Завдання
ІІІ Миколаївського обласного відкритого турніру юних математиків
імені професора В.М. Лейфури

Дорогі друзі – юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру.

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

1. “Рівняння з параметром”

Знайти множину всіх чисел $a \in R$, для кожного з яких рівняння

$$\sqrt{2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2)} = x + 1$$

має два кореня різних знаків.

2. “Дотична”

Знайти спільну дотичну пряму для кривих $x^2 + y^2 = 2013$ і $xy = 2013$.

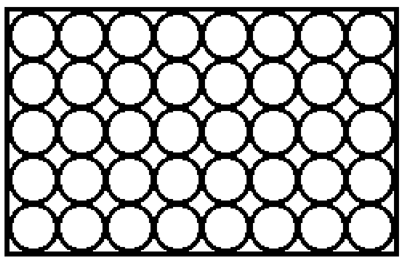
3. “Купки і кульки”

3.1. Є 2013 купок по 2013 кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

3.2. Є n купок по n кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

3.3. Є n купок по m кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

4. “Щільні упакування”



Сорок циліндрів діаметром 1 см кожен і однакової висоти щільно розмістили в ящику с площею основи 5×8 см^2 (див. малюнок). Циліндри при цьому не хитаються.

Запропонуйте спосіб упаковки в цей ящик 41 циліндра. Чи будуть хитатися циліндри в цьому випадку?

5. “Необхідна умова”

Якщо многочлен $x^4 + ax^3 + bx + c$ має чотири простих дійсних кореня, то $ab < 0$. Доведіть це твердження.

Чи буде умова $ab < 0$ достатньою?

6. “Через поле”

Через поле проходить пряма дорога. В початковий момент часу пішохід знаходиться на дорозі. Знайти геометричне місце точок, в які він може потрапити протягом однієї години, якщо дорогою він рухається із швидкістю $6\,км\,/\,год$, а полем – із швидкістю $3\,км\,/\,год$.

7. “Нерівність з параметром”

Знайдіть усі такі дійсні значення параметра a, для яких нерівність

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}>\frac{a}{x+y}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}}$$

має місце для всіх $x>0$ і $y>0$.

8. “Туристичний похід”

Туристичний похід тривав T годин. Туристи вирушили з табору і спочатку рухалися горизонтальною ділянкою шляху. Потім подолали підйом, а після одногодинного привалу цим же шляхом повернулися до табору. Відомо, що горизонтальною ділянкою вони рухалися зі швидкістю u *км/год*, на підйомі – зі швидкістю v *км/год* і на спуску – зі швидкістю w *км/год*. Знайдіть необхідні та достатні умови, за яких загальна відстань, пройдена туристами під час походу, визначається однозначно.

9. “Пірати, скарб та математика”

Нехай N і k – задані натуральні числа. N піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили розподілити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходитимуть до скрині зі скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще k-ту частину від решти монет. Коли в такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з’ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну.

9.1. Для $N=2027$ та $k=2013$ знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

9.2. Дослідіть величину $S(N,k)$ – найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

10. “Многочлен”

10.1. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для всіх $x\in R$ виконується рівність

$$P(x+x^2)=x+x^2+x^3+\ldots+x^{2013}+x^{2014}?$$

10.2. Чи існує такий многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел a і b для всіх $x\in R$ виконується рівність

$$P(x+x^2+x^3)=x+x^2+x^3+\ldots+x^{2010}+ax^{2011}+bx^{2012}+x^{2013}?$$

11. “Числовий автомат”

Числовий автомат «ТЮМ-XVI» може виконувати такі операції з натуральними числами: 1) відняти від даного числа 3 (якщо воно більше за 3); 2) помножити дане число на 3; 3) розділити дане число на 3 (якщо воно ділиться на 3 без остачі).

11.1. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 82 отримати число 81?

11.2. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 81 отримати число 82?

11.3. Аналогічне питання щодо отримання числа n із числа m.

12. “Ортоцентричний тетраедр”

Через точку перетину медіан кожної з граней тетраедра перпендикулярно до цієї грані проведено пряму. Доведіть, що всі ці чотири прямі перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли перетинаються в одній точці чотири прямі, які містять висоти цього тетраедра.

13. “Кола на площині”

Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови:

а) відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10;

б) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший.

14. “Гральний кубик та теорія ймовірностей”

Математик проводить підкидання кубика, на двох гранях якого записані одиниці, на двох гранях – двійки і на двох – трійки.

14.1. Кубик підкинули n разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки.

14.2. Кубик підкинули n разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки.

14.3. Кубик підкидають, доки кількість випадань одиниці стане не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки. Визначте математичне сподівання кількості підкидань.