м. Миколаїв, 28 квітня 2011

# ЗАВДАННЯ
# І Миколаївського обласного турніру юних математиків імені професора В.М. Лейфури

1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + cos^2 z = 2. \end{cases}$

2. В 4-кутнику $ABCD$ точка $E$ – середина $AB$, $F$ – середина $CD$. Довести, що середини відрізків $AF$, $BF$, $CE$, $DE$ є вершинами паралелограма.

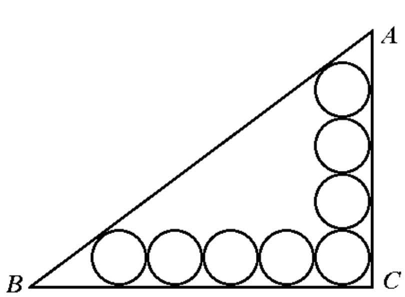
3. Квадратна таблиця 3×3 заповнена числами так, що суми чисел в усіх квадратах 2×2 рівні між собою. Довести, що і суми чисел на діагоналях.

4. На кожній з планет сидить астроном, який спостерігає за найближчою планетою. Довести, що якщо кількість планет непарна, то за однією з планет ніхто не спостерігає. Відстані між планетами усі різні.

5. Розв'язати в цілих числах рівняння $x^4 + 4y^4 = 2(z^4 + 4u^4)$.

6. "***Найменше значення***". Знайдіть всі таки трійки натуральних чисел $a$, $b$ і $c$, для яких вираз $\frac{1024}{a} + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{2}$ набуває свого найменшого значення.

7. "***Ланцюжок кіл***". Вісім кіл радіуса $r$ розташовані в прямокутному трикутнику $ABC$ (кут $C$ – прямий) так, як зображено на рисунку (кожне з кіл дотикається до відповідних сторін трикутника та інших кіл). Знайдіть радіус вписаного кола трикутника $ABC$.



8. "***Числові конструкції та суми кубів***".

а) Доведіть, що для будь-якого натурального $k \geq 2$ існує таке натуральне число, яке можна подати у вигляді суми $2, 3, \ldots, k$ кубів натуральних чисел.

б) Доведіть, що для будь-якого натурального $n \geq 3$ існує таке натуральне число, куб якого можна подати у вигляді суми кубів $n$ попарно різних натуральних чисел.

9. "***Функціональні рівняння***". Знайдіть усі такі функції $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, що для всіх дійсних $x$ і $y$ виконується рівність:

а) $f\left( f(x) + y^2 \right) = x + y^2$;

б) $f\left( f\left( f(x) \right) + y \right) = x + y$.

10. "***Намисто симетричних нерівностей***". Для нерівних додатних дійсних чисел $x$ і $y$ доведіть таки нерівності:

а) $\dfrac{8}{(x+y)^2} \leq \dfrac{2}{(x-y)^2} + \dfrac{1}{2xy}$;

б) $\dfrac{18}{(x+y)^4} \leq \dfrac{2}{(x-y)^4} + \dfrac{1}{x^3y + xy^3}$;

в) $\dfrac{16}{(x+y)^6} \leq \dfrac{4}{(x-y)^6} + \dfrac{1}{3x^5y + 10x^3y^3 + 3xy^5}$.

11. "***Циклічна система рівнянь***". Розв'яжіть систему рівнянь

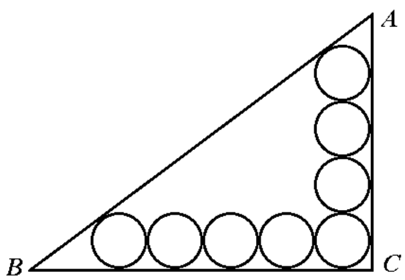
$$\begin{cases} \dfrac{3x - y}{x - 3y} = x^2, \\ \dfrac{3y - z}{y - 3z} = y^2, \\ \dfrac{3z - x}{z - 3x} = z^2. \end{cases}$$

**ЗАВДАННЯ ФІНАЛУ**
**I Миколаївського обласного турніру юних математиків**
**імені професора В.М. Лейфури**

1. В 4-кутнику $ABCD$ точка $E$ – середина $AB$, $F$ – середина $CD$. Довести, що середини відрізків $AF$, $BF$, $CE$, $DE$ є вершинами паралелограма.

2. "***Найменше значення***". Знайдіть всі таки трійки натуральних чисел $a$, $b$ і $c$, для яких вираз $\frac{1024}{a}+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{2}$ набуває свого найменшого значення.

3. "***Ланцюжок кіл***". Вісім кіл радіуса $r$ розташовані в прямокутному трикутнику $ABC$ (кут $C$ – прямий) так, як зображено на рисунку (кожне з кіл дотикається до відповідних сторін трикутника та інших кіл). Знайдіть радіус вписаного кола трикутника $ABC$.




4. На острові є декілька населених пунктів. З кожного пункту виходять дві проїжджі дороги і три пішохідні стежки. Кожна проїжджа дорога і кожна пішохідна стежка приводить до деякого населеного пункту. Будь-які два населені пункти зв'язано чимось одним – або дорогою, або стежкою. Скільки може бути на острові населених пунктів, проїжджих доріг і пішохідних стежок?

5. Знайти площу фігури, яку на координатній площині $Oxy$ задано системою
$$\begin{cases} |x|+|y|+|x+y|\le 8; \\ y^7+y^{-7}\le x^7+x^{-7}. \end{cases}$$

6. Нехай $x*y=\frac{\sqrt{x^2+3xy+y^2-2x-2y+4}}{xy+4}$. Обчислити значення виразу
$$((\cdots((2011*2010)*2009)*\cdots)*1).$$