

# Запрошуються шанувальники математики

11 жовтня 2013 року

на базі Миколаївського  
муніципального колегіуму  
відбудеться  
III Миколаївський обласний  
відкритий турнір юних  
математиків  
ім. професора В. М. Лейфури  
(початок о 9<sup>00</sup>)



В рамках турніру планується організація зустрічі з членами журі



**Теплінським Олексієм Юрійовичем**, доктором фізико-математичних наук, провідним науковим співробітником Інституту математики НАН України, переможцем конкурсу Наукового Товариства ім. Шевченка в Америці та Фундації Україна-США для молодих математиків в Україні, лауреатом Державної премії України в галузі науки і техніки 2010 року за цикл наукових праць «**Теорія динамічних систем: сучасні методи та їх застосування**»



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
**ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

<http://www.imath.kiev.ua/people/profile.php?pid=146&tab=1&lang=ua>

КОЛИ ВАДИ РОБЛЯТЬ ЖИТТЯ ПРОСТІШИМ:  
Посилена жорсткість для дифеоморфізмів кола з  
особливостями

[http://www.shevchenko.org/MatPhysTech/OT\\_presentation.pdf](http://www.shevchenko.org/MatPhysTech/OT_presentation.pdf)



**Радченко Вадимом Михайловичем**, доктором фізико-математичних наук, професором Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

**Наукові інтереси:** Стохастичний аналіз, випадкові міри, стохастичні інтеграли.

Викладає курси „Гармонічний аналіз”, „Теорія міри та інтеграла”

**Вадим Михайлович** є лектором навчального центру для актуаріїв та фінансових аналітиків при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, де викладає курс: “Фінансова математика (Financial mathematics)”



<http://www.mechmat.univ.kiev.ua/eng/ppages/radchenko/>



**Сторченко Іриною Анатоліївною**, кандидатом

фізико-математичних наук, старшим науковим співробітником Інституту математики НАН України <http://imath.kiev.ua/~iyegorch/>

**Наукові інтереси:** симетрійний аналіз диференціальних рівнянь, теорія диференціальних інваріантів

**Ірина Анатоліївна** - заступник редактора журналу **SIGMA** (SYMMETRY, INTEGRABILITY and GEOMETRY: METHODS and APPLICATIONS) журналу з найвищим імпаکت-фактором серед українських журналів (<http://www.emis.de/journals/SIGMA/>) та рецензент Mathematical Reviews.

**Ірина Анатоліївна** планує проведення лекції:

«Особливий вид розбиття простору діаграма Вороного (теселяція Вороного)», та дасть відповіді на запитання, щодо міжнародних наукометричних баз.



НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
**ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

## Завдання

### III Миколаївського обласного відкритого турніру юних математиків імені професора В.М. Лейфури

Дорогі друзі – юні шанувальники математики! Деякі із задач, що пропонуються нижче, досить складні і не обов'язково повинні бути розв'язані повністю. Оцінюватися будуть і окремі часткові просування, розбір суттєвих окремих випадків тощо. У певних ситуаціях вашій команді буде варто поставити й розв'язати аналогічну, але, можливо, більш просту задачу. Усе це є важливим елементом турнірної «боротьби», оскільки дає підстави для цікавих і корисних наукових дискусій. Задачі, які видаються занадто простими, варто спробувати узагальнити: це завжди високо оцінюється журі Турніру.

Бажаємо вам успішної підготовки до Турніру!

#### 1. “Рівняння з параметром”

Знайти множину всіх чисел  $a \in R$ , для кожного з яких рівняння

$$\sqrt{2(x^2 - x - 2a^2 + 2a + 2)} = x + 1$$

має два кореня різних знаків.

#### 2. “Дотична”

Знайти спільну дотичну пряму для кривих  $x^2 + y^2 = 2013$  і  $xy = 2013$ .

#### 3. “Купки і кульки”

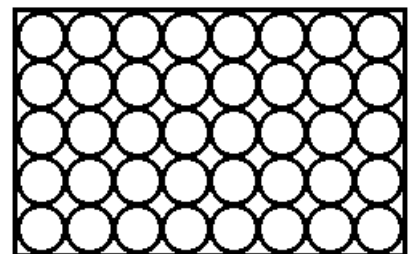
3.1. Є 2013 купок по 2013 кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

3.2. Є  $n$  купок по  $n$  кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

3.3. Є  $n$  купок по  $m$  кульок в кожній. Кожний з двох гравців за один хід може взяти з будь-якої купки будь-яку наявну кількість кульок. Виграє той, хто зробить останній хід. Знайти оптимальні стратегії гри двох гравців.

#### 4. “Щільні упакування”

Сорок циліндрів діаметром 1 см кожен і однакової висоти щільно розмістили в ящику с площею основи  $5 \times 8$  см<sup>2</sup> (див. малюнок). Циліндри при цьому не хитаються.



Запропонуйте спосіб упаковки в цей ящик 41 циліндра. Чи будуть хитатися циліндри в цьому випадку?

#### 5. “Необхідна умова”

Якщо многочлен  $x^4 + ax^3 + bx + c$  має чотири простих дійсних кореня, то  $ab < 0$ . Доведіть це твердження.

Чи буде умова  $ab < 0$  достатньою?

## 6. “Через поле”

Через поле проходить пряма дорога. В початковий момент часу пішохід знаходиться на дорозі. Знайти геометричне місце точок, в які він може потрапити протягом однієї години, якщо дорогою він рухається із швидкістю  $6 \text{ км/год}$ , а полем – із швидкістю  $3 \text{ км/год}$ .

## 7. “Нерівність з параметром”

Знайдіть усі такі дійсні значення параметра  $a$ , для яких нерівність

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{a}{x+y} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}$$

має місце для всіх  $x > 0$  і  $y > 0$ .

## 8. “Туристичний похід”

Туристичний похід тривав  $T$  годин. Туристи вирушили з табору і спочатку рухалися горизонтальною ділянкою шляху. Потім подолали підйом, а після одногодинного привалу цим же шляхом повернулися до табору. Відомо, що горизонтальною ділянкою вони рухалися зі швидкістю  $u \text{ км/год}$ , на підйомі – зі швидкістю  $v \text{ км/год}$  і на спуску – зі швидкістю  $w \text{ км/год}$ . Знайдіть необхідні та достатні умови, за яких загальна відстань, пройдена туристами під час походу, визначається однозначно.

## 9. “Пірати, скарб та математика”

Нехай  $N$  і  $k$  – задані натуральні числа.  $N$  піратів знайшли скарб, що складався з однакових золотих монет, і вирішили розподілити його між собою, визначивши жеребкуванням порядок, за яким вони підходять до скрині зі скарбом. У встановленій послідовності пірати один за одним підходили до скрині, і кожен з них брав собі одну монету й після цього ще  $k$ -ту частину від решти монет. Коли в такий спосіб узяв свою долю останній з піратів, то з'ясувалось, що залишилась певна кількість монет, яку пірати змогли розділити між собою порівну.

9.1. Для  $N = 2027$  та  $k = 2013$  знайдіть найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

9.2. Дослідіть величину  $S(N, k)$  – найменшу кількість монет у скарбі, за якої описаний поділ був би можливим.

## 10. “Многочлен”

10.1. Чи існує такий многочлен  $P(x)$  з дійсними коефіцієнтами, що для всіх  $x \in R$  виконується рівність

$$P(x + x^2) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2013} + x^{2014}?$$

10.2. Чи існує такий многочлен  $P(x)$  з дійсними коефіцієнтами, що для деяких дійсних чисел  $a$  і  $b$  для всіх  $x \in R$  виконується рівність

$$P(x + x^2 + x^3) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2010} + ax^{2011} + bx^{2012} + x^{2013}?$$

### **11. “Числовий автомат”**

Числовий автомат «ТЮМ-ХVI» може виконувати такі операції з натуральними числами: 1) відняти від даного числа 3 (якщо воно більше за 3); 2) помножити дане число на 3; 3) розділити дане число на 3 (якщо воно ділиться на 3 без остачі).

11.1. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 82 отримати число 81?

11.2. За яку найменшу кількість операцій можна з числа 81 отримати число 82?

11.3. Аналогічне питання щодо отримання числа  $n$  із числа  $m$ .

### **12. “Ортоцентричний тетраедр”**

Через точку перетину медіан кожної з граней тетраедра перпендикулярно до цієї грані проведено пряму. Доведіть, що всі ці чотири прямі перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли перетинаються в одній точці чотири прямі, які містять висоти цього тетраедра.

### **13. “Кола на площині”**

Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови:

а) відстань між центрами будь-яких двох кіл не більша за 10;

б) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший.

### **14. “Гральний кубик та теорія ймовірностей”**

Математик проводить підкидання кубика, на двох гранях якого записані одиниці, на двох гранях – двійки і на двох – трійки.

14.1. Кубик підкинули  $n$  разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки.

14.2. Кубик підкинули  $n$  разів. Визначте ймовірність того, що в процесі підкидання кількість випадань одиниці завжди буде не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки.

14.3. Кубик підкидають, доки кількість випадань одиниці стане не менше, ніж кількість випадань двійки, і не менше, ніж кількість випадань трійки. Визначте математичне сподівання кількості підкидань.