Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: математика
Секція: прикладної математики

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ГРУП

Роботу виконав:
Мельніков Віктор Олексійович,
учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник:
Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили

Миколаїв 2014

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Тези

науково-дослідницької роботи

ПРИКЛАДНІ АСПЕКТИ ТЕОРІЇ ГРУП

Мельніков Віктор Олексійович, учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник: Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили

Вивчення багатьох фізичних процесів призводить до проблеми розв'язання диференційних рівнянь в частинних похідних. Розв'язування багатьох із них становить великі труднощі. Груповий аналіз при цьому відіграє чималу роль, оскільки дозволяє розширити множину точних розв'язків диференційного рівняння.

В роботі за допомогою теореми Лі побудовані перетворення, які породжуються операторами симетрії та побудовано явний вигляд цих перетворень на прикладі операторів зсуву, повороту та дилатації. Досліджено групові властивості лінійного одновимірного рівняння теплопровідності та рівняння нелінійної фільтрації Буссінеска.

Використовуючи інфінітезимальний критерій інваріантності побудовано групи перетворень які допускаються цими рівняннями. За допомогою інваріантів перетворення неоднорідного розтягу отримано анзац (спеціальну підстановку), що дозволило провести редукцію рівняння теплопровідності в частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0$ до звичайного диференціального рівняння. Використано математичний пакет Maple 17 для побудови координат інфінітезимального оператора симетрії для тривимірного випадку однорідного рівняння теплопровідності.

Приклади наведені в роботі демонструють багаті можливості теорії групових властивостей диференціальних рівнянь. Ці можливості збільшуються, якщо використовувати багатопараметричні групи Лі.

Отже побудова конструктивного математичного апарату, здатного виявляти різні типи симетрій, - одна з найважливіших задач якісної теорії диференціальних рівнянь. У подальшому планується розглянути не менш важливу задачу, в деякому змісті обернену до сформульованої вище: по заданій групі перетворень побудувати математичні моделі (рівняння), що володіють зазначеною симетрією.

ЗМІСТ

ВСТУП 4
РОЗДІЛ I 6
ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ЇХ ІНВАРІАНТИ 6
1.1. Однопараметрична група перетворень 6
1.2.Рівняння Лі 9
1.3.Інваріанти перетворень 10
1.4. Застосування інваріантів групи перетворень 13
РОЗДІЛ II 15
СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ 15
2.1. Рівняння Буссінеска 15
2.2 Рівняння теплопровідності 17
2.3. Редукція рівняння теплопровідності. 20
ВИСНОВКИ 21
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 22
ДОДАТКИ 23

ВСТУП

Виникнувши як наука про розв'язування рівнянь, математика еволюціонувала і на разі вирішує широкий спектр прикладних проблем. Зокрема важливою частиною математики є *теорія груп*.

Виникнення теорії груп спричинила задача отримання коренів рівняння степені n. Загальний розв'язок якої отримав Ернест Галуа в 1830 році та саме тоді вперше вжив термін *група*.

При дослідженні різних явищ природи часто приходять до математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Явища, які вивчаються в гідродинаміці, теорії пружності, теорії теплопровідності, квантовій механіці, тощо, описуються рівняннями математичної фізики. Розквіт методів класичної математичної фізики пов'язаний із прізвищами Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, Ж.Л. д'Аламбера, П.С. Лапласа, Д. Бернуллі, Ж. Фур'є, М.В. Остроградського, А.М. Ляпунова, С. Лі та багатьох інших.

В 1884 році Софус Лі започаткував вивчення так званих *груп перетворень* та сформулював базисні принципи теорії групового аналізу диференційних рівнянь, в основі якого лежить принцип симетрії. Метод групового аналізу ґрунтується на знаходженні та застосуванні операторів алгебри інваріантності (симетрії Лі) диференціального рівняння для знаходження його точних розв'язків.

Багато дослідників використовували і розвивали теорію С. Лі. Вперше ідеї Лі були застосовані Пуанкаре (1905 р.). Тривалий період результати С. Лі щодо групового аналізу диференціальних рівнянь з частинними похідними залишалися маловідомими. Г. Біркгоф першим наголосив на їх важливості і принциповій можливості застосування теорії груп у механіці. Подальший розвиток метод С. Лі набув у роботах Л.В. Овсяннікова [2], яким була створена теорія інваріантних і частково-інваріантних розв'язків диференціальних рівнянь. В Україні методи Лі почали розвиватися у Києві В.П.Єрмаковим, Г.В.Пфейффером, М.К.Куренским. Провідну роль у цих дослідженнях відіграла українська школа теоретико-алгебраїчного аналізу, що була заснована В.І. Фущичем [3;4].

В роботі Н.Х. Ібрагімова [1], наведенні основні теоретичні відомості, щодо групового аналізу. А. Ю.Ольшанский [5], К. Г. Гараев [6], Н. А. Кудряшов [7], в рамках Соросівського проекту підготували статті адаптовані для старшокласників з понять симетрії, груп перетворень та їх застосуванню до диференціальних рівнянь.

Багато диференційних рівнянь математичної фізики відомі досить давно. Наприклад, дослідження теплопровідності сягають XIX століття. У 1822 році Жан Батист Фур'є видав працю «Аналітична теорія тепла», де вперше вивів рівняння теплопровідності (дифузії). Згодом дослідженням у теорії тепла займався і Альберт Ейнштейн (1905 рік). Сучасний вивід рівняння теплопровідності можна дізнатись із [9].

Мета роботи – дослідити рівняння математичної фізики (рівняння теплопровідності та рівняння Буссінеска) у контексті теорії групового аналізу.

Відповідно до мети поставлені *завдання*, спрямовані на її досягнення: ознайомитись із теорією групового аналізу; побудувати різні перетворення однопараметричних груп; знайти інваріанти відповідної групи перетворень; знайти групи перетворень, що допускаються рівнянням теплопровідності та рівняння Буссінеска; провести редукцію рівняння одновимірного рівняння теплопровідності до звичайного диференціального рівняння.

Особистий внесок: за допомогою теореми Лі побудовані перетворення, які породжуються відповідними операторами симетрії; знайдено окремий випадок редукції рівняння теплопровідності, знайдено групи перетворень, що допускаються рівнянням теплопровідності та рівняння Буссінеска.

РОЗДІЛ І

ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТА ЇХ ІНВАРІАНТИ

1.1. Однопараметрична група перетворень

В основі симетрій лежать перетворення.

Перетворення f множини M називають тобто взаємно однозначне відображення M на M.

Точку x називають прообразом точки $f(x)$, $f(x)$- образом точки x.

Якщо f і g – два перетворення множини M, то множенням fg називають $h = g(f)$.

Приклад 1. Нехай є перетворення $f(x) = x^2$ і $g(x) = x^3 + x$.

Тоді $fg = x^6 + x^2$ і $gf = \left(x^3 + x\right)^2 = x^6 + 2x^4 + x^2$.

Розгляньмо однопараметричне сімейство перетворень T_a:

$$x` = f(x, a) \qquad \textbf{(1.1)}$$

де $a \in R$ і неперервно змінюється на певному $\Delta \subset R$.

Кожному окремому значенню параметра a відповідає конкретне перетворення сімейства.

Кажуть, що перетворення **(1.1)** утворюють *однопараметричну групу*, якщо виконується наступні умови:

1) Існує тотожне перетворення. Тобто $f(x, a) = x$.

В загальному випадку вважають, що тотожне перетворення досягається при $a = 0$. Справді, якщо тотожне перетворення досягається при $a = a_0$, то попередня умова досягається простим зсувом $a = \bar{a} + a_0$.

2) Кожному перетворенню сімейства (1.1) відповідає і визначене обернене перетворення. Тобто, якщо $x` = f(x, a)$, то $\exists a^{-1}$ , що $f(x`, a^{-1}) = x.$.

Можна записати це так: $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$.

3) Результат послідовного виконання двох перетворень рівносильний виконанню третього.

Записують, це так: $T_a T_b = T_{\varphi(a,b)}$, де $\varphi(a,b)$ достатню кількість разів диференційована.

Приклад 2. Покажемо, що перетворення $x` = x(a+1)+a$ утворює однопараметричну групу:

1) Тотожне перетворення при $a=0$: $x` = x$.

2) Знайдемо обернене перетворення.

Оскільки $x` = x(a+1)+a$, то $x^{-1} = (x(a+1)+a)(b+1)+b$

Враховуючи $x^{-1} = x$, маємо:

$abx + bx + ab + ax + a + x + b = x$

$x(a+b+ab) + a + b + ab = 0$

$a + b + ab = 0 \rightarrow b = -\dfrac{a}{a+1}$.

a і b повинні лежати в одному і тому ж інтервалі. Легко бачити, що $a,b \in (-1;+\infty)$.

3) Маємо $x`` = (x(a+1)+a)(b+1)+b$ .З іншої сторони $x`` = x(c+1)+c$

Тоді: $abx + ax + bx + a + ab + a + b = cx + x + c$

$x(ab + a + b - c) + ab + a + b - c = 0$

Звідси: $c = \varphi(a,b) = a + b + ab.$

Приклад 3. Покажемо, що перетворення $\begin{cases} x` = x + a \\ y` = y - a \end{cases}$ утворює однопараметричну групу:

1) Тотожне перетворення при $a=0$.

2) Знайдемо обернене перетворення: легко бачити, що $a^{-1} = -a$:

$$\begin{cases} x^{-1} = x` + a^{-1} = x + a - a = x \\ y^{-1} = y` - a^{-1} = y - a + a = y \end{cases}$$

3) Маємо: $\begin{cases} x`` = x + a + b \\ y`` = y - a - b \end{cases}$

З іншої сторони: $\begin{cases} x`` = x \\ y`` = y \end{cases}$

Тоді: $\varphi(a,b) = a + b$.

В загальному випадку властивість 3 може виконуватись не для всіх $a \in \Delta$.

Наприклад, для конкретних значень $a \in \Delta, b \in \Delta$ перетворення T_a і T_b визначені, але $\varphi(a,b) \notin \Delta$. В такому разі $T_a T_b$ не має смислу. Тому беруть такі значення a, b із $\Delta` \subset \Delta$, щоб $\varphi(a,b) \in \Delta$. Тому про такі перетворення говорять, що вони утворюють *локальну групу перетворень*.

Приклад 4. Перетворення $x` = \dfrac{x}{1-a}$. Перевіримо його властивості.

1) Тотожне перетворення при $a = 0$.

2) Знайдемо його обернене перетворення: $x^{-1} = \dfrac{x`}{1-b} = \dfrac{x}{(1-a)(1-b)}$

Враховуючи, що $x^{-1} = x$, маємо: $(1-a)(1-b) = 1$

$1 - b = \dfrac{1}{1-a} \rightarrow b = -\dfrac{a}{1-a}$

a і b повинні лежати в одному інтервалі. Звідси $a, b \in (-1; +\infty)$.

3) Знаючи, що $x`` = \dfrac{x}{(1-a)(1-b)} = \dfrac{x}{1-(a+b-ab)}$

Звідси $\varphi(a,b) = a + b - ab$.

Продемонструємо локальність групи:

Дійсно, при $a = 10,\ b = 15$ перетворення визначено і існують $a^{-1} = \dfrac{10}{9},\ b^{-1} = \dfrac{15}{14}$. Проте $T_a T_b = T_{(-125)}$, але $-125 \notin (-1; +\infty)$. Тому, щоб виконувалась умова $\varphi(a,b) \in \Delta$, треба брати $a, b \in \Delta`$, де $\Delta` \subset \Delta$.

1.2.Рівняння Лі

В теорії Софуса Лі доведена наступна *теорема* [2]:

Функція $f(x,a)$ (що є частиною сімейства однопараметричної групи перетворень) є розв'язком звичайного диференційного рівняння першого порядку (рівняння Лі) з початковою умовою:

$$\begin{cases} \dfrac{df}{da} = \xi(f) \\ f\,|_{a=0} = x \end{cases} \qquad \textbf{(1.2)}$$

де $\xi(f) = \dfrac{\partial f(x,a)}{\partial a}\,|_{a=0}$. **(1.3)**

$\xi(f)$ - називають дотичним векторним полем (або компонентою векторного поля), оскільки формулою **(1.3)** задається дотичний вектор у точці x до кривої, що утворена точками $x`$ при груповому перетворенні **(1.1)**.

Приклад 5. Нехай $\xi(x) = x$.

Розв'яжемо рівняння Лі: $\begin{cases} \dfrac{dx`}{da} = x` \\ x`|_{a=0} = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x`}dx` = da \\ x`|_{a=0} = x \end{cases}$.

Проінтегруємо перше рівняння системи:

$\ln|x`| + \ln C = a$

$\ln|x`|\,C = a$

$|x`|C = e^{a}$

1) Розглянемо випадок $x` > 0$. Тоді: $x`C = e^{a}$.

Забезпечимо виконання початкової умови: $a = 0$: $xC = 1 \rightarrow$ $C = \dfrac{1}{x} \rightarrow$ $x` = e^{a}x$

2) Розглянемо випадок $x` < 0$. Тоді: $-x`C = e^{a}$.

Початкова умова: $a = 0$: $-xC = 1 \rightarrow C = -\dfrac{1}{x} \rightarrow x` = e^{a}x$.

Відповідь: $x` = e^{a}x$.

1.3.Інваріанти перетворень

За допомогою однопараметричної групи перетворень можна знайти деяке співвідношення між змінними, яке не змінюється при зміні параметра. Кажуть, що це співвідношення – інваріант відповідної групи перетворення.

Розглянемо, як можна знайти інваріант, виключаючи груповий параметр .

Приклад 6. Перетворення дилатації $\begin{cases} x` = xe^{a} \\ y` = ye^{ak} \end{cases}$.

Піднесемо перше рівняння у степінь k : $\begin{cases} x`^{k} = x^{k}e^{ak} \\ y` = ye^{ak} \end{cases}$

І поділимо рівняння одне на одне: $\dfrac{x`^{k}}{y`} = \dfrac{x^{k}}{y}$

Це показує, що функція $I = \dfrac{x^{k}}{y}$ є інваріантом групи перетворення.

Приклад 7. Перетворення переносу паралельно прямої $kx + ly = 0$, $(k, l = const)$: $\begin{cases} x` = x + la \\ y` = y - ka \end{cases}$

Помножимо перше рівняння на k, а друге на l: $\begin{cases} kx` = kx + kla \\ ly` = ly - kla \end{cases}$.

Додамо обидва рівняння: $kx` + ly` = kx + ly$.

Це показує, що функція $I = kx + ly$ є інваріантом групи перетворення.

Взагалі ж, функцію I називають *інваріантом* групи перетворення (1.3) якщо для всіх x, a, $x` = f(x, a)$ виконується: $I(x`) = I(x)$.

У груповому аналізі існує наступна *теорема* [2]:

Функція I є інваріантом групи перетворення тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє рівнянню

$$\xi_1(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_1}+\xi_2(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x2}+\ldots+\xi_n(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x_n}=0 \qquad \textbf{(1.4)}$$

Або записують коротше:

$$\xi^i(x)\frac{\partial F(x)}{\partial x^i}=0, i=1,2..,n.$$

Ввівши диференційний оператор у вигляді:

$$X=\xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Тоді рівняння **(1.4)** переписується у вигляді: $XF=0$.

Цей оператор називають інфінітезимальним (нескінченно малим) оператором групи перетворень (1.1).

Якщо ми знаємо інфінітезимальним оператор, то перетворення цієї групи знаходяться шляхом розв'язування відповідного рівняння Лі – тобто встановлюється чітка відповідність між оператором та групою перетворень, що він породжує.

Приклад 8. Знайти перетворення, інфінітезимальний оператор якого

$$X=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Порівнюючи із (1.5), розв'яжемо систему рівнянь Лі:

$$\begin{cases}\dfrac{dx`}{da}=y` \\ \dfrac{dy`}{da}=-x` \\ x`|_{a=0}=x \\ y`|_{a=0}=y\end{cases}$$

Перемножимо перші два рівняння системи, отримаємо: $-\frac{y`}{dx`}=\frac{x`}{dy`}$

Розв'яжемо рівняння (розділення змінних):

$x`^2+y`^2=C, C=b^2, b>0$ **(1.6)**

Розглянемо випадок $y>0$: $y=\sqrt{b^2-x`^2}$.

Тоді перше рівняння системи: $\frac{dx`}{da}=-\sqrt{b^2-x`^2}$

Розв'яжемо і отримаємо:

$$\arcsin\frac{x`}{b} = C - a \rightarrow \mathrm{x}` = \mathrm{bsin}(C - a)$$

тоді друге рівняння системи:

$\frac{dy`}{da} = bsin(C - a) \rightarrow y` = bcos(C - a) + C`.$

Враховуючи умову **(1.6)**, маємо: $\left[\begin{array}{c} C` = 0 \\ C` = -2bcosC \end{array}\right.$.

Подальше розв'язання приводить до наступних результатів:

$y`|_{a=0} = bcosC = y, x`|_{a=0} = bsinC = x$.

Тоді перетворення: $\begin{cases} x` = xcosa - ysina \\ y` = xsina + ycosa \end{cases}$

Випадок $y < 0$ розглядається аналогічно.

Відповідь: $\begin{cases} x` = xcosa - ysina \\ y` = xsina + ycosa \end{cases}$.

Наведемо таблицю однопараметричних груп перетворень та їх інфінітезимальних операторів:

Таблиця1.1

Назва	Перетворення	Інфінітезимальний оператор
Зсув	$x` = x + a$	$X = \frac{\partial}{\partial x}$
Зсув паралельно прямій $kx + ly = 0$	$x` = x + la$ $y` = y - ka$	$X = l\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}$
Поворот	$x` = xcosa - ysina$ $y` = xsina + ycosa$	$X = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$
Проективне перетворення	$x` = \frac{x}{1 - ax}$ $y` = \frac{y}{1 - ax}$	$X = x^2\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y}$
Однорідний розтяг	$x` = e^a x$ $y` = e^a y$	$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$
Неоднорідний розтяг (дилатація)	$x` = e^a x$ $y` = e^{ka}y, k = const$	$X = x\frac{\partial}{\partial x} + ky\frac{\partial}{\partial y}$

1.4. Застосування інваріантів групи перетворень

Кажуть, що диференційне рівняння *допускає групу перетворень G* якщо під дією цих перетворень рівняння перетворюється в рівносильне рівняння тої ж форми. При цьому, якщо подіяти перетворенням на розв'язки початкового рівняння – отримають розв'язки новоотриманого рівняння. По суті – розв'язки початкового рівняння. Це дозволяє розширити множину вже відомих розв'язків – розмножити окремі розв'язки диференційного рівняння.

В деяких випадках, за допомогою інваріантів групи перетворень можна звести рівняння до простішого та розв'язати його.

Приклад 9. Диференційне рівняння $x^2\frac{dy}{dx}=yx+y^2$ **(1.6)**

Припустімо, що дане рівняння допускає групу перетворень неоднорідного розтягу, тоді: $\begin{cases} x` = ax \\ y` = by \end{cases}$.

Підставляючи ці співвідношення у рівняння, маємо:

$$\left(\frac{x`}{a}\right)^2\frac{d\frac{y`}{b}}{d\frac{x`}{a}}=\frac{x`y`}{ab}+\left(\frac{y`}{b}\right)^2$$

Спростимо: $x`^2\frac{1}{a^2}\frac{1}{b}a\frac{dy`}{dx`}=\frac{x`y`}{ab}+\frac{y`}{b^2}\quad |*ab \rightarrow\ x`^2\frac{dy`}{dx`}=x`y`+\frac{a}{b}y`$.

Це рівняння співпадає з висхідним при $a=b$. Отже рівняння **(1.6)** допускає групу перетворень при $a=b$: $\begin{cases} x` = ax \\ b` = ay \end{cases}$.

Ця група перетворень має інваріант: $I=\frac{y}{x}$.

Звідси розглянемо спеціальну підстановку (абзац): $y=Ix$.

Підставимо у рівняння: $x^2\frac{dIx}{dx}=Ix^2+I^2x^2$.

Будемо спрощувати та розділяти змінні: $\frac{dIx}{dx} = I + I^2$,

$$\frac{Idx + xdI}{dx} = I + I^2,$$

$$I + \frac{xdI}{dx} = I + I^2,$$

$$\frac{xdI}{dx} = I^2,$$

$$I^{-2}dI = \frac{1}{x}dx.$$

Проінтегрувавши, маємо: $\ln|x| + \ln C = I^{-1}$.

Підставимо значення інваріанта: $\ln|x|C = \frac{x}{y}$.

Звідси отримали розв’язок у вигляді: $y = \frac{x}{\ln|x|C}$, де $C = const$, $C > 0$.

РОЗДІЛ II
СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Рівняння Буссінеска

Розглянемо рівняння Буссінеска [8]:

$$u_t = uu_{xx} + u_x^2 \qquad (\mathbf{2.1})$$

Де u – функція, що залежить від часу та координати x.

Оператор групи будемо шукати у вигляді :

$$V = \tau(t,x,u)\frac{\partial}{\partial_t} + \xi(t,x,u)\frac{\partial}{\partial_x} + \eta(t,x,u)\frac{\partial}{\partial_u}$$

Тоді продовжимо оператор (в нашому випадку до частинних похідних другої степені):

$$\mathrm{V}_2 = \mathrm{V} + \varphi^{\mathrm{t}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_t}} + \varphi^{\mathrm{x}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_x}} + \varphi^{\mathrm{tt}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_{tt}}} + \varphi^{\mathrm{tx}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_{tx}}} + \varphi^{\mathrm{xx}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{u_{xx}}}$$

Де $\varphi^{\mathrm{t}}, \varphi^{\mathrm{x}}, \varphi^{\mathrm{tt}}, \varphi^{\mathrm{tx}}, \varphi^{\mathrm{xx}}$ обчислюються за відомими формулами [4], зокрема:

$$\varphi^t = \eta_t + u_t(\eta_u - \tau_t) - u_x\xi_t - u_t^2\tau_u - u_tu_x\xi_u \; (\mathbf{2.2})$$

$$\varphi^x = \eta_x - u_t\tau_x + u_x(\eta_u - \xi_x) - u_tu_x\tau_u - u_x^2\xi_u \; (\mathbf{2.3})$$

$$\varphi^{xx} = \eta_{xx} - u_t\tau_{xx} + u_x(2\eta_{xu} - \xi_{xx}) - 2u_tU_x\tau_{xu} + u_x^2(\eta_{uu} - 2\xi_{xu}) - u_tu_x^2\tau_{uu}$$
$$-u_x^3\xi_{uu} - 2u_{tx}\tau_x + u_{xx}(\eta_u - 2\xi_x) - u_tu_{xx}\tau_u - 2u_xu_{tx}\tau_u - 3u_xu_{xx}\xi_u \; (\mathbf{2.4})$$

Запишемо рівняння (2.1) у вигляді: $\mathrm{F} = \mathrm{u_t} - \mathrm{u_{xx}} - \mathrm{u_x^2} = 0$

Тепер діємо подовженим оператором на функцію:

$$\mathrm{V_2F} = -\eta\mathrm{u_{xx}} + \varphi^{\mathrm{t}} - \mathrm{u}\varphi^{\mathrm{xx}} - 2\mathrm{u_x}\varphi^{\mathrm{x}} \; (\mathbf{2.5})$$

Тоді, щоб знайти перетворення, необхідною умовою [2] є:

$$\mathrm{V_2F}|_{[\mathrm{F}]} = 0 \quad (\mathbf{2.6})$$

При дії оператором на рівняння, враховуючи умови (**2.1**) , (**2.5**) ,(**2.6**), користуючись формулами (**2.2-2.4**) , отримаємо рівняння у лівій частині якого – вираз залежний від частинних похідних функції u, справа – нуль. Отже отримаємо систему визначальних рівнянь – коефіцієнти при цих похідних функції будуть рівними нулю, оскільки не залежатимуть від цих функцій. У нашому випадку отримаємо таку систему визначальних рівнянь (процес підстановки громіздкий, тому показуємо лише результат – систему визначальних рівнянь):

$$\begin{cases} \eta_t - \eta_{xx}u = 0 \\ (2\xi_x - \tau_t)u - \eta + \tau_{xx}u^2 = 0 \\ 2\xi_x - \eta_u - \tau_t + (\tau_x - \eta_{uu} + 2\xi_{xu})u = 0 \\ (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u - \xi_t - 2\eta_x = 0 \\ \tau_u u + \tau_{uu}u^2 = 0 \\ 3\tau_u + 2\tau_{uu}u = 0 \\ (2\tau_x + 4\xi_u)u + 2\tau_{xu}u^2 = 0 \\ 2\tau_x + \xi_u + (2\tau_{xu} + \xi_{uu})u = 0 \\ 2\tau_{xu} = 0 \\ 2\tau_u u = 0 \end{cases}$$

З двох останніх рівнянь системи випливає, що τ залежить виключно від часу.

$$\begin{cases} \eta_t - \eta_{xx}u = 0 \\ (2\xi_x - \tau_t)u = \eta \\ 2\xi_x - \eta_u - \tau_t + (2\xi_{xu} - \eta_{uu})u = 0 \\ (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u - \xi_t - 2\eta_x = 0 \\ 4\xi_u u = 0 \\ \xi_u + \xi_{uu}u = 0 \end{cases}$$

Тоді з передостаннього рівняння випливаю, що ξзалежить виключно від t і x. Тоді із другого рівняння випливає також:

$\eta_{uu} = (2\xi_x - \tau_t)_u = 0$ і $\eta_u = 2\xi_x - \tau_t$ $\rightarrow \eta_{ux} = 2\xi_{xx}$.підставимо останню рівність у четверте рівняння системи:

$3\xi_{xx}u - \xi_t - 2\eta_x = 0 \rightarrow (3\xi_{xx}u - \xi_t - 2\eta_x)_u = 3\xi_{xx} - 2\eta_{xu} = 0 \rightarrow$ $\eta_{xu} = \frac{3}{2}\xi_{xx} \rightarrow$ Враховуємо, що $\eta_{ux} = 2\xi_{xx}$ маємо, що $\xi_{xx} = 0 \rightarrow \eta_{ux} = 0$.

Система:

$$\begin{cases} \eta_t - \eta_{xx}u = 0 \\ \eta = (2\xi_x - \tau_t)u \\ \xi_t = -2\eta_x \end{cases}$$

Із другого рівняння: $\eta_x = \left((2\xi_x - \tau_t)u\right)_x = 2u\xi_{xx} = 0$. Тоді перше рівняння буде мати вигляд: $\eta_t = 0$ а останнє $\xi_t = 0$. Тоді, маємо, що η залежить виключно від u, а ξ залежить виключно від x. Тоді:

$\eta_t = \left((2\xi_x - \tau_t)u\right)_t = -\tau_{tt}u \rightarrow \tau_{tt} = 0 \rightarrow \tau = C_1 t + C_2$

Із того, що η залежить виключно від u випливає, що

$2\xi_x - \tau_t = 2\xi_x - C_1 = C_3$. Тобто, $\xi_x = \frac{C_3+C_1}{2} \rightarrow \xi = \frac{C_3+C_1}{2}x + C_4$.

Отримали розв'язок системи:

$\tau = C_1 t + C_2$;

$$\xi = \frac{C_3 + C_1}{2}x + C_4$$

$$\eta = C_3 u$$

Звідси, бачимо що рівняння Буссінеска допускає групи перетворення з такими інфінітезимальними операторами:

$C_1: X = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}$

$C_2: X = \frac{\partial}{\partial t}$

$C_3: X = u\frac{\partial}{\partial u} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial x}$

$C_4: X = \frac{\partial}{\partial x}$

Якщо порівняємо з таблицею1 то, переконаємося, що це перетворення зсуву (відносно t та x), перетворення неоднорідного розтягу (відносно u, x та t, x).

2.2 Рівняння теплопровідності

2.2.1. Група перетворень рівняння теплопровідності.

Розглянемо рівняння теплопровідності [1]:

$$u_t = k^2 u_{xx}, k = const \quad (\mathbf{2.7})$$

Тоді, розглянемо функцію: $F = u_t - k^2 u_{xx} = 0$

Подіємо подовженим оператором на функцію:

$$V_2 F = \varphi^t - k^2 \varphi^{xx}$$

Враховуючи формули(**2.2-2.4**) а також (**2.7**), отримаємо систему визначальних рівнянь:

$$\begin{cases} \eta_t - k^2\eta_{xx} = 0 \ (1) \\ -k^2\tau_t + k^4\tau_{xx} + 2k^2\xi_x = 0 \ (2) \\ -\xi_t - k^2\eta_{xu} + k^2\xi_{xx} = 0 \ (3) \\ 2k^2\xi_u + 2k^4\tau_{xu} = 0 \ (4) \\ -k^2\eta_{uu} + 2k^2\xi_{xu} = 0 \ (5) \\ k^4\tau_{uu} = 0 \ \ (6) \\ k^2\xi_{uu} = 0 \ \ (7) \\ 2k^2\tau_x = 0 \ \ (8) \\ 2k^2\tau_u = 0 \ \ (9) \end{cases}$$

З останніх двох рівнянь системи випливає, що τ залежить виключно від t. Тоді з рівняння (4) випливає, що $\xi_u = 0 \rightarrow$ тобто ξ залежить тільки від t, x. Звідси система переписується у такому вигляді:

$$\begin{cases} \eta_t = k^2\eta_{xx} \ (1) \\ \xi_x = \dfrac{1}{2}\tau_t \ (2) \\ k^2\xi_{xx} - \xi_t - 2k^2\eta_{xu} = 0 \ (3) \\ \eta_{uu} = 0 \ (4) \end{cases}$$

Із другого рівняння: оскільки $\tau(t)$ то маємо $\xi = \frac{1}{2}\tau_t x + \gamma(t)$. Із четвертого рівняння маємо, що $\eta = \alpha(t,x)u + \beta(t,x)$. Підставимо відповідні значення у третє рівняння :

$-\frac{x}{2}\tau_{tt} - \gamma_t - 2k^2\alpha_x = 0 \rightarrow \alpha_x = -\frac{x}{4k^2}\tau_{tt} - \frac{\gamma_t}{2k^2} \rightarrow \alpha = -\frac{\tau_{tt}}{4k^2}\frac{x^2}{2} - \frac{\gamma_t}{2k^2}x + \sigma(t)$

Тепер підставимо значення η, ξ у перше рівняння:

$$u(\alpha_t - k^2\alpha_{xx}) + \beta_t - k^2\beta_{xx} = 0$$

Звідси отримали два рівняння:$\alpha_t = k^2\alpha_{xx}$і $\beta_t = k^2\beta_{xx}$.

Підставимо значення α: $x^2\left(-\frac{\tau_{ttt}}{8k^2}\right) + x\left(-\frac{\gamma_{tt}}{2k^2}\right) + \sigma_t + \frac{\tau_{tt}}{4} = 0.$

Звідси маємо, що $\tau_{ttt} = 0, \gamma_{tt} = 0, \sigma = -\frac{1}{4}\tau_{tt}$. Звідси:

$$\tau = C_1 t^2 + C_2 t + C_3, \gamma = C_4 t + C_5, \sigma = -\frac{1}{2} C_1 t + C_6$$

Маємо розв'язки системи визначальних рівнянь:

$$\tau = C_1 t^2 + c_2 t + C_3$$

$$\xi = C_1 t x + \frac{C_2 x}{2} + C_4 t + C_5$$

$$\eta = -C_1 \left(\frac{x^2}{4k^2} + \frac{t}{2} \right) u - C_4 \frac{x}{2k^2} u + C_6 u + \beta(t, x)$$

Де $\beta(t, x)$ - довільний розв'язок рівняння теплопровідності.

Звідси, бачимо що рівняння теплопровідності допускає групи перетворення з такими інфінітезимальними операторами:

$$C_1 : X = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + t x \frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{x^2}{4k^2} + \frac{t}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_2 : X = t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$C_3 : X = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$C_4 : X = t \frac{\partial}{\partial x} - \frac{x u}{2k^2} \frac{\partial}{\partial u}$$

$$C_5 : X = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$C_6 : X = u \frac{\partial}{\partial u}$$

А також усі оператори виду $X = \beta(t, x) \frac{\partial}{\partial u}$, де $\beta(t, x)$- довільний розв'язок рівняння теплопровідності.

Загалом, існують узагальнення рівняння теплопровідності, наприклад для простору:

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Відшукання груп перетворень, що допускаються цим рівнянням не легка справа. За допомогою спеціальних математичних пакетів їх можна знайти набагато швидше. За допомогою математичного пакету Maple 17 нами було знайдено групи перетворень, які допускаються рівнянням теплопровідності у розширенні до просторового випадку (див. Додаток 1).

2.3. Редукція рівняння теплопровідності.

Розглянемо рівняння теплопровідності у вигляді:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0$$

Вище було показано, що воно, зокрема, допускає таку групу перетворення: $t` = e^{a} t; \quad x` = e^{\frac{a}{2}} x; \quad u` = u$

Ця група має два інваріанти: $I_0 = x t^{-\frac{1}{2}}; \; I_1 = u$

Тоді, запишемо рівняння відносно інваріантів:

$$U_t^{`} = {I_1}_t^{`} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_1 dI_0}{dI_0 dt} = \frac{dI_1}{dI_0}\left(-\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$U_x^{`} = (I_1)_x^{`} = \frac{dI_1 dI_0}{dI_0 dx} = \frac{dI_1}{dI_0}\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$U_{xx}^{``} = \left(U_x^{`}\right)_x^{`} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{dI_1}{dI_0}\right)_x^{`} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{dI_1}{dI_0}\right)_{I_0}^{`}\frac{dI_0}{dx} = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(I_1^{``}\right)_{I_0}\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{t}\frac{d^2 I_1}{dI_0^2}$$

Враховуючи вищесказане, маємо:

$$-\frac{x}{2\sqrt{t^3}}\frac{dI_1}{dI_0} = k^2 \frac{1}{t}\frac{d^2 I_1}{dI_0^2} \qquad * \left(\frac{t}{K^2}\right)$$

$$-\frac{x}{2K^2\sqrt{t}}\frac{dI_1}{dI_0} - \frac{d^2 I_1}{dI_0^2} = 0$$

$$\frac{I_0}{2K^2}\frac{dI_1}{dI_0} + \frac{d^2 I_1}{dI_0^2} = 0$$

Таким чином отримали редукцію рівняння до звичайного диференційного рівняння.

ВИСНОВКИ

Дана дослідницька робота складається із вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У першому розділі наведено теоретичні відомості із теорії групового аналізу (перетворення, однопараметрична група, інваріант, групи, що допускаються диференційним рівнянням).

Доведено, що перетворення $x` = x(a+1)+a$ та $\begin{cases} x` = x + a \\ y` = y - a \end{cases}$ утворюють однопараметричну групу. Для оператора дилітаціїї $\begin{cases} x` = xe^{a} \\ y` = ye^{ak} \end{cases}$ знайдено інваріант. Для інфінітезимальний оператор $X = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ отримано явний вигляд перетворень. Наведено приклад диференціального рівняння яке допускає групу перетворень неоднорідного розтягу.

У другому розділі наведено групове дослідження одновимірного нелінійного рівняння Буссінеска та одновимірного лінійного однорідного рівняння теплопровідності, знайдено групи перетворень, що допускаються цими рівняннями. Також наведено прилад редукції одновимірного рівняння теплопровідності до звичайного диференційного рівняння другого порядку, використовуючи інваріанти групи перетворень $t` = e^{a}t;\ x` = e^{\frac{a}{2}}x;\ u` = u.$

За допомогою математичного пакету Maple 17 було знайдено групу перетворень, яку допускаються рівнянням теплопровідності у розширенні до просторового випадку.

Наведенні приклади показують, що група перетворень знаходиться безпосередньо з виду диференціального рівняння та отримані інваріанти суттєво спрощують рівняння, а отже дають можливість отримати його розв’язок.

Визначення загального напрямку дослідження, а також постановка задач належать науковому керівнику. Конкретне розв’язання поставлених задач, доведення всіх результатів роботи здійснювалось безпосередньо автором.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ібрагимов Н.Х. «Азбука группового анализа». – М.: Знание. 1989. – 48с.
2. Овсянников Л.В. «Групповые свойства дифференциальных уравнений». Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 240с.
3. Фущич В.И., Штелень В.М., Серов Н.И. Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев Наукова думка 1989г. 336с.
4. Лагно В.І., Спічак С.В., Стогній В.І. Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.
5. Ольшанский А. Ю. Умножение симметрий и преобразований. Соросовский образовательный журнал. // - 1996,- №5 - С. 115-120. [Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://www.pereplet.ru / nauka /Soros/pdf/9605_115.pdf
6. Кудряшов Н. А. Симметрия алгебраических и дифференциальных уравнений. Соросовский образовательный журнал. // - 1998. - №9 -С.104-110. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.pereplet.ru/nauka/ soros/pdf/9809_104.pdf
7. Гараев К. Г. Приложения непрерывных групп преобразований к дифференциальным уравнениям. Соросовский образовательный журнал. // - 1998. - №12. - С. 113-118. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.pereplet.ru/nauka/soros/pdf/9812_113.pdf
8. Полубаринова-Кочина П.Я. «Теория движения грунтовых вод».-М.:Наука.-1977.-664с
9. Evans M. Harrell II «Linear Methods of Applied Mathematics» . – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mathphysics.com/ pde/HEderiv.html

ДОДАТОК. Скріншот Maple 17: Обчислення групи інваріантності рівняння теплопровідності (n=3)

show

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x1, x2, x3) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x1^2} u(t, x1, x2, x3)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x2^2} u(t, x1, x2, x3)\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x3^2} u(t, x1, x2, x3)\right) = 0$$

Infinitesimals(PDE)

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 1, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 1, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 1, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 1, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = u\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = x2, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = -x1, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = x3, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = -x1, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = x3, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = -x2, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = t, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = -\frac{1}{2} u x3\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = t, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = -\frac{1}{2} u x1\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = t, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = 0, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = -\frac{1}{2} u x2\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = t, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} x1, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} x2, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} x3, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = 0\right],$$

$$\left[\_\xi_{t}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} t^2, \_\xi_{x1}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} t x1, \_\xi_{x2}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} t x2, \_\xi_{x3}(t, x1, x2, x3, u) = \frac{1}{2} x3 t, \_\eta_{u}(t, x1, x2, x3, u) = -\frac{1}{8} u \left(x1^2 + x2^2 + x3^2 + 6t\right)\right]$$

Кожні квадратні дужки – межі оператора. Відповідно, із цього скріншота можна зробити висновок, що рівняння теплопровідності у просторовому випадку допускає перетворення, які мають наступні інфінітезимальні оператори:

$$X = \frac{\partial}{\partial x_2}; X = \frac{\partial}{\partial x3}; X = \frac{\partial}{\partial t}; X = \frac{\partial}{\partial x_1}; X = u\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}; X = x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_3}; X = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X = t\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{2}ux_3\frac{\partial}{\partial u}; X = t\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2}ux_1\frac{\partial}{\partial u}; X = t\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{2}ux_2\frac{\partial}{\partial u}$$

$$X = t\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}x_3\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$X = \frac{1}{2}t^2\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}tx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{2}tx_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2}tx_3\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6t)u\frac{\partial}{\partial u}$$