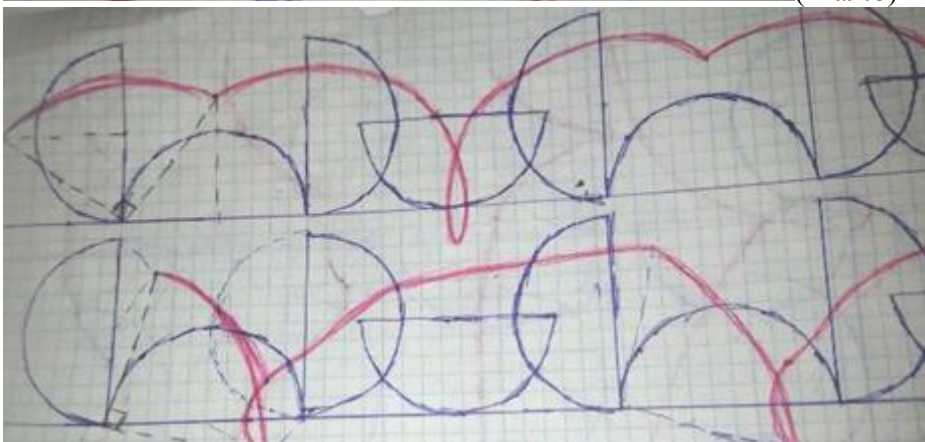
Деякі траєкторії для півкруга:



(Мал.7)

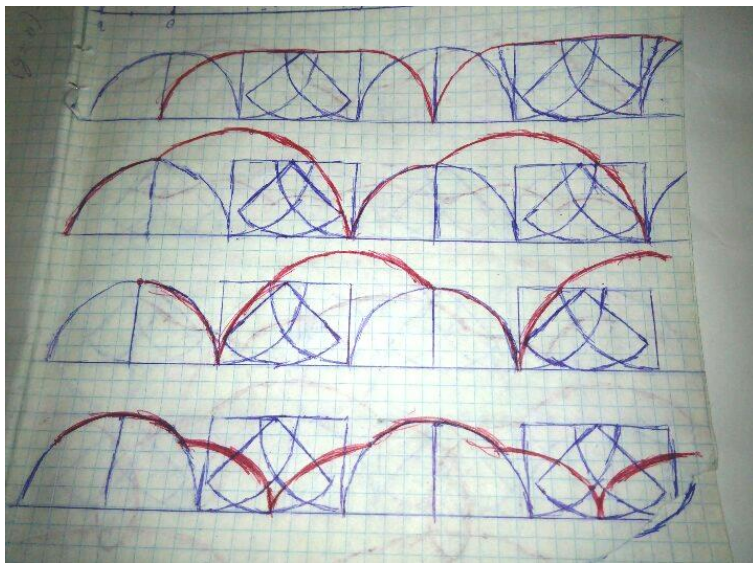


(Мал.8)

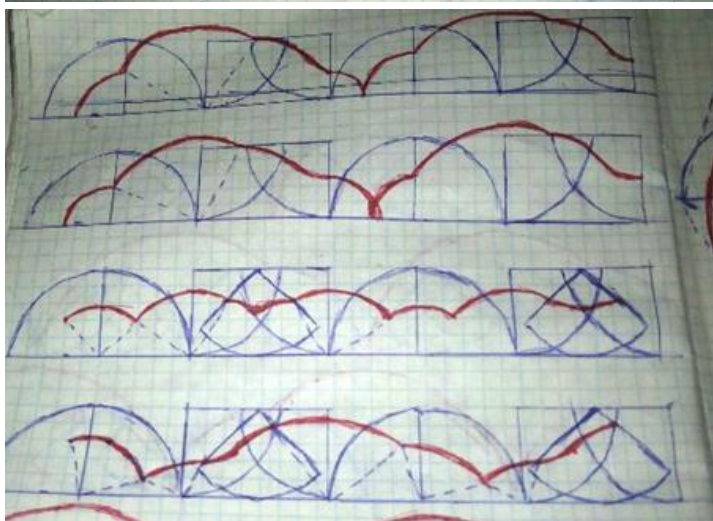


(Мал.9)

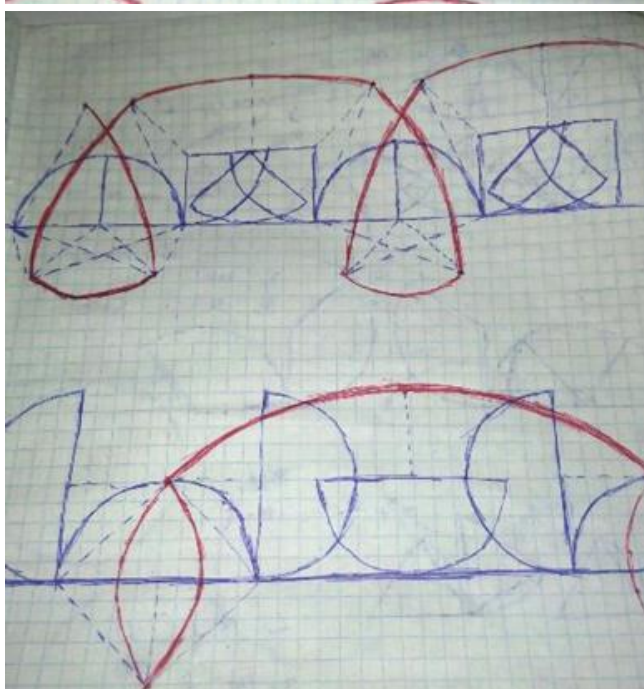
Для чверті круга: (В)



(Мал.10)

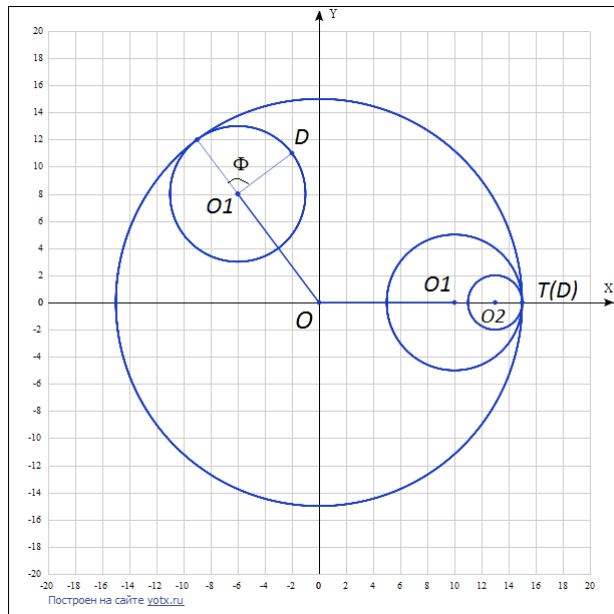
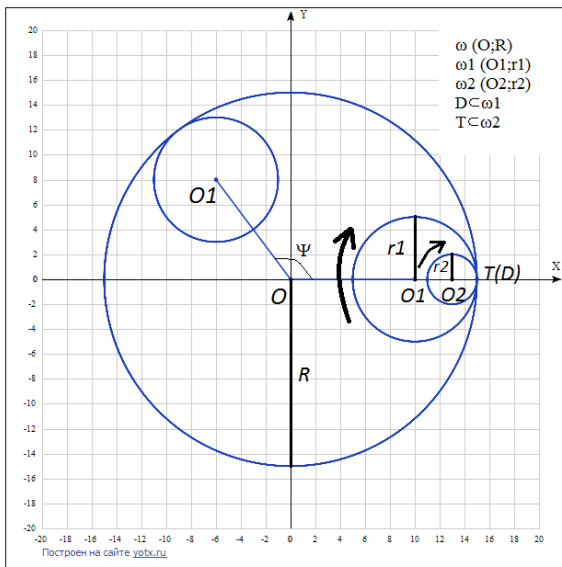


(Мал.11)



(Мал. 12)

Вивід рівняння гіпоциклоїди 2 порядку:(Γ)

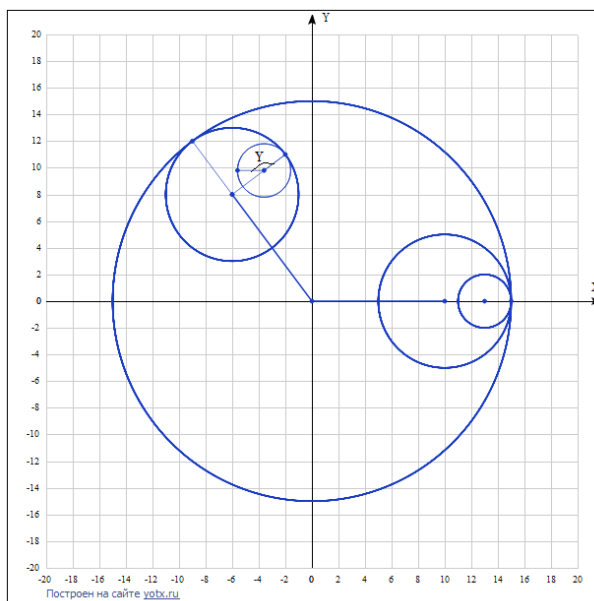
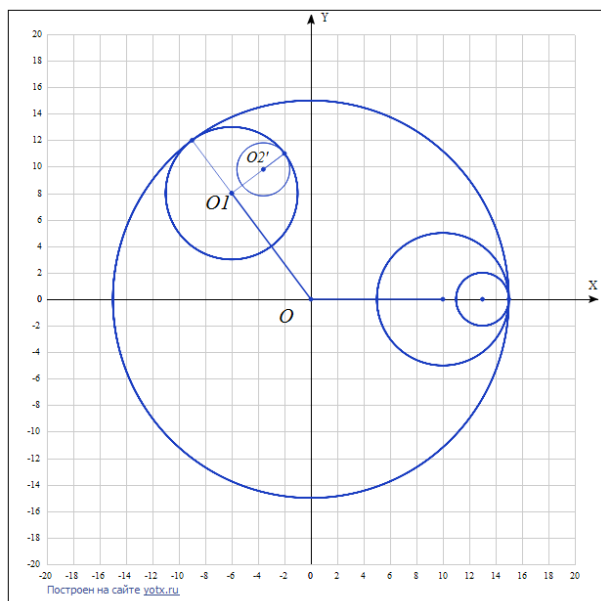


Мал.13-14

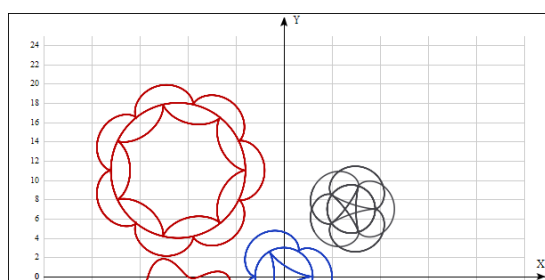
$$\Psi = \omega_1 t$$

$$\Phi = k_1 \omega_1 t$$

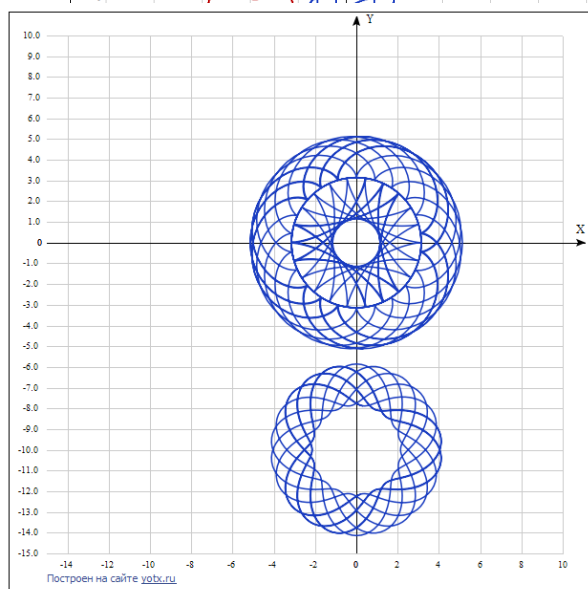
$$Y = k_2 \omega_2 t$$



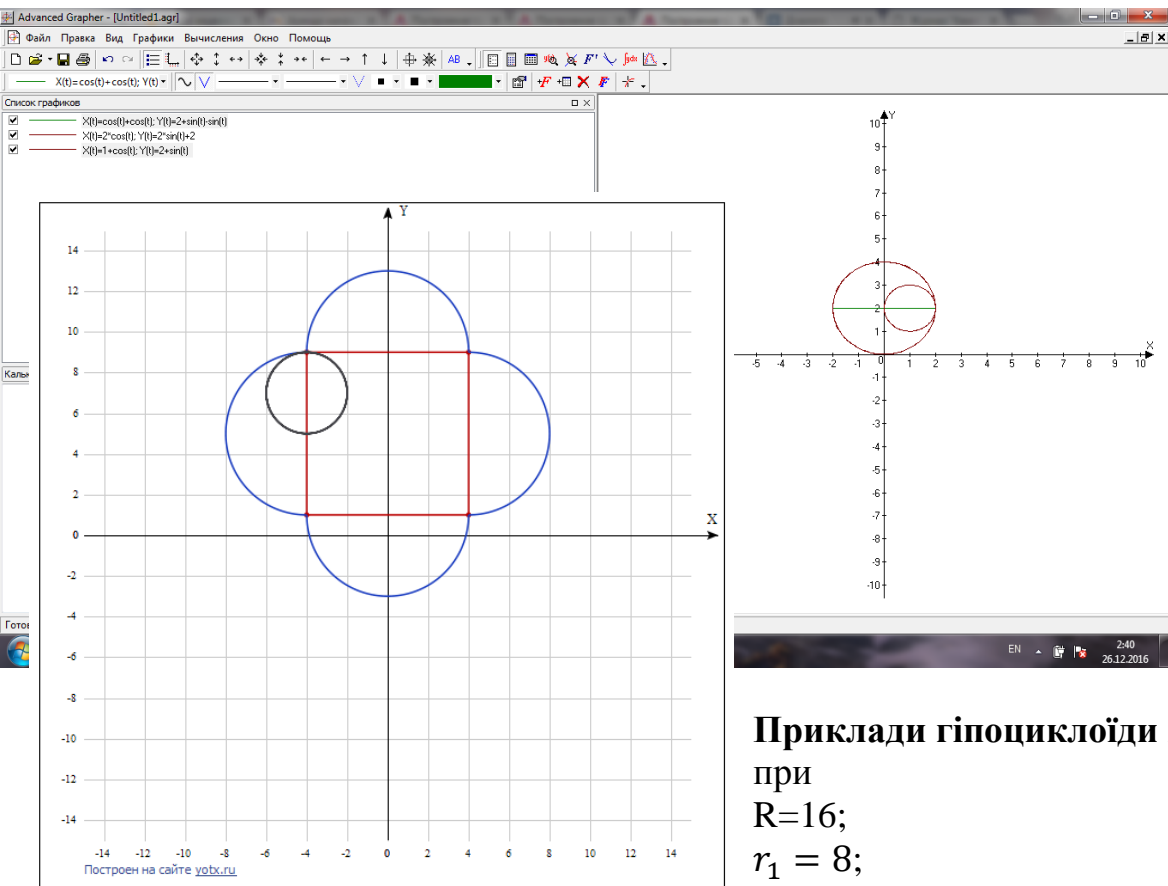
Гіпоциклоїди, епіциклоїди та криві, координати яких є їх середнім арифметичним:(Д)



$k=7$ (черв.)
 $k=3$ (син.)
 $k=2.5$ (чор.)

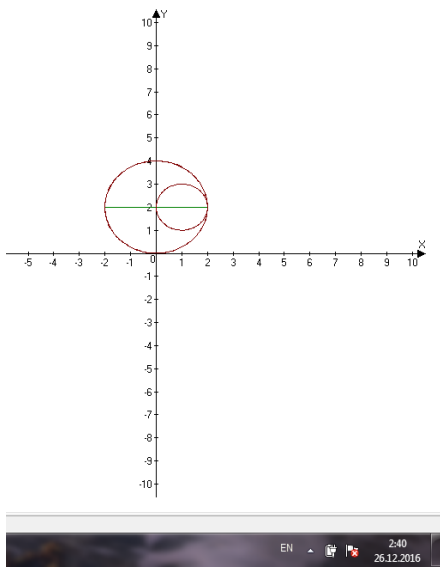


(Мал.17-18)



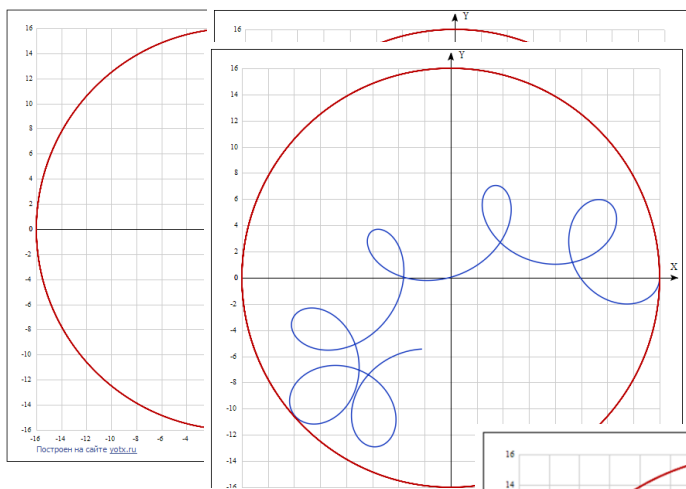
(Мал.19)

Гіпоциклоїда при $k=2$ описує діаметр нерухомого кола.

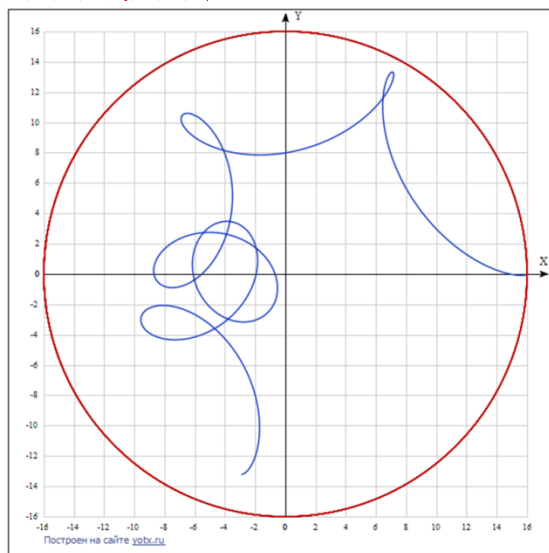
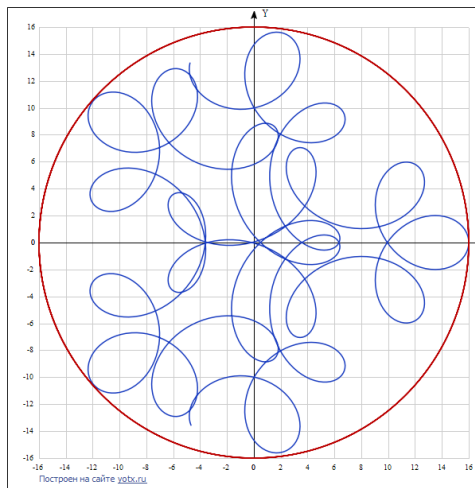


(Мал.20)

Приклади гіпоциклоїди 2 порядку при $R=16$;
 $r_1 = 8$;
 $r_2 = 3$;
 $\omega_2 = 4\omega_1$.



(Мал.21-24)



при $R=16$;
 $r_1 = 8$;
 $r_2 = 3$;
 $\omega_2 = 3\omega_1$.

(Мал.25-27)

