Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: математика
Секція: математика

РОЗВ'ЯЗОК ДІОФАНТОВОГО РІВНЯННЯ З ТЕРНАРНОЮ КВАДРАТИЧНОЮ ФОРМОЮ ДЛЯ ЧИСЕЛ ФЕРМА

Роботу виконала:
Яковенко Наталія Олександрівна,
учениця 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник:
Майборода Валерій Антонович,
старший вчитель Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки,
вчитель вищої категорії

Миколаїв, 2015

ТЕЗИ

РОЗВ'ЯЗОК ДІОФАНТОВОГО РІВНЯННЯ З ТЕРНАРНОЮ КВАДРАТИЧНОЮ ФОРМОЮ ДЛЯ ЧИСЕЛ ФЕРМА

Яковенко Наталія Олександрівна
Миколаївське територіальне відділення МАН України
учениця 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені В.Д.Чайки
Науковий керівник – Майборода Валерій Антонович,
старший вчитель ММК ім. В. Д. Чайки, вчитель вищої категорії

Теорія чисел займається вивченням властивостей цілих чисел, але вона займається і властивостями інших чисел: алгебраїчних, трансцендентних. Теорія чисел – це також теорія алгебраїчних функцій з скінченним полем констант і аналітична теорія чисел.

Теорія чисел в сучасному світі стає все більш актуальною. Насамперед об'єкти, задачі, ідеї, поняття та методи теорії чисел служать для створення і розвитку понять, методів, алгоритмів в інших областях математики. Також теорія чисел застосовується і в інших областях науки і техніки, наприклад, в криптографії, кристалографії та радіотехніці.

Метою даної наукової роботи є ознайомлення з теорією чисел, проблемою Варінга, знаходження розв'язків рівняння вигляду $F_n = x^2 + y^2 + z^2$, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма.

В даній роботі, яка може бути віднесена до області адитивної теорії чисел розглядається питання про представлення чисел Ферма у вигляді суми трьох квадратів та пошуку формул для них.

Особистий внесок: запропоновано формули, що дозволяють розв'язати діофантове рівняння вигляду $F_n = x^2 + y^2 + z^2$, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма, в двійковій і десятковій системі числення, також нами була написана програма, що показує чому дорівнює кількість розв'язків, при n=3,4,5, створено гіпотезу для знаходження формули $R_3(F_n)$.

ЗМІСТ

Вступ

Теорія чисел займається вивченням властивостей цілих чисел, але вона займається і властивостями інших чисел: алгебраїчних, трансцендентних. Теорія чисел – це також теорія алгебраїчних функцій з скінченним полем констант і аналітична теорія чисел. Якщо говорити про теперішній час, то теорія чисел на стільки розширилась, що перетворилась в безліч нових дисциплін – в сучасну алгебру, в геометрію чисел, в ймовірнісну теорію чисел і т. д.

Ми будемо розрізняти *теорію чисел*, розуміючи під цим науку про властивості цілих чисел, і *сучасну теорію чисел*, що виникла з теорії чисел в зв'язку з розширенням поняття цілого числа та новими методами.

Теорія чисел в сучасному світі стає все більш актуальною. Насамперед основне застосування теорії чисел : об'єкти, задачі, ідеї, поняття, методи теорії чисел служать для створення і розвиток понять, методів, алгоритмів в інших областях математики. Також теорія чисел застосовується і в інших областях науки і техніки, наприклад, в кристалографії та радіотехніці.

Метою даної наукової роботи є ознайомлення з теорією чисел, проблемою Варінга, знаходження розв'язків рівняння вигляду $F_n = x^2 + y^2 + z^2$, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма.

Особистий внесок: запропоновано формули, що дозволяють розв'язати діофантове рівняння вигляду $F_n = x^2 + y^2 + z^2$, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма, в двійковій і десятковій системі числення, також нами була написана програма, що показує чому дорівнює кількість розв'язків, при n=3,4,5, створено гіпотезу для знаходження формули $R_3(F_n)$.

Розділ 1. Проблеми теорії адитивних чисел.

1.1. Огляд результатів по даній тематиці.

В даній роботі, яка може бути віднесена до області адитивної теорії чисел розглядається питання про представлення чисел Ферма у вигляді суми трьох квадратів та пошуку формул для них.

Рівняння вигляду P(x, y,…,z)=0, де P(x, y,…,z)=0 многочлен декількох змінних із цілими коефіцієнтами, для яких потрібно знайти цілі розв'язки, називають, *діофантовими рівняннями*. Названі вони ім'ям грецького математика Діофанта, який жив у III столітті н. е. Його книга «Арифметика» включала в себе 189 задач із цілими числами, для кожної з яких наводилося один або декілька розв'язків.

Розв'язати діофантове рівняння означає:

1) з'ясувати, чи має рівняння хоча б один ненульовий розв'язок у цілих числах;

2) якщо рівняння має розв'язок в цілих числах, то з'ясувати скінченна чи нескінченна множина його розв'язків;

3) знайти всі цілі розв'язки рівняння.

Лінійні діофантові рівняння навчились розв'язувати ще до Діофанта. Стародавні греки знали, що якщо це рівняння має розв'язок, то йому буде задовольняти нескінченна множина пар чисел (x, y) виду $x = x_0 + bk \quad y = y_0 - bk$, де k — будь-яке ціле число.

Математики Стародавньої Греції та Стародавньої Індії знали методи розв'язання деяких рівнянь другого степеня вигляду $ax^2 + bxy + cy^2 = dz^2$.

Зокрема їм були відомі всі піфагорові трійки натуральних чисел x, y, z, що задовольняють рівняння $x^2+y^2 =z^2$. Всі трійки взаємно простих піфагорових чисел стародавні математики знаходили за формулами $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$, де m, n — натуральні числа, $n > m$ [1].

Вони будуть примітивними, якщо і тільки якщо m і n взаємно прості й одне з них парне (якщо б обидва були непарними, тоді числа a, b і c були б парними, а значить, трійка не була б примітивною). Виведення поданих формул полягає у тому, що нехай a, b, c - деякі примітивні числа Піфагора. Вочевидь, два з них мають бути непарними, а одне - парним.

Доведемо, що випадок, коли a, b- непарні, а c – парне – неможливий. Справді, якщо c є парним, то c^2 ділиться на 4, тоді як $a^2 + b^2 =(2p+1)^2 + (2q+1)^2 =4p^2+4p+1+4q^2+4q+1$ при діленні на 4 дає в остачі 2.

Отже, припустимо, що a, c- непарні, b - парне. Записавши $a^2 - c^2 = b^2$ і враховуючи $a^2 - c^2 = (a+c)(a-c)$ та ділячи на 4 остаточно, одержуємо:

$$\frac{c-a}{2}\cdot\frac{c+a}{2}=\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

У попередній формулі множники в лівій частині є взаємно простими. Інакше їх спільний дільник був би спільним дільником і для a,c, а значить і для b, що неможливо. Оскільки два множники взаємно прості, а їх добуток є квадратом цілого числа, то кожне з цих чисел є квадратом цілого числа.

Поклавши :

$$\frac{m^2}{2}=\frac{c-a}{2}$$

$$\frac{n^2}{2}=\frac{c+a}{2}$$

і виразивши a,b,c через m,n одержуємо необхідні формули.

У 20-х роках XX століття англійський математик Л. Морделл висунув гіпотезу, що рівняння вищого степеня, ніж третій, можуть мати лише скінчену кількість цілих розв'язків. Цю гіпотезу було доведено голландським математиком Фалтінгсом в 1983 році .

Особливе місце серед діофантових рівнянь посідає рівняння

$$\mathrm{x}^{\mathrm{n}}+\mathrm{y}^{\mathrm{n}}=\mathrm{z}^{\mathrm{n}},$$

де n — натуральне число.

Французький математик П'єр Ферма стверджував, що для $n > 2$ це рівняння не має розв'язків у натуральних числах. Однак довести це твердження, яке названо Великою теоремою Ферма, виявилося не так просто.

1.2. Проблеми Гольдбаха-Варінга

В адитивній теорії чисел вивчаються питання про представлення деякої послідовності натуральних чисел, сумою скінченного числа доданків вказаного виду.

Історично першими прикладами подібних задач стали:

- тернарна проблема Гольдбаха (1742 р.) про представлення непарних чисел, починаючи з 7, сумою трьох простих чисел;
- проблема Ейлера (1742 р.) (або бінарна проблема Гольдбаха) про представлення парних чисел, що більші за 2, у вигляді суми двох простих;
- проблема Варінга (1770 р.), що являється узагальненням теореми Лагранжа, яка стверджує, для кожного цілого числа n > 1, існує таке число k = k(n), що будь-яке натуральне число N може бути представлено у вигляді :

$$x_1^n + x_2^n + .. + x_k^n = N,$$

з цілими невід'ємними $x_1, x_2, \dots, x_k$;

- проблема Гольдбаха-Варінга, поставлена на початку 19-го століття, про представлення цілого числа сумою степенів простих чисел.

Однією з основних проблем, що не має універсального розв'язку є проблема отримання формул для довільного діофантового рівняння. В тому числі не відомо кожного разу про конкретну кількість розв'язків в таких рівняннях у загальному вигляді. Таким чином, пошук формул та кількості розв'язків залишається актуальною і відкритою проблемою сьогодення.

Розділ 2. Діофантове рівняння вигляду $x^2 + y^2 + z^2 = N$

Діофантове рівняння вигляду

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{N} \qquad (1)$$

є частковим випадком проблеми Варінга, при k=3 і n=2.

Якщо $\mathrm{N} = F_n = 2^{2^n} + 1$, то рівняння в цьому вигляді було запропоновано на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М. Й. Ядренка (2014 рік м. Чернівці) у задачі «Зображення чисел Ферма»[7].

Сформулюємо умову задачі «Зображення чисел Ферма»:

«Числа $2^{2^n} + 1$ називаються числами Ферма. При $n \geq 3$ подайте кожне з них у вигляді суми квадратів трьох різних натуральних чисел».

В нашій роботі ми вирішили не тільки розв'язати цю задачу, але і дослідити питання більш ширше, що і буде представлено далі.

2.1. Можливість розв'язку діофантових рівнянь вказаного типу.

Проблема Варінга-Гольдбаха ставить питання про можливість представлення цілого числа сумою степенів простих чисел. Різні варіації цієї проблеми полягають в тому, що розглядають і різні степені, і числа необов'язково прості. Ейлером було показано, що всі натуральні числа за виключенням чисел виду $4^m(8n + 7)$ m,n=0,1,2…, можна представити у вигляді суми трьох квадратів.

2.2. Розв'язок діофантового рівняння $F_n = x^2 + y^2 + z^2$

В даному параграфі ми розглянемо рівняння

$$F_n = x^2 + y^2 + z^2 \qquad (2),$$

де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма.

Згідно з теоремою Ейлера воно має розв’язки, оскільки $F_n \neq 4^m(8n+7)$ m,n=0,1,2… Але, по-перше, невідомі формули, що дозволяють їх знаходити, і, по-друге, невідома функція $R_3(n)$ - кількість розв’язків рівняння (1). Покажемо, як можна вирішити питання про знаходження розв’язків рівняння (2).

Теорема 2.2.1. Числа виду

$$\begin{cases} a = \dfrac{2 \times 2^{2^{n-1}} + 1}{3} \\ b = \dfrac{2^{2^{n-1}} + 2}{3} \\ c = \dfrac{2 \times 2^{2^{n-1}} - 2}{3} \end{cases} \qquad (3)$$

при n≥3 – натуральні і різні.

Доведення:

Скористаємось методом математичної індукції. Зробимо припущення, що 2 в парній степені конгруентне одиниці за модулем 3.

1. Створимо базу індукції : перевіримо справедливість твердження для n=1, n ∈ ℕ.

$$2^2 \equiv 4(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3)$$

2. Зробимо припущення, що твердження правильне для n=k.

$$2^{2k} \equiv 1(mod\ 3)$$

3.Доведемо, що твердження правильне для n=k+1.

$$2^{2(k+1)} \equiv 4(mod\ 3) \equiv 1(mod\ 3)$$

Отже, можна зробити висновок, що гіпотеза є правильною.

Оскільки n≥3, то $2^{2^{n-1}} \equiv 1(mod\ 3)$.

Звідси :

$$2^{2^{n-1}} + 2 \equiv 0(mod\ 3)$$

$$2 \times 2^{2^{n-1}} - 2 \equiv 0(mod\ 3)$$

$$2 \times 2^{2^{n-1}} + 1 \equiv 0(mod\ 3)$$

Отже, a, b і c – різні натуральні числа, що і треба було довести.

Теорема 2.2.2.

Сума квадратів чисел a, b, c, що обчислюються за формулами (3), дорівнює числам Ферма, при $\mathrm{n} \geq 3$.

Доведення:

Дійсно, знайшовши суму квадратів вказаних чисел та застосувавши формули скороченого множення, після спрощень, отримуємо :

$$\left(\frac{2^{2^{n-1}} + 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2^{2^{n-1}} - 2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2 \times 2^{2^{n-1}} + 1}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{2^{2^n} + 4 \times 2^{2^{n-1}} + 4}{9} + \frac{4 \times 2^{2^n} - 8 \times 2^{2^{n-1}} + 4}{9} + \frac{4 \times 2^{2^n} + 4 \times 2^{2^{n-1}} + 1}{9} =$$

$$= \frac{9 \times 2^{2^n} + 9}{9} = 2^{2^n} + 1 = F_n$$

Теорема доведена.

2.3. Розв'язок діофантового рівняння $F_n = x^2 + y^2 + z^2$ *у бінарній системі.*

Вирішити проблему знаходження однієї із серій розв'язків можна також перейшовши до двійкової системи.

Теорема 2.3.1. Всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, $\mathrm{n} \geq 3$ у двійковій системі числення можуть бути подані у вигляді суми трьох квадратів (тернарної квадратичної форми) наступним чином:

$$F_n = 1\underbrace{00..00}_{2^{n-1}}1 = \left(\underbrace{10..10}_{2^{n-2}-1}11\right)^2 + \left(\underbrace{10..10}_{2^{n-2}}\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-2}110\right)^2 \quad (4)$$

Правильність теореми випливає із наступних тверджень.

Лема 2.3.1. Всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$, $\mathrm{n} \geq 3$ у двійковій системі числення мають вигляд :

$$F_n = 1\underbrace{00..00}_{2^{n-1}}1$$

Лема 2.3.2. Для чисел виду

$$a = \underbrace{10..10}_{2^{n-2}-1}11\,, b = \underbrace{10..10}_{2^{n-2}}\,, c = \underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-2}110$$

справедлива рівність :

$$a^2 + b^2 + \mathrm{c}^2 = 1\underbrace{00..00}_{2^{n-1}}1$$

Справедливість леми 1 і леми 2 в свою чергу ґрунтується на теоремі про можливість запису будь-якого натурального числа в p-ічній системі числення ($p \geq 2$) єдиним способом. А також на властивостях арифметичних операцій в цих системах.

2.4. Вивчення можливості знаходження всіх розв'язків.

Під кількістю розв'язків діофантового рівняння ми, як і прийнято, розуміємо всі впорядковані набори чисел, що його задовольняють. В цьому контексті при кожному n формули (3) задають лише 6(3!) розв'язків. В той же час всі розв'язки даного рівняння не вичерпуються проведеними формулами. Шляхом створення програми «Search triples» пошуку трійок для рівняння вигляду

$$\mathrm{F_n} = \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2$$

методом комп'ютерного перебору ми встановили, що для $n = 3$ існує ще дві трійки, кожна з яких задає по 6 розв'язків. Розроблена програма представлена у додатках. Ми представимо по одному розв'язку кожної із базових трійок.

Усі можливі трійки для $n = 3$

a	b	c
6	10	11
5	6	14
7	8	12

Для $n = 4$ можливих трійок 79

a	b	c
86	170	171
2	142	213
10	114	229
50	174	181
139	150	154

Для $n = 5$ можливих трійок 1461

a	b	c
21846	43690	43691
1746	46315	46334
15963	44402	45482
30008	38952	43327
37440	37664	38401

Очевидно, що простої закономірності, яка дозволяла б оцінити функцію $R_3(F_n)$ не існує (тут $R_3(F_n)$ – функція, що визначає кількість розв'язків, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма).

В той же час було помічено, що всі числа Ферма взаємно прості, тобто $(F_n; F_k) = 1,\ n \neq k$.

Правильність цього факту випливає із наступної леми.

Лема 2.3.3. Правильна рівність :

$$(1+x)\left(1+x^{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+x^{2^{k-1}}\right)=1+x+x^{2}+\ldots+x^{2^{k}-1} \quad (*)$$

Доведення:

Скористаємось методом математичної індукції.

База : $n=1$. Тоді рівність очевидна.

Нехай $k>1$. Домножимо ліву і праву частину рівності (*) на $1+x^{2}$. Тоді у правій частині до тих членів, що були, додадуться члени, що отримуються при множенні $1, x, x^{2}, \ldots, x^{2^{k}-1}$ на множник $x^{2^{k}}$. Тобто x буде входити у всіх степенях від 0 до $2^{k+1}-1$.

Із припущення індукції : «(*) - істинне», отримана тотожність буде відрізнятись лише тим, що число k змінилось на $k+1$. Тому рівність (*) доведена.

Теорема 2.3.2. $(F_n;F_k)=1,\ n\neq k$.

Доведення:

Домножимо (*) на $(x-1)$ і покладемо $x=2$.

$$1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\left(1+2^{2^{k-1}}\right)=2^{2^{k}}-1$$

Додавши до обох частин отриманої рівності 2, маємо :

$$F_1\cdot F_2\cdot\ldots\cdot F_k+2=F_{k+1} \qquad (**),$$

де $F_{k+1}=2^{2^{k}}+1$.

При $n<k$ число F_n входить у ліву частину рівності (**) одним із множників. Тому найбільший спільний дільник F_n і F_k повинен бути і дільником числа 2, але числа Ферма – непарні. Тому теорема доведена.[8]

Подальший розвиток даної проблематики ми вбачаємо у вивченні функції $R_3(F_n)$ з використанням методів сучасної теорії адитивних чисел.

Висновки.

Дана дослідницька робота складається із вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

В першому розділі роботи наведено огляд результатів з проблем теорії адитивних чисел та проблеми Гольдбаха-Варінга.

Другий розділ є основним в роботі. З теореми Ейлера випливає, що рівняння $F_n = x^2 + y^2 + z^2$, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма має розв'язки, оскільки $F_n \neq 4^m(8n+7)$ m,n=0,1,2… але, по-перше, невідомі формули, що дозволяють їх знаходити, і, по-друге, невідома функція $R_3(n)$ - кількість розв'язків рівняння.

В роботі наведено авторське доведення теореми (теорема 2.3), що всі числа Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1,\ \mathrm{n} \geq 3$ у двійковій системі числення можуть бути подані у вигляді суми трьох квадратів (тернарної квадратичної форми) наступним чином

$$F_n = 1\underbrace{00..00}_{2^{n-1}}1 = \left(\underbrace{10..10}_{2^{n-2}-1}11\right)^2 + \left(\underbrace{10..10}_{2^{n-2}}\right)^2 + \left(\underbrace{10\ldots10}_{2^{n-2}-2}110\right)^2$$

Зрозуміло, що всі розв'язки рівняння $\mathrm{F_n = x^2 + y^2 + z^2}$ не вичерпуються формулами виду (теорема 2.2.2)

$$\begin{cases} a = \dfrac{2 \times 2^{2^{n-1}} + 1}{3} \\ b = \dfrac{2^{2^{n-1}} + 2}{3} \\ c = \dfrac{2 \times 2^{2^{n-1}} - 2}{3} \end{cases}$$

Шляхом створення програми пошуку трійок для рівняння вигляду «Search triples» методом комп'ютерного перебору ми встановили, що для n = 3 існує ще дві трійки, кожна з яких задає по 6 розв'язків. Розроблена програма представлена у додатках.

Очевидно, що простої закономірності, яка дозволяла б оцінити функцію $R_3(F_n)$ не існує (тут $R_3(F_n)$ – функція, що визначає кількість розв'язків, де $F_n = 2^{2^n} + 1$ – числа Ферма). Тому подальший розвиток даної проблематики ми вбачаємо у вивченні саме цієї функції з використанням методів сучасної теорії адитивних чисел.

Таким чином в результаті проведеного дослідження ми:

1) одержали формули, що дозволяють розв'язати діофантове рівняння (2) в двійковій і десятковій системах числення;

2) показали чому дорівнює кількість розв'язків, при n=3,4,5;

3) окреслили шлях для знаходження формули $R_3(F_n)$.

Апробація і можливість використання отриманих результатів.

Результати роботи доповідались на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М. Й. Ядренка (2014р. м Чернівці).

Робота носить теоретичний характер. Результати роботи і методика їх застосування можуть бути використані при розв'язуванні задач теорії чисел, в тому числі адитивних проблем.

Список використаних джерел

1. Аносов Д. В. Взгляд на математику и нечто из нее. М.: МЦНМО, 2003. — 24 с. (Библиотека "Математическое просвещение", выпуск 3)
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1981. – 176с.
3. Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И. Алгебра и теория чисел. Ч. 2. – Киев: Вища школа, 1980. – 408с.
4. Лейбниц Г. В. Письма и єссе о китайськой философии и двоичной системе исчесления. – М., 2005-405с.
5. Ожигова Е. П. Что такое теория чисел, – М ., «Знание», 1970, 95с.
6. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. – М., Глав. ред. физ-мат. лит., 1975. — 464с.
7. Завдання для відбірних етапів XVII-го Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка. [електронний ресурс]: офіц. веб-портал The over-ukrainian tournament of young mathematicians named after prof. Mykhailo Yadrenko - Режим доступу: https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938 /TYM/2014/TYM-2014-LYST_PROBLEMS.pdf
8. Кюршак Й, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. Венгерские математические олимпиады.- М.: Мир., 1976. – 544с.

Додаток. «Search triples»

Програма пошуку трійок для рівняння вигляду $\boldsymbol{F_n = x^2 + y^2 + z^2}$ «Search triples»

Код програми пошуку:

```
program Project2;

{$APPTYPE CONSOLE}

uses
  SysUtils, Math;

var
  n, a, b, t, m, k, c, res: uint64;

begin
  res := 0;
  write('Enter n: ');
  readln(n);
  m := round(intpower(2, round(power(2, n)))) + 1;
  writeln('2^2^n + 1 = ', m);
  t := round(power(m/3,0.5));
  a := 0;
  while a <= t do
  begin
    inc(a);
    b := a;
    k := round(power((m-intpower(a,2))/2,0.5));
    while b <= k do
    begin
      inc(b);
      c := m - round(intpower(a,2) + intpower(b,2));
      if (c >= 1) and (round(power(c,0.5))>b) and (round(intpower(round(power(c,0.5)),2)) = c) then begin
        inc(res);
        writeln(res, #9, #9, a, #9, b, #9, round(power(c,0.5)));
      end;
    end;
  end;
  writeln('Number of expansions: ', res);
  readln;readln;
end.
```