МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ
МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

ІІ етап Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт
Відділення: математика
Секція: математики

Доведення нестандартних нерівностей (на основі матеріалів Всеукраїнських олімпіад, інтернет-олімпіад та математичних турнірів)

Роботу виконав:
Мельніков Віктор,
учень 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму

Науковий керівник:
Крисинська Ірина Володимирівна,
Завідуюча кафедрою математики Миколаївського муніципального колегіуму,
вчитель-методист.

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики.

Миколаїв 2013

Зміст

Вступ

У підручниках з математики стандартного рівня переважають задачі із заданим алгоритмом розв’язання. Це не спонукає до вивчення математики, нав’язує стереотип формалізації та «завченості» цієї науки. Учні не вивчають суть математичного вчення, а заучують певні алгоритми розв’язування задач.

У олімпіадах різноманітного рівня, а також у престижних математичних змаганнях як математичні бої або математичні турніри, стандартні підходи до розв’язування задач зіграють неприємний жарт для учнів, що їх використовують. Справді, дуже і дуже рідко на цих заходах подають завдання, що розв’язуються стандартним шляхом. Втім, якщо таке трапляється, нестандартні методи дозволяють значно скоротити час на розв’язання.

Усе вищесказане підтверджує актуальність розв’язання нестандартних задач. Задачу вважаймо нестандартною, якщо не має алгоритму її вирішення.

Одна із відомих тем у олімпіадній та турнірній практиці – нерівності. Ця робота *має на меті* дослідити деякі методи доведення нестандартних нерівностей.

Об’єктом дослідження є деякі задачі, що були представлені у різних математичних заходах різного рівня складності.

Особистий внесок полягає у знаходженні власного розв’язання до переважної більшості представлених задач, сформуванні і доведенні узагальнення до задачі «Оцінка суми», що була представлена у XV Всеукраїнського турніру юних математиків.

Розділ 1. Деякі класичні нерівності.

Говорячи про нерівності, частіше мають на увазі завдання типу доведення певної нерівності. Існують такі основні методи доведення нерівностей: метод різниці, метод спрощення нерівності, метод від супротивного та метод застосування раніше доведеної нерівності. У цій роботі розглянемо саме останній.

Безумовно, існує багато нерівностей, які часто використовуються. Їх ще називають класичними, тобто мають на увазі, що вони загальновідомі, не потребують повторного доведення. Наведемо такі приклади класичних нерівностей:

Нерівність трьох квадратів: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ac$.

Нерівність Коші-Буняковського: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$.

Нерівність Єнсена: для опуклої вгору функції f з її області визначення справджується наступна нерівність:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n},$$

якщо ж функція опукла вниз, знак нерівності змінюється.

Це лише маленька частина класичних нерівностей. У цій роботі пропоную зупинитися на наступних нерівностях.

1.1. Наслідок з теореми Коші-Буняковського

Сформулюємо цей наслідок. Для будь-яких $b_1, b_2, ..b_n > 0$ виконується наступна нерівність:

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+..+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+..+a_n)^2}{b_1+b_2+..+b_n} \qquad (1)$$

Доведення:

Розглянемо такі два набори:

$\sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, .., \sqrt{b_n}$ і відповідно $\sqrt{\frac{a_1^2}{b_1}}, \sqrt{\frac{a_2^2}{b_2}}, .., \sqrt{\frac{a_n^2}{b_n}}$.

Застосуємо теорему Коші-Буняковського:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geq (\sum_{i=1}^{n}|a_i|)^2$$

Оскільки $\sum_{i=1}^{n}|a_i| \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$, запишемо: $\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)^2$.

Поділимо вираз на додатну суму, і отримаємо початкову нерівність (1):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i},$$

що і треба було довести.

Це надзвичайно корисна нерівність, що використовується для доведення цікавих задач.

Задача 1:. Нерівність Несбіта:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{3}{2}$$

Доведення:

Використовуючи нерівність трьох квадратів, а також наслідок із теореми Коші-Буняковського, маємо:

$$\frac{a^2}{a(b+c)}+\frac{b^2}{b(a+c)}+\frac{c^2}{c(a+b)}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2ac+2bc}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{2ab+2ac+2bc}$$

$$\geq\frac{3(ab+ac+bc)}{2(ab+ac+bc)}=\frac{3}{2}$$

Задача 2. «Перестановка»

Нехай $b_1,b_2,..,b_n$ - деяка перестановка додатних чисел $a_1,a_2,..,a_n$ Доведіть, що $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+..+\frac{a_n^2}{b_n}\geq b_1+b_2+..+b_n$.

Доведення:

Застосувавши нерівність (1), маємо

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+..+\frac{a_n^2}{b_n}\geq\frac{(a_1+a_2+..+a_n)^2}{b_1+b_2+..+b_n}=\frac{(b_1+b_2+..+b_n)^2}{b_1+b_2+..+b_n}=b_1+b_2+..+b_n\quad,$$

що і треба було довести.

Задача 3. «Оцінка однієї послідовності»

Відомо, що $a_1>0,a_2>0,..,a_n>0$. Доведіть, що

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+..+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{1}{2}(a_1+a_2+..+a_n).$$

Доведення :

Знову використаємо нерівність(1) і отримаємо:

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+..+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\geq\frac{(a_1+a_2+..+a_n)^2}{2(a_1+a_2+..+a_n)}=\frac{1}{2}(a_1+a_2+..+a_n),$$ що

і треба було довести.

1.2. Нерівність Коші

Для невід'ємних $a_1, a_2, .., a_n$ і натуральних n виконується нерівність Коші:

$$\frac{a_1 + a_2 + .. + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 .. a_n}$$

Рівність досягається при $a_1 = a_2 = .. = a_n$.

Задача 1. «Мінімум»

Знайти найменше значення виразу при натуральних n і додатних x :

$x^{n-1} + x + \frac{n}{x}$.

На перший погляд здається, що ця задача не має великого відношення до нашої теми, проте:

$$x^{n-1} + x + \frac{n}{x} = x^{n-1} + x + \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + .. + \frac{1}{x}}_{n} \geq (n+2) \cdot \sqrt[(n+2)]{\frac{x^{n-1}x}{x^n}} = n + 2$$

Рівність, відповідно, досягається при $x = 1$.

Підставивши, наприклад n=2013, отримаємо таку цікаву і красиву задачу:

$$x^{2012} + x + \frac{2013}{x}.$$

Задача 2. «Оцінка перестановок»

Нехай $b_1, b_2, .., b_n$ - деяка перестановка додатних чисел $a_1, a_2, .., a_n$. Довести наступну нерівність:

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + .. + \frac{a_n}{b_n} \geq n.$$

Доведення:

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+..+\frac{a_n}{b_n}\geq n*\sqrt[n]{\frac{a_1a_2..a_n}{b_1b_2..b_n}}=n$$

Рівність досягається при $a_i = b_i$.

Задача 3. «Цікава степінь»

Для усіх додатних $a_1, a_2, .., a_n$ довести нерівність:

$$\frac{a_1}{a_1^4+a_2^2+..+a_n^2}+\frac{a_2}{a_1^2+a_2^4+..+a_n^2}+..+\frac{a_n}{a_1^2+a_2^2+..+a_n^4}\leq\frac{1}{a_1a_2..a_n}.$$

Доведення:

Для будь-якого $k \in N, k \leq n$ справедливі наступні міркування:

$$a_1^2+..+a_k^4+..+a_n^2\geq n*\sqrt[n]{a_1^2*..*a_k^4*..*a_n^2}=na_1..a_k^2..a_n$$

Тоді

$$\frac{a_k}{a_1^2+..+a_k^4+..+a_n^2}\leq\frac{a_k}{na_1..a_k^2..a_n}=\frac{1}{na_1a_2..a_n}$$

Тоді, відповідно:

$$\frac{a_1}{a_1^4+a_2^2+..+a_n^2}+\frac{a_2}{a_1^2+a_2^4+..+a_n^2}+..+\frac{a_n}{a_1^2+a_2^2+..+a_n^4}\leq n\left(\frac{1}{na_1a_2..a_n}\right)=\frac{1}{a_1a_2..a_n}$$

,що і треба було довести.

1.3. Нерівність з параметром (заочний етап Всеукраїнської інтернет-олімпіади)

У математичній практиці трапляються задачі пов'язанні зі знаходженням певних значень сталої величини за яких виконується шукана нерівність за певних обмежень змінних у ній.

Розглянемо, наприклад таку цікаву задачу, яка була запропонована учасникам заочного етапу всеукраїнської інтернет-олімпіади у поточному році:

При яких p нерівність вірна для будь-яких $a,b,c>0$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+pbc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+pac}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+pab}}\geq\frac{3}{\sqrt{1+p}}.$$

Розв'язання:

ОДЗ:

$$\begin{cases} a^2+pbc>0 \\ b^2+pac>0 \\ c^2+pab>0 \\ 1+p>0 \end{cases}$$

1) Помножимо обидві частини нерівності на $\sqrt{1+p}>0$

$$A=a\sqrt{\frac{p+1}{a^2+pbc}}+b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}}+c\sqrt{\frac{p+1}{c^2+pab}}\geq 3$$

2) Оскільки нерівність симетрична:

$$a\geq b\geq c>0$$

Тоді:

$$a\geq b$$

$$b \ge c$$

$$a \ge c$$

Звідси:

$$ab \ge c^2 \qquad (2)$$

$$a^2 \ge bc \qquad (3)$$

3) Замінімо у *A* відповідні вирази:

$$B = a\sqrt{\frac{p+1}{bc+pbc}} + b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + c\sqrt{\frac{p+1}{c^2+pc^2}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{p+1}{bc(1+p)}} + b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + c\sqrt{\frac{p+1}{c^2(1+p)}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{bc}} + b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2}} = \frac{a}{\sqrt{bc}} + b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + 1$$

$$B \ge A \ge 3$$

$$B \ge 3$$

$$\frac{a}{\sqrt{bc}} + b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + 1 \ge 3$$

*4)*З нерівності (3): $a \ge \sqrt{bc}\,, b, c \ne 0\,, \frac{a}{\sqrt{bc}} \ge 1$

$$b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} + 1 + 1 \ge 3$$

$$b\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} \ge 1$$

$$\sqrt{\frac{p+1}{b^2+pac}} \ge \frac{1}{b}$$

$$\frac{p+1}{b^2+pac} \geq \frac{1}{b^2}$$

$$\frac{p+1}{b^2+pac} - \frac{1}{b^2} \geq 0$$

$$\frac{b^2+pb^2-b^2-pac}{b^2(b^2+pac)} \geq 0$$

$$\frac{pb^2-pac}{b^2(b^2+pac)} \geq 0$$

$b^2(b^2+pac) > 0$ за ОДЗ,

тоді

$$pb^2-pac \geq 0$$

5) $p(b^2-ac) \geq 0$

b^2-ac величина не стійка, не має сталого знаку.

Наведемо приклад:

$a=3, b=2, c=1: 4-3>0$

$a=100, b=2, c=1: 4-100<0$

Оскільки число p - певна константа зі сталим знаком, вираз $p(b^2-ac)>0$ неможливий за шуканих умов.

Залишається:

$$p(b^2-ac)=0$$

З вищесказаних міркувань : $p=0$

Відповідь: $p=0$.

Розділ 2. «Оцінка суми»

2.1. Узагальнення задачі «Оцінка суми» (XV ТЮМ).

На XV Всеукраїнському турнірі юних математиків (листопад 2012 р., м. Чернівці) була запропонована цікава задача, названа «Оцінка суми».

Задача 10. «Оцінка суми»

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - довільні дійсні числа, причому $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$.

Доведіть, що

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(n - 1 + \left(1 - 2\left\{ \frac{1}{2} n(1-\mu) \right\} \right)^2 \right) \max_{1 \leq i \leq n} x_i^2,$$

де $\mu = \frac{1}{n \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\{u\} = u - [u]$- дробова частина числа *u*.

Задача досить складна, далеко не всі команди представили правильне доведення. Пропонуємо розглянути одразу узагальнення цієї задачі. Зауважимо, що при підставці $t = 1$, отримаємо початкову задачу .

Умова узагальненої задачі:

Нехай $x_1, x_2, ..., x_n \in R$, причому $\sum_{i=1}^{n} x_i^{2t} \neq 0, t \in N$. Доведіть, що

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{2t} \leq (n - 1 + \left(1 - 2\left\{ \frac{n}{2}(1-\mu) \right\} \right)^2 \max x_i^{2t} \qquad (1)$$

Де $\mu = \frac{1}{n \max |x_i|^t} \sum_{i=1}^{n} x_i^t$

2.2. Доведення .

При подальшому доведенні буде використовуватися такі не загальновідомі властивості:

Для невід’ємних a, b виконується:

Якщо $\{a\}+\{b\}<1$ то $\{a+b\}=\{a\}+\{b\}$; (2.1)

Якщо $\{a\}+\{b\}\geq 1$ то $\{a+b\}=\{a\}+\{b\}-1$. (2)

Доведення властивості:

Оскільки $\{a+b\}=\{\{a\}+\{b\}\}$, то перша рівність (2.1) є очевидною.

Для випадку $\{a\}+\{b\}\geq 1$: оскільки $\{a\}+\{b\}\in[1;2)$ то $\{a+b\}=\{\{a\}+\{b\}\}=\{\{a\}+\{b\}-1\}=\{a\}+\{b\}-1$.

Введемо також деякі позначення :

$\max|x_i|^t=b$, тоді $\max x_i^{2t}=b^{2t}$ причому $b\neq 0$, оскільки $\sum_{i=1}^{n} x_i^{2t}\neq 0$.

Тоді:

$$\frac{n}{2}(1-\mu)=\frac{n}{2}(1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b}\right)^t}{n})=\frac{n}{2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\left(\frac{x_i}{b}\right)^t)}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\left(\frac{x_i}{b}\right)^t)}{2}$$

Тоді,поділивши обидві чистини нерівності на $b^{2t}>0$, отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{b}\right)^{2t} \le n-1+1-4\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\left(\frac{x_i}{b}\right)^{t})}{2}\right\}+4\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\left(\frac{x_i}{b}\right)^{t})}{2}\right\}^{2}$$

Пропонуємо наступну заміну

$\frac{x_i}{b} = z_i$, причому очевидно $|z_i| \le 1$.

Маємо:

$$4\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z_i^t}{2}\right)\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z_i^t}{2}\right)\right\}) \le n-\sum_{i=1}^{n}\left(z_i\right)^{2t} =$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(1-z_i^{2t}) = \sum_{i=1}^{n}((1-z_i^t)(1+z_i^t)) = 4\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1-z_i^t}{2}\right)\left(1-\frac{1-z_i^t}{2}\right)\right)$$

Тобто:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z_i^t}{2}\right)\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z_i^t}{2}\right)\right\}) \le \sum_{i=1}^{n}((\frac{1-z_i^t}{2})(1-\frac{1-z_i^t}{2}))$$

Заміна: $\frac{1-z_i^t}{2} = a_i$. Оцінивши ліву частину рівності, маємо, що: $a_i \in [0;1]$.

Перепишемо:

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}) \le \sum_{i=1}^{n} a_i(1-a_i)$$

Будемо доводити нерівність методом математичної індукції.

Базис

n=1:

Якщо $a_1 = 1$, тоді виконується рівність 0=0;

Якщо $a \in [0;1)$, то $\{a_1\} = a_1$:

$$a_1(1-a_1) \ge \{a_1\}(1-\{a_1\}) = a_1(1-a_1).$$

Індуктивне припущення: Нехай для $k \in N$ доведено:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) \ge \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\})$$

Індуктивний перехід: Для $k+1$доведемо, що

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i(1-a_i) \ge \left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\})$$

Випадок: $a_{k+1} = 1$.

Тоді:

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i(1-a_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) + 0 \ge \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i + 1\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i + 1\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\})$$

Випадок: $a_{k+1} \in [0;1)$

У наступних випадках будемо використовувати властивість (2.2).

Маємо:

Випадок 1.

Якщо $\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + \{a_{k+1}\} = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + a_{k+1}$

Тоді:

$$\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}) = (\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + a_{k+1})(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} - a_{k+1}) =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}) - \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}a_{k+1} + a_{k+1}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} - a_{k+1} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) + a_{k+1}(1-2\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} - a_{k+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) + a_{k+1}(1-a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i(1-a_i)$$

.

Випадок 2.

Якщо $\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + \{a_{k+1}\} - 1 = \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + a_{k+1} - 1$

Тоді:

$$\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right\}) = (\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + a_{k+1} - 1)(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} + 1 - a_{k+1}) =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}(1-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}) + \left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\}(1-a_{k+1}) - (1-a_{k+1})(2-\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} - a_{k+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) + (1-a_{k+1})(2\left\{\sum_{i=1}^{k} a_i\right\} - 2 + a_{k+1}) <$$

$$< \sum_{i=1}^{k} a_i(1-a_i) + a_{k+1}(1-a_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i(1-a_i).$$

Не зважаючи на те, що в останньому випадку (випадок 2) рівність не досягається, для нерівності (1) є набори чисел, для яких у (1) досягається рівність. Наприклад $x_1 = x_2 = \ldots = x_n > 0$.

Висновки

Відповідно до проробленої роботи можна зробити такі висновки.

Дана дослідницька робота складається з вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі ми описали використання деяких класичних нерівностей: нерівність трьох квадратів, нерівність Коші-Буняковського, нерівність Єнсена та показали доведення цікавих нерівностей, за їх допомогою. Також розглянули доведення нерівності з параметром, яка була запропонована учасникам заочного етапу всеукраїнської інтернет-олімпіади у поточному році.

У другому розділі ми описали доведення узагальненої нерівності, що була представлена у XV Всеукраїнського турнірі юних математиків під назвою «Оцінка суми».

Нерівності – дуже широка тема, яка охоплює собою матеріал, який важко подати, у декількох книгах. Ця робота охопила собою лише мізерну частину цього розділу математики, тому у подальшому ми плануємо дослідити інші методи доведення нерівностей та показати їх практичний зміст.

Список використаних джерел

1. Завдання для відбірних етапів XIV Всеукраїнського турніру юних математиків. http://ukrtym.blogspot.com/p/xiv-2012.html
2. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006:Окружной и финальный этапы/Н.Х.Агаханов и др.-М.:МЦНМО.2007-472с.
3. Венгерские математические олимпиады /И.Кюршак, Д.Нейкомм, Д.Хайош, Я.Шурани-М., «Мир»,1976-543с.
4. Вороний О.М. Готуємося до олімпіади з математики. Книга 2 – Х.:Вид.група «Основа», 2008-141с.(Б-ка жур. «Математика в школах Україні).
5. Федак І.В. Івано-Франківські обласні олімпіади з математики 2001-2010 рр.-Івано-Франківськ:ОІППО,2010-84 с.