Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

*Відділення: математика*

*Секція: математики*

# Застосування теорії кривих постійної ширини для дослідження компактних упакувань кіл на площині з обмеженнями

Роботу виконав:
Скрипник Віталій
учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник:
Крисинська Ірина Володимирівна, завідуюча кафедрою математики Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки, вчитель-методист.

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики.

Миколаїв 2014

Зміст

Миколаївське територіальне відділення МАН України

**Тези**

науково-дослідницької роботи

«Застосування теорії кривих постійної ширини для дослідження компактних упакувань кіл на площині з обмеженнями»

Скрипник Віталій Володимирович, учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник: Крисинська Ірина Володимирівна, вчитель-методист, завідуюча кафедрою математики Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

На даний час залишається багато питань, пов'язаних з кривими постійної ширини та тілами постійної ширини. Наприклад, просторовий аналог теореми Барб'є - теорема про тіла Мейсснера.

Сформульована Томмі Боннесеном і Вернером Фенхелем в 1934 році гіпотеза стверджує, що тіла Мейсснера мінімізують об'єм серед всіх тіл заданої постійної ширини, проте ця гіпотеза не доведена. Через своє широке застосування в техніці, криві активно вивчають з метою геометричного моделювання складних за формою об'єктів. Дана тема зараз є актуальною в комп'ютерному моделюванні та аналітичній геометрії.

Метою нашого дослідження є застосування теорії кривих постійної ширини для дослідження компактних упакувань кіл на площині з обмеженнями.

Об'єктом дослідження є задача про найбільшу кількість кіл одиничного радіуса які можна розташувати на площині при певних умовах.

В роботі запропоновано розв'язок задачі «Кола на площині», розглянуто узагальнення стосовно максимальної кількості кіл при заданих умовах, а саме коли відстань між центрами будь – яких двох кіл буде не більша за $d$ та для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по іншій. Розроблена програма, для знаходження максимальної кількості кіл при заданих параметрах $r, d$, при умові, що $d > 2r$.

Розглядаючи узагальнення даної задачі у просторі ми зіткнулись з тим що в просторі немає аналога теореми Барб'є. Існує гіпотеза що серед всіх тіл постійної ширини найменший об'єм мають тіла Мейсненра, але на даний час гіпотеза не доведена. Поки що це питання залишається відкритим і може слугувати темою для подальшого дослідження.

Вступ.

Криві постійної ширини широко застосовуються в техніці, тому вивчення їх кінематичних властивостей є важливим не лише для математики, а й для фізики і техніки, також геометричні розрахунки останнім часом стають більш важливими в таких галузях, як комп'ютерна графіка та робототехніка.

Багато вчених - математиків звертали увагу на криві постійної ширини, серед них: І. Яглом, Е. Барб'є та інші. На даний час залишаються деякі питання, пов'язані з кривими та тілами постійної ширини, наприклад, просторовий аналог теореми Барб'є – гіпотеза про тіла Мейсснера.

Готуючись до XVI Всеукраїнського турніру юних математиків ім. М. Й. Ядренка (жовтень 2013 р., м. Сімферополь), ми зустрілись з задачею «Кола на площині», котра спонукала нас до більш детального дослідження кривих постійної ширини.

*Метою* нашого дослідження є застосування теорії кривих постійної ширини для дослідження компактних упакувань кіл на площині з обмеженнями.

*Об'єктом* дослідження є задача про найбільшу кількість кіл одиничного радіуса, які можна розташувати на площині при певних умовах.

*Особистий внесок:* запропоновано власний розв'язок задачі «Кола на площині», наведено деякі узагальнення стосовно максимальної кількості кіл при заданих умовах, розроблена програма, для знаходження максимальної кількості кіл при заданих параметрах $r, d$, при умові, що $\mathrm{d} > 2\mathrm{r}$.

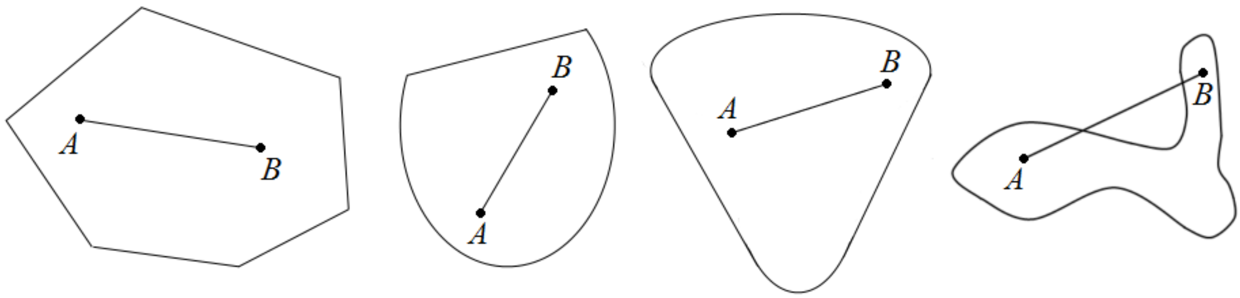
Розглядаючи узагальнення даної задачі у просторі ми зіткнулись з тим що в просторі немає аналога теореми Барб'є. Існує гіпотеза що серед всіх тіл постійної ширини найменший об'єм мають тіла Мейсненра, але на даний час гіпотеза не доведена. Поки що це питання залишається відкритим і може слугувати темою для подальшого дослідження.

# Розділ 1. Криві постійної ширини

## 1.1 Опукла фігура, опорна пряма, означення.

У цьому пункті ми нагадаємо деякі означення, котрі будуть використовуватись в роботі далі.

Плоска фігура називається опуклою, якщо вона повністю містить прямолінійний відрізок, котрий сполучає будь які дві точки, що належать фігурі.



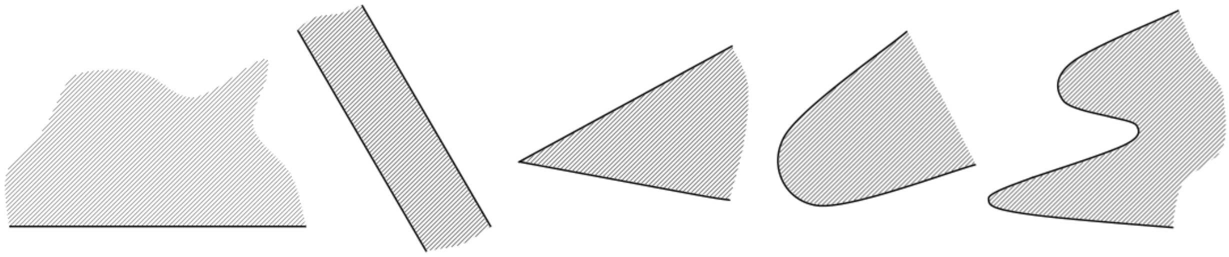

а) б) в) г)

Рис.1

Так на Рис.1 фігури а, б, в опуклі, а фігура г - не опукла. Коло і трикутник завжди опуклі фігури, а чотирикутник може бути як опуклим так і не опуклим, в залежності від того, де перетинаються його діагоналі, в середині чи зовні фігури.

Перерізом декількох опуклих фігур називається фігура, котра складається з точок, які належать кожній з фігур. Очевидно, що перерізом декількох опуклих фігур є опукла фігура.

Фігура є обмеженою, якщо вона повністю міститься в середині деякого кола.



а) б) в) г) д)

Рис.2

На Рис.2 зображені приклади не обмежених фігур.

Важливу роль в опуклій геометрії відіграють *опорні прямі*. Пряма називається опорною, якщо вона проходить через одну граничну точку фігури і вся фігура знаходиться по один бік від цієї прямої. На приклад, пряма, проведена через вершину трикутника паралельно до протилежної сторони, є опорною прямою трикутника. Кожна з сторін опуклого многокутника є його опорною прямою, дотична до кола також є опорною прямою кола. До кожної обмеженої опуклої фігури можна провести дві опорні прямі, перпендикулярні даній хорді.

Якщо провести дві прямі перпендикулярні даній хорді і сполучити точки дотику прямих, то отримаємо ширину фігури в заданому напрямку. Найбільша така ширина називається діаметром фігури.

В просторі означення опуклості фігури нічим не відрізняється від означення на площині. Границя опуклого об’ємного тіла називається опуклою поверхнею або опуклим многогранником. Замість опорних прямих в просторі розглядаються опорні площини.

В подальшому в роботі увага буде звертатися не до самих опуклих фігур, а до кривих, якими обмежені ці фігури.

## 1.2 Додавання опуклих фігур та кривих

Відоме правило паралелограма для додавання векторів дозволяє визначити «суму» точок на площині. Виберемо деяку точку О і назвемо її нульовою, або точкою відліку. Нехай точки А і В – дві довільні точки площини, тоді вершина С паралелограма ОАВС є сумою точок А і В. Нехай $Ф_1$ і $Ф_2$ дві плоскі опуклі фігури границями яких є випуклі криві $К_1$ і $К_2$. Множину всіх можливих сум точок котрі належать відповідно фігурам $Ф_1$ і $Ф_2$ будимо називати сумою фігур $Ф_1$ і $Ф_2$.

Наведемо приклади додавання опуклих фігур. Сумою довільної фігури і круга з центром в точці О і радіусом r буде сукупність всіх кіл радіуса r з центрами в точках даної фігури.

Додавання фігур має такі властивості, як і звичайне додавання.

$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

$A + B = B + A$

При цьому при додаванні порожньої множини і будь – якої фігури буде утворюватись порожня множина.

Легко показати, що периметр кривої, яка утвориться при додаванні двох інших кривих, буде рівний сумі їх периметрів.

Неважко довести, що при зміні початку відліку і при паралельному перенесені фігур, які додаються, не змінюється сума, лише переміщується в результаті паралельного переносу [1]. Тож форма фігури, отримана при додаванні двох фігур, не залежать від початку відліку.

Оскільки геометрія вивчає властивості фігур незалежно від їх розміщення на площині, а дане нами означення буде залежати від вибору початку відліку, то постає питання: чи можливо знаходити суму фігур незалежно від початку відліку. На основі даних нами властивостей додавання фігур можна вивести нове означення суми фігур.

Отже, наведемо інше означення суми двох фігур, котре не залежить від початку відліку.

Якщо $K_1$ і $K_2$ – дві опуклі криві, $A_1$ і $A_2$ – відповідні точки кривих, то геометричне місце точок $A_1+A_2$ є сумою кривих $K_1+K_2$. Крива $K_1+K_2$ має в точці $A_1+A_2$ опорну пряму паралельну опорним прямим кривих $K_1$ і $K_2$ в точках $A_1$ і $A_2$ (рис. 3)

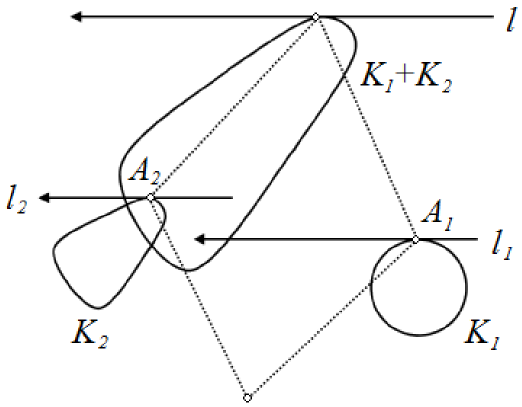



Рис.3

### 1.3 Основні властивості кривих постійної ширини

Шириною опуклої фігури в даному напрямку називається відстань між парою паралельних опорних прямих до даного напрямку. Якщо ширина у всіх напрямках рівна, то така крива називається кривою постійної ширини. Оскільки ширина кривої у всіх напрямках рівна, то можна говорити не про ширину кривої в даному напрямку, а просто про ширину кривої. Найпростішими прикладами таких кривих є коло і трикутник Рело. Можливе також інше визначення кривих постійної ширини, котре пов'язане з його кінематичними властивостями: кривою постійної ширини називається фігура, що може обертатися в середині квадрата, дотикаючись до всіх його сторін.

Більш детально з властивостями кривих постійної ширини, ви можете ознайомитись в книзі «опуклі фігури» І. Яглома, В. Болтянского [1].

Зупинимось на таких властивостях:

1) Відстань між точками кривої постійної ширини d не перевищує d.

Якщо хорда кривої постійної ширини перевищує d, то відстань між опорними прямими, перпендикулярними до хорди, буде більша за d, що суперечить означенню кривої постійної ширини.

Криві, які мають таку властивість: відстань між будь якими двома точками кривої не перевищує d і для будь якої точки можна знайти точку, відстань до якої рівна d, також можна назвати кривими постійного діаметра. З властивості 1 маємо, що якщо крива є кривою постійної ширини, то це є необхідною і достатньою умовою того, що ця крива є кривою постійного діаметра.

2) Будь яка хорда кривої постійної ширини рівна ширині кривої є її діаметром.

Проведемо дві опорні прямі опуклої фігури перпендикулярні до хорди AB-довжини d. Вся фігура лежить між цими прямими. Отже, будь яка хорда довжини d буде діаметром фігури.

3) Єдина крива постійної ширини котра має центр симетрії – коло.

Нехай K – крива постійної ширини і O – центр симетрії кривої. Всі діаметри кривої проходять через точку O. Дійсно, нехай AB і A'B' діаметри кривої, що не проходять через точку O. За властивістю симетрії ці відрізки паралельні.

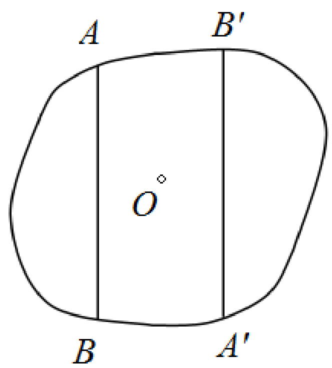



Рис.4

Тоді утворюється чотирикутник ABA'B' вписаний в криву. Оскільки сума кутів чотирикутника рівна 360°, то один з них не менший 90°. Нехай кут $A \geq 90°$, тоді відрізок $B'B > AB = d$. Але тоді довжина хорди кривої постійної ширини більша за d, що неможливо в силу вл.1. Отже, всі діаметри кривої проходять через точку O. В силу симетрії кожний діаметр точкою O ділиться навпіл, таким чином K – коло з радіусом $\frac{d}{2}$.

Кутовою точкою кривої постійної ширини називається точка, котра належить кривій і є точкою перетину двох діаметрів цієї кривої.

4) Якщо крива постійної ширини має кутову точку, то деяка дуга кривої є дугою кола радіуса рівного ширині кривої. Справедлива і достатня умова.

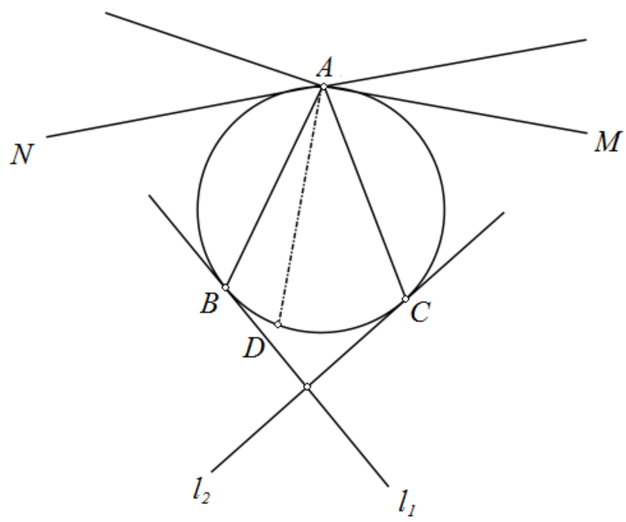



Рис.5

Нехай A – кутова точка кривої постійної ширини d, AM і AN промені дотичні до кривої. Проведемо AB і AC перпендикулярні відповідно AM і AN довжини d. Проведемо BC – дугу кола з центром в точці A і радіусом d. Нехай D-довільна точки дуги, проведемо AD. *L* пряма, перпендикулярна AD і проходить через точку A. Дана пряма є опорною для кривої і промені AM і AN лежать по один бік від неї, отже AD – діаметр кривої. Точка D лежить на кривій. Всі точки дуги лежать на кривій.

Аналогічно: нехай деяка дуга BC є дугою кола радіуса d, A-центр кола. Проведемо прямі $l_1$ і $l_2$. Дотичні в точках B і C, тоді ці прямі - опорні, звідси AB і AC перпендикулярні $l_1$ і $l_2$ і рівні d, діаметри кривої. Отже, в точці A перетинаються два діаметри, точка A – кутова.

5) Внутрішній кут при кутовій точці кривої не більший 120°, крива, де досягається рівність – трикутник Рело.

Нехай кут при точці A (кутовій точці) більший за 120°. Тоді кут вміщений в кривій буде більшим за 60°. Але тоді крива постійної ширини d буде вміщувати дугу кола котра стягує кут більший за 60°. А відрізок, що з'єднує кінці цієї дуги більша за d, що суперечить вл.1.

Нехай тепер кут рівний 120°, тоді крива містить в собі дугу BC кола радіуса d з центральним кутом BAC рівним 60°. Трикутник ABC - рівносторонній, оскільки BC = d, то цей відрізок є діаметром кривої-прямі $l_1$ і $l_2$ що проходять через B і C опорні і відстань між ними d.

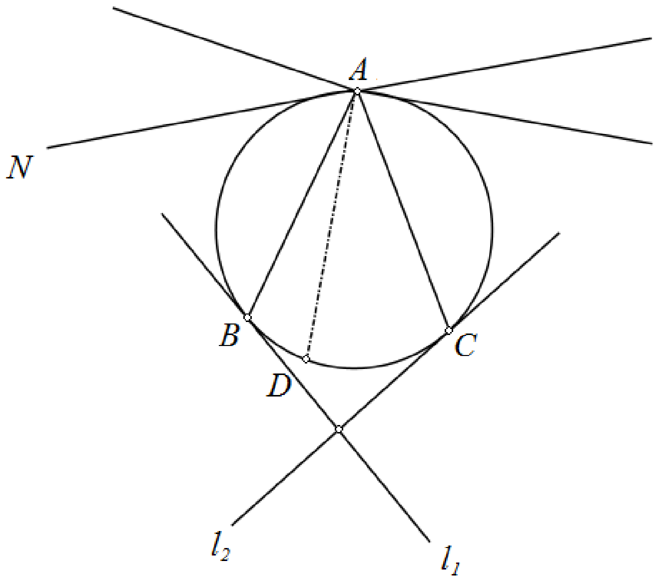



Рис.6

Так як діаметри AB і BC перетинаються в точці B, B-кутова точка. Значить дуга кола з центром в точці B з'єднуюча A і C повністю належить кривій. Аналогічно дуга що з'єднує A і B. Три проведені дуги в сумі утворюють трикутник Рело.

6) Сума кривої постійної ширини і тієї самої кривої повернутої на 180° є колом радіуса рівного ширині кривої.

Нехай К – довільна крива постійної ширини, К′ - крива отримана поворотом на 180° навколо О – точка відліку (центральної симетрії з центром в точці О), К*=К+К′ - їх сума.

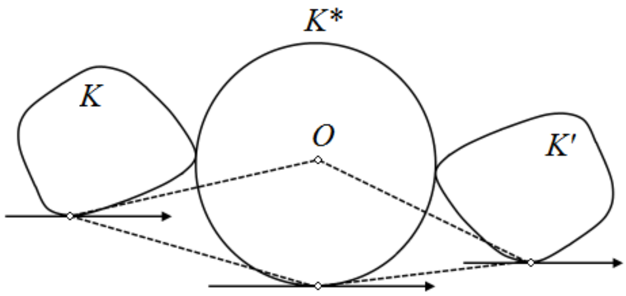



Рис.7

З властивостей до давання фігур (п.1.2) маємо що К* крива постійної ширини 2d (d-ширина кривої К). Крім того К*=К+К′ має центр симетрії в точці О, тобто при повороті фігури К* на 180° вона переходить сама в себе. При такому повороті крива К переходить в К′, а К′ в К, отже сума переходить сама в себе. Згідно властивості 3 крива К* є колом радіуса d.

7) Якщо сумою двох кривих, одна з яких отримана поворотом на 180° іншої прямої, є коло, то ці криві - криві постійної ширини.

Нехай К-така опукла крива, що сума К*=К+К′ кривої К і К′, симетричної з кривою К, відносно деякої точки О (отриманої з К поворотом на 180° відносно О), є колом радіуса d. Якщо ширина кривої К в якомусь напрямку рівна *l*, то і ширина кривої К′ теж рівна *l*.

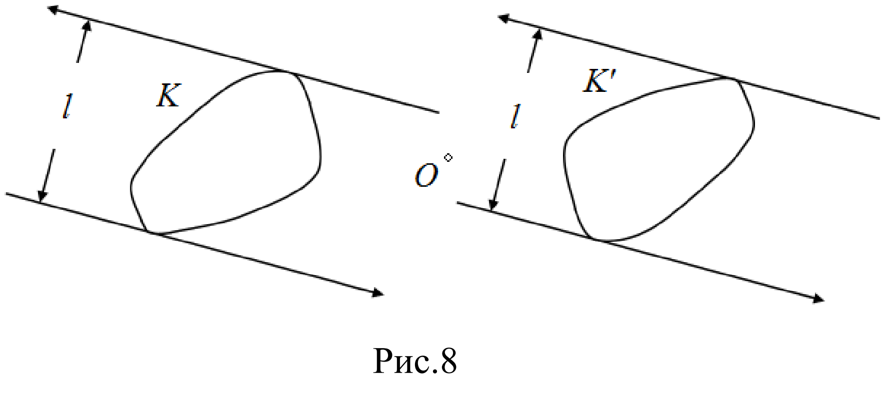



Рис.8

Відповідно до п.1.2 ширина кривої К*=К+К′ в цьому напрямку рівна 2*l*. Так як К* коло радіуса d, то ширина його в кожному напрямку рівна 2d, тобто 2d=2*l*, відповідно d = *l*. Звідки К – крива постійної ширини d.

8) Теорема Барб'є

Довжина кривої постійної ширини діаметра d рівна πd.

*Доведення*

1 спосіб

Відповідно властивості 6 сума фігури і її образу при центральній симетрії буде колом, його діаметр рівний двом діаметрам кривої. Як відомо периметр кола діаметра 2d буде рівним 2πd. При додаванні двох фігур периметр буде рівним сумі периметрів фігур, що додаються, як було сказано вище. Отже, периметр кривої постійної ширини рівний половині периметра кола, тобто πd що й треба було довести.

2 спосіб

Теорема була доведена французьким математиком і астрономом Емілем Барб'є у 1860 році. Доведення теореми базується на розв'язанні задачі котра звучить так: яка ймовірність того що при киданні опуклої фігури на площину розкреслену прямими на відстані d один від одної, і за умови що фігура не може перетнути більше, ніж одну пряму, фігура периметра L перетне одну з прямих. Дана задача була розв'язана французьким математиком і астрономом Емілем Барб'є у 1860 році [2]. Він отримав, що ймовірність події рівна $\frac{L}{\pi d}$. Тут L – периметр фігури, d-відстань між прямими. Оскільки крива постійної ширини d задовольняє умову задачі, причому d – ширина кривої. При киданні на площину фігури постійної ширини d, фігура гарантовано перетне одну з прямих. Отже, ймовірність рівна 1 і периметр рівний πd, що й треба було довести.

9) Серед всіх випуклих фігур діаметра d найбільшу довжину має крива постійної ширини.

Доведення:

Нехай К – деяка опукла крива діаметра 1, К '- крива, отримана з К в результаті симетрії відносно деякої точки, К*=К+К′. Очевидно, що К* є опуклою фігурою, що містить центр симетрії, діаметр кривої рівний 2, а довжина – подвоєна довжина кривої К (це випливає з означення суми фігур п. 1.2). Відстань будь якої точки кривої К* від центру симетрії О цієї кривої не може бути більше 1, тому що в протилежному випадку діаметр кривої К* був би більше 2. Отже, крива К* знаходиться у середині кола радіуса 1. Довжина К* (а це відповідно, і довжина К, що рівна половині довжини К*) буде найбільшою, якщо К* є колом радіусу 1. А отже, відповідно до властивості 7, крива К – крива постійної ширини.

# Розділ 2 «Кола на площині»

## 2.1 Задача «Кола на площині»

***Задача 1. Кола на площині.***

Визначте, яку найбільшу кількість кіл одиничного радіуса можна розташувати на площині так, що б виконувались такі дві умови:

а) відстань між центрами будь – яких двох кіл не більша за 10;

б) для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл — по іншій.

***ЛЕМА 1.*** У вершинах довільного трикутника розташовані кола одиничного радіуса. Для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл - по іншій, тоді і тільки тоді, коли всі висоти цього трикутника не менші за 2.

*ДОВЕДЕННЯ :* Якщо висота трикутника не менша за 2, то зовнішня дотична до двох кіл, що перетинає трикутник, буде шуканою прямою (рис. 9). Якщо ж висота трикутника менша за 2, то для кола з центром у вершині трикутника, з якої виходить висота, менша за 2, такої прямої не існує. Що й треба було довести.

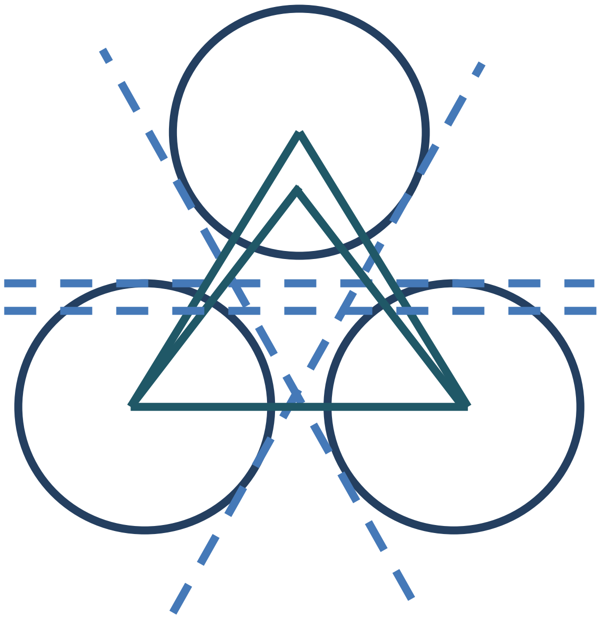


Рис. 9

Шість кіл, що задовольняють умову задачі можна розташувати у вершинах правильного шестикутника зі стороною 5.

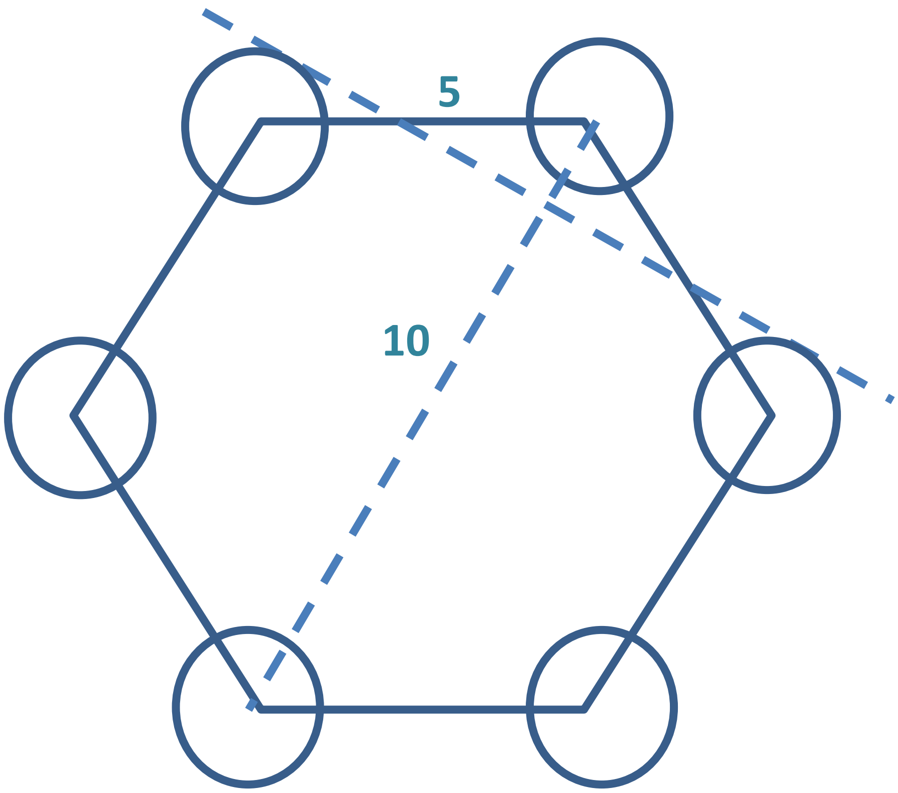



Рис.10

Нехай на площині розміщено n кіл одиничного радіуса, що задовольняють умови задачі (рис. 11).

Центри кіл утворюють опуклий многокутник $A_1, A_2, \dots A_n$ (в іншому випадку не можна провести пряму, яка відділяє одне коло від решти).

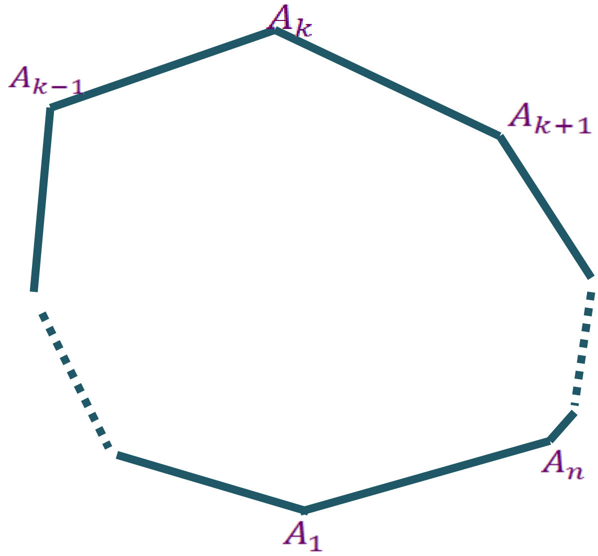



Рис.11

Розглянемо $\Delta A_{k-1}A_kA_{k+1}$

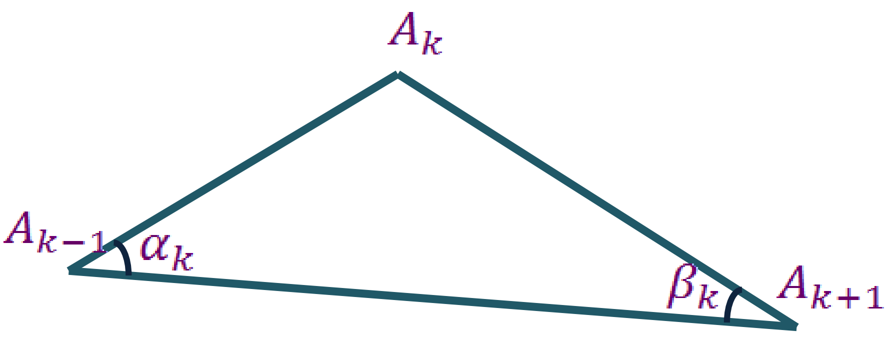



Рис.12

Введемо позначення: $\angle A_{k-1}A_kA_{k+1} = \alpha_k$, $\angle A_kA_{k+1}A_{k-1} = \beta_k$, $h_k$ - висота, опущена на сторону $A_{k-1}A_{k+1}$, P – периметр n - кутника $A_1A_2\ldots A_n$. Тоді: $A_kA_{k+1} = \frac{h_k}{sin\beta_k} \geq \frac{2}{sin\beta_k}$, $A_{k-1}A_k = \frac{h_k}{sin\alpha_k} \geq \frac{2}{sin\alpha_k}$. Додавши n пар таких нерівностей маємо:

$$P \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{sin\alpha_k} + \frac{1}{sin\beta_k}\right)$$

На інтервалі (0,π) функція $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ опукла вниз, отже для довільних $x$ з цього інтервалу виконується нерівність: $\frac{\sum_{i=1}^{m} f(x_i)}{m} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m}\right)$ - нерівність Єнсена. Звідси:

$$P \geq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{sin\alpha_k} + \frac{1}{sin\beta_k}\right) \geq \frac{2n}{sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)}{2n}\right)} = \frac{2n}{\sin(\frac{2\pi}{2n})} = \frac{2n}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

ВЛАСТИВОСТІ котрі були наведені раніше:

1) Довжина кривої постійної ширини *d* рівна πd (теорема Барб’є);

2) Серед всіх фігур з діаметром *d* найбільшу довжину має крива постійної ширини.

Діаметр d нашого n – кутника не перевищує 10, отже його периметр не перевищує 10π<31,5.

З виведеної нами нерівності

$$P \geq \frac{2n}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

Для n=7, маємо:

$$P \geq \frac{14}{\sin(\frac{\pi}{7})} > 32$$

Отримали протиріччя $\Longrightarrow$ для семи кіл умова задачі виконуватись не може.

ОТЖЕ, максимальна кількість одиничних кіл, які б задовольняли умову задачі – 6 кіл.

## 2.2 Узагальнення задачі «Кола на площині»

Природно розглянути таке узагальнення задачі:

Визначте, яку найбільшу кількість кіл радіуса r можна розташувати на площині так, щоб виконувались такі дві умови:

а)відстань між центрами будь – яких двох кіл не більша за d;

б)для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший.

За аналогією маємо:

$$P \geq r\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{sin\alpha_k}+\frac{1}{sin\beta_k}\right) \geq r\frac{2n}{sin\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k+\beta_k)}{2n}\right)} = r\frac{2n}{\sin(\frac{2\pi}{2n})} = \frac{2nr}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

З іншого боку

$$P \leq \pi d$$

Маємо:

$$\frac{2nr}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \leq \pi d \qquad (*)$$

В даній нерівності рівність досягатись не може, оскільки в першій нерівності рівність досягається в правильному трикутнику, а у другій нерівності за умови що фігура є кривою постійної ширини.

Ця оцінка є необхідною умовою того що $\mathrm{n}$ кіл можна розмістити так щоб виконувалась умова задачі. Достатня умова поки що нами не доведена.

Використовуючи алгоритмічну мову програмування Pascal нами була написана програма для знаходження максимальної кількості кіл при заданих параметрах $r, d$, при умові, що $\mathrm{d} > 2\mathrm{r}$. (Дивись додаток). Зрозуміло що при будь якому $\mathrm{d}$ можна побудувати одне коло так щоб виконувались умови. Очевидно що при $\mathrm{d} \leq 2\mathrm{r}$ можна зобразити лише одне коло.

Програма основана на застосуванні формули (*), методом перебору досягається оцінка необхідної умови існування кількості кіл.

Розглядаючи узагальнення даної задачі у просторі ми зіткнулись з тим що в просторі немає аналога теореми Барб'є. Існує гіпотеза що серед всіх тіл постійної ширини найменший об’єм мають тіла Мейсненра, але на даний час гіпотеза не доведена. Поки що це питання залишається відкритим і може слугувати темою для подальшого дослідження.

# ВИСНОВКИ

Результати проведеного дослідження дають змогу зробити такі висновки.

Дана робота складається з вступу, двох розділів, висновку та списку використаних джерел.

У першому розділі містяться теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задачі. Наведено означення, які використовуються в роботі і містяться відомості про додавання опуклих кривих, деякі властивості кривих постійної ширини та їх доведення.

В другому розділі було представлено розв'язання задачі про визначення найбільшої кількості кіл одиничного радіуса, які можна розташувати на площині так, щоб відстань між центрами будь – яких двох кіл була не більша за 10 та для кожного з кіл знайдеться така пряма, що це коло лежить по один бік від неї, а решта кіл – по інший; та виконано деякі її узагальнення, щодо значення радіуса $r$ кіл і максимальної відстані між центрами $d$.

Проте залишаються відкритими деякі питання, що дає можливість для подальшого продовження дослідження в даному напрямку. Наприклад, можливість узагальнення даної задачі в просторі, яку найбільшу кількість сфер радіуса r можна розташувати в просторі так, щоб виконувались такі дві умови: відстань між центрами будь – яких двох сфер не більша за $d$; для кожної з сфер знайдеться така площина, що ця сфера лежить по один бік від неї, а решта сфер – по інший. Проблемою є поки що те, що в просторі ми не бачимо оцінки, для визначення найбільшої кількості сфер.

**Список використаних джерел**


1. Яглом И. М., Болтянский В. Г. Выпуклые фигуры. М.-Л., ГТТИ, 1951. - 343с.
2. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры М.: Физматгиз, 1962. 264с.
3. Люстерник Л. Выпуклые фигуры и многогранники // ГИТТЛ, Л. : 1956г., - 212 с.
4. Выпуклость. Избранные главы / Зелинский Ю. Б. – Київ: Інститут математики НАН України, 2012. – 280 с.[Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.academia.edu/4412165/
5. Завдання для відбірних етапів XVI Всеукраїнського турніру юних математиків. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/2013/Problems_TYM_2013.pdf
6. BARBIER, E. Note sur le problème de l’aiguille et le jeu du joint couvert. Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 5 (1860), p. 273-286. - [Електронний ресурс]. – Режим доступу:<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1860_2_5_A18_0>

## Додаток. Програма підрахунку кількості кіл.

```
Program nerivnist;
var
d,r:real;
i,n,f:integer;
begin
writeln('Вітаю!Введіть початкові данні,будь ласка!');
write('d=');
readln(d);
write('r=');
readln(r);
n:=0;
f:=0;
while f=0 do
 begin
 n:=n+1;

 if (pi*d)/(2*r)<n/(sin(pi/n)) then f:=1;
 end;

 writeln('Відповідь: n=',n-1,'.');

end.
```

```
Program nerivnist;
var
d,r:real;
i,n,f:integer;
begin
writeln('Вітак!Введіть початкові данні,будь ласка!');
write('d=');
readln(d);
write('r=');
readln(r);
n:=0;
f:=0;
while f=0 do
 begin
 n:=n+1;

 if (pi*d)/(2*r)<n/(sin(pi/n)) then f:=1;
 end;

 writeln('Відповідь: n=',n-1,'.');

end.
```

```
Вітаю!Введіть початкові данні,будь ласка!
d=10
r=1
Відповідь: n=6.
```

На рисунку зображено приклад роботи програми при d=10, r=1.Відповідь n=6.

Також нами були проведені дослідження для певних параметрів $r, d$ і отримані такі результати:

| № | d | r | n |
|---|---|---|---|
| 1. | 100 | 5 | 9 |
| 2. | 2014 | 1 | 99 |
| 3. | 2014 | 1000 | 2 |
| 4. | 298 | 5 | 17 |
| 5. | 47 | 15 | 3 |