28 вересня 2012 р.

II Миколаївський обласний відкритий турнір юних математиків імені професора В.М. Лейфури

Завдання для відбірних етапів турніру.

1. “***Несподівані перпендикуляри***”

В трикутнику ABC, $AB = AC$, D – середина BC, E – основа перпендикуляра, проведеного з точки D до AC і F – середина DE. Доведіть, що $AF \perp BE$.

2. “***Послідовні добутки***”

Доведіть, що ціла частина кореня четвертого степеня з добутку восьми послідовних натуральних чисел дорівнює добутку двох з цих чисел. Яких саме?

3. “***Нерухомі точки***”

3.1. Нехай $f(x)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x)$ – обернена до $f(x)$ функція. Дослідити питання щодо кількості коренів рівняння $f(x) = f^{-1}(x)$.

3.2. Розв’яжіть рівняння $a^x = log_a x$ в залежності від параметра a.

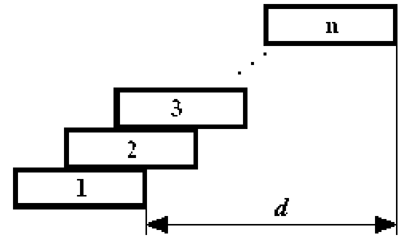
4. “***Правильні рівності***”

4.1. Рівність $342 = 97$ можна зробити правильною використовуючи знаки арифметичних операцій та знаки дужок. Наприклад, $(-3+4)\cdot 2 = 9-7$. Чи можна зробити рівність вірною інакше, без використання будь-яких знаків операцій і дужок?

4.2. Чи справджується рівність $\sqrt{\underbrace{11...11}_{2012\ \textit{цифр}} - \underbrace{22...22}_{1006\ \textit{цифр}}} = \underbrace{77...77}_{1006\ \textit{цифр}}$?

5. “***Гармонічна конструкція***”

Є 2012 однакових цеглин, які можна класти одна на одну. Оцініть максимально можливу відстань d, на яку можливо зсунути верхню цеглину відносно нижньої. Запропонуйте алгоритм побудови такої конструкції.



6. "***Бієкції***"

Нехай $A=\{1,2,3,4\}$. Про функцію $f:A\to A$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням множини A на себе. Знайдіть кількість таких функцій, які мають властивість: існує хоча б одне значення $i\in A$ таке, що $\left|f(i)-f^{-1}(i)\right|>1$. Тут f^{-1} означає функцію, обернену до f.

7. "***Зайвий квадрат***"

Відомо, що з квадрата із стороною $4+\alpha$ $(0<\alpha<1)$ можна вирізати 17 квадратів із стороною 1. Оцініть величину α знизу і зверху. Тобто, вкажіть такі числа α_1 і α_2, що $0<\alpha_1<\alpha<\alpha_2<1$. Оцінка вважається тим кращою, чим менша різниця $\alpha_2-\alpha_1$.

8. "***Рівняння з цілими частинами***"

Для кожного значення параметра $a\in[0;2]$ розв'яжіть рівняння $[a\sin x]=[a\cos x]$, де $[u]$ – ціла частина u, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує u.

9. "***Відновіть трикутник***"

На дошці зобразили такий трикутник ABC, що $AB+AC=2BC$. У цьому трикутнику провели бісектриси AL_1, BL_2 і CL_3, після чого все витерли, окрім точок L_1, L_2 і L_3. За допомогою циркуля та лінійки відновіть трикутник ABC.

10. "***Гра в кульки***"

На столі лежать дві купки кульок, у першій з яких m кульок, у другий – n. За один хід можна з одної з купок прибрати одну, дві або три кульки. Іванко та Марійка роблять ходи по черзі, Марійка ходить першою. Виграє той, хто робить останній хід (тобто після якого на столі взагалі не залишається кульок). Хто з гравців може забезпечити собі перемогу в цій грі (у залежності від m і n)? Опишіть виграшну стратегію.

11. "***Розклад на множники***"

Доведіть, що число $\underbrace{44...4}_{2012}\underbrace{88...8}_{2010}53$ є складеним. Подайте це число у вигляді добутку двох натуральних чисел так, щоб модуль різниці отриманих множників був найменшим можливим.

12. “***Тригонометричний многочлен***”

Яку найменшу кількість нулів на сегменті $[-\pi;\pi]$ може мати функція вигляду

$$T(x) = a_{2012}\cos^3 2012x + a_{2011}\cos^3 2011x + \ldots + a_{15}\cos^3 15x$$

(тут $a_{15}, a_{16}, \ldots, a_{2012}$ – деякі дійсні числа)?

13. “***Суми та біноміальні коефіцієнти***”

Нехай k – задане натуральне число.

13.1. Знайдіть такі дійсні числа $A_0(k)$, $A_1(k)$. …, $A_k(k)$, що для всіх допустимих дійсних значень x справджується рівність

$$\frac{k!}{x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+k)} = \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + \ldots + \frac{A_k(k)}{x+k}.$$

13.2.Для натуральних $n \geq 2k$ знайдіть суму $S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,C_{i+k}^{k}}$.

13.3. Доведіть існування границі $\lim_{n\to\infty} S_n(k)$ та знайдіть її значення.

14. “***Надстепені та цікава функція***”

Для заданого натурального n розглядаються всілякі числа вигляду $a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_k}}}}$, де $1 \leq k \leq n$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, $a_i \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq k$. Позначимо через $g(n)$ найбільше серед таких чисел, наприклад $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$, $g(4) = 4$, $g(5) = 9$, $g(6) = 27$, $g(7) = 512$, і т.д. Знайдіть $g(n)$. (Нагадаємо, що для додатних чисел a, b і c за означенням $a^{b^c} = a^{\left(b^c\right)}$. Наприклад, $2^{3^2} = 2^9 = 512$).

II Миколаївський відкритий обласний турнір юних математиків ім. професора В.М. Лейфури

28 вересня 2012 р.

Задачі для фіналу

Задача 1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки E і F обрано на сторонах BC і AB відповідно. Нехай O – точка перетину відрізків AE і CF. Відомо, що в чотирикутники $OFBE$ та $OADC$ можна вписати кола. Доведіть, що

а) в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло;

б) кола, вписані в трикутники ACD і ABC, дотикаються одне до одного.

Задача 2. Знайдіть всі натуральні n, для яких $3^n + 5^n + 7^n$ ділиться на $3^{n-1} + 5^{n-1} + 7^{n-1}$.

Задача 3. Нехай a, b і c – додатні дійсні числа. Доведіть, що

$$\frac{1}{ab^2 + bc^2 + ca^2} + \frac{1}{3abc} \geq \frac{2}{a^2 b + b^2 c + c^2 a}.$$

Задача 4. Дано півколо з діаметром AB. На дузі AB цього півкола довільно відмітили точку C, відмінну від точок A і B. Нехай D – ортогональна проекція точки C на діаметр AB. Коло ω дотикається до відрізків AD, CD і дуги AB півкола в точці P. Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів APB і ACD лежить на діаметрі AB.

Задача 5. Знайдіть всі трійки дійсних чисел (x, y, z), які задовольняють кожну із трьох рівностей

$$xy = \frac{z}{x} + 1, \quad yz = \frac{x}{y} + 1 \quad \text{і} \quad zx = \frac{y}{z} + 1.$$

Задача 6. Всередині трикутника ABC відмітили точки M і N так, що точка M лежить всередині трикутника ABN, а точка N лежить всередині трикутника ACM. Крім того, $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$ і $\angle MCB = \angle NCA$. Доведіть, що коли точки B, M, N і C лежать на одному колі з центром W, то пряма AW ділить відрізок MN навпіл.

В.А. Ясінський (м. Вінниця), Україна.

Задача 7. Будемо називати точку площини $(a;b)$ раціональної, якщо a і b – раціональні числа. Для кола C позначимо через $K(C)$ кількість раціональних точок на колі C. Визначити можливі значення $K(C)$.

Задача 8.

а) Довести, що паралелограм можна розрізати на 9 рівнобедрених трикутників.

б) Довести, що правильний $2n$-кутник можна розрізати на ромби.