Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика
Секція: прикладної математики

Поліноми Чебишева: властивості і застосування.

Роботу виконав:
Єрмаков Артур Олександрович,
учень 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму ім. В.Д. Чайки Миколаївської міської ради
Науковий керівник:
Майборода Валерій Антонович, вчитель математики Миколаївського муніципального колегіуму ім. В.Д.Чайки , вчитель вищої категорії, старший вчитель

Миколаїв – 2015

Тези

ПОЛІНОМИ ЧЕБИШЕВА: ВЛАСТИВОСТІ І ЗАСТОСУВАННЯ

Єрмаков Артур Олександрович

Миколаївське територіальне відділення МАН України
учень 10-А класу Миколаївського муніципального колегіуму ім. В.Д. Чайки
Науковий керівник: Майборода В. А. вчитель математики Миколаївського муніципального колегіуму ім. В.Д.Чайки, старший вчитель

Проблема інтерполяції функцій многочленами бере свій початок в 17 ст. у роботах багатьох відомих математиків. Особливу актуальність проблеми зумовили великі інженерно-технічні відкриття у 19 ст. як приклад цього може слугувати винахід паралелограма Уатта, теорія роботи якого вимагала значних математичних досліджень.

Метою нашої роботи є ознайомлення з теорією інтерполяцій, встановлення їх властивостей, також розв'язання задач з використанням поліномів Чебишева.

Використання поліномів Чебишева дозволяє сформулювати і довести ряд красивих теорем. Деякі із них відомі навіть в шкільному курсі, наприклад теорема про середнє геометричне косинусів гострих кутів, кратних $\frac{\pi}{2m+1}$.

В роботі розв'язано задачу: пошук суми коефіцієнтів полінома Чебишева у вигляді $P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j}$, що означає знайти значення полінома Чебишева в точці $x = 1$, $P_n(1) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{n-j}^j$ зауважимо що фактично така задача була запропонована на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й.Ядренка (2014р. м. Чернівці) при $n = 2013,\ n = 2014,\ n = 2015$ та індексом підсумовування $\left[\frac{n}{2}\right]$ під назвою «Алгебраїчні суми».

Розв'язуючі матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} F(n+2) & F(n+1) \\ F(n+1) & F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix} \times X^n$$

в роботі доведена наступна теорема: Формула n-го члена послідовності $P_n(1) = F(n)$ дорівнює $F(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot \left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-2}{3}\right]\right)$.

Також в роботі на конкретному прикладі розглянута апроксимація полінома поліномом меншого степеня.

В подальшому я планую продовжити роботу над цією темою, зокрема мене цікавить розв'язання задач які не були розв'язані до цього часу.

ЗМІСТ

ВСТУП

Проблема інтерполяції функцій многочленами бере свій початок в 17 ст. у роботах Генрі Бригса (1561-1630), Джеймса Грегорі (1638-1675), Джона Коллінса (1625-1683) та інших математиків.

Подальший розвиток, започаткованих цими математиками ідей, відбувається в наступних століттях дякуючи працям І. Ньютона (1648-1727), Л. Лагранжа (1738-1813), де Моргана (1806-1871).

Особливу актуальність проблеми зумовили великі інженерно-технічні відкриття у 19 ст. як приклад цього може слугувати винахід паралелограма Уатта, теорія роботи якого вимагала значних математичних досліджень. В тому числі виникла необхідність більш досконалих підходів до пошуку інтерполяційних многочленів, ніж це було до цього.

Основоположником теорії наближення функцій є П.Л.Чебишев (1821-1894), якому належить також вичерпне описання і удосконалення паралелограма Уатта.

Метою даної наукової роботи є ознайомлення з теорією інтерполяцій, інтерполяційними поліномами Чебишева, встановлення властивостей цих поліномів та запропонування задач на їх застосування.

Особистий внесок: знайдено способи знаходження сум коефіцієнтів полінома Чебишева першого роду, в тому числі одержані формули n-го члена цих сум.

Розділ 1. Теоретичні відомості про поліноми Чебишева.

1.1.Поліноми Чебишева.

Поліноми Чебишева введемо через їх характеристичні властивості.

Поліномами Чебишева будемо називати такі поліноми що мають наступні властивості:

1. Значення полінома T_n у всіх точках екстремуму, та на кінцях відрізка $[-1;1]$ рівні по модулю. Площа кожного із n+1 проміжків, обмежених графіком многочлена $U_n(x) = \frac{1}{n+1} \cdot T'_{n+1}(x)$, віссю Ох та прямими x=1, x=-1, одна і таж (дивись рис.1 [2]).

2. $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi, \quad \sin\varphi \cdot U_{n-1}(\cos\varphi) = \sin n\varphi$

3. Для |x|>1

$$T_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n}{2},$$

$$U_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1} + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

4. $T_n(x) = 2^{n-1}(x - \cos\frac{\pi}{2n})(x - \cos\frac{3\pi}{2n}) \dots \left(x - \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right),$

$$U_n(x) = 2^n(x - \cos\frac{\pi}{n+1})(x - \cos\frac{2\pi}{n+1}) \dots \left(x - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

За визначення полінома Чебишева можна прийнять будь яку із вказаних характеристичних властивостей. При цьому поліноми $T_n(x)$ називають поліномами Чебишева *першого роду*, а $U_n(x)$ поліномами Чебишева *другого роду*. В подальшому ми розглядатимемо поліноми Чебишева *другого роду*.

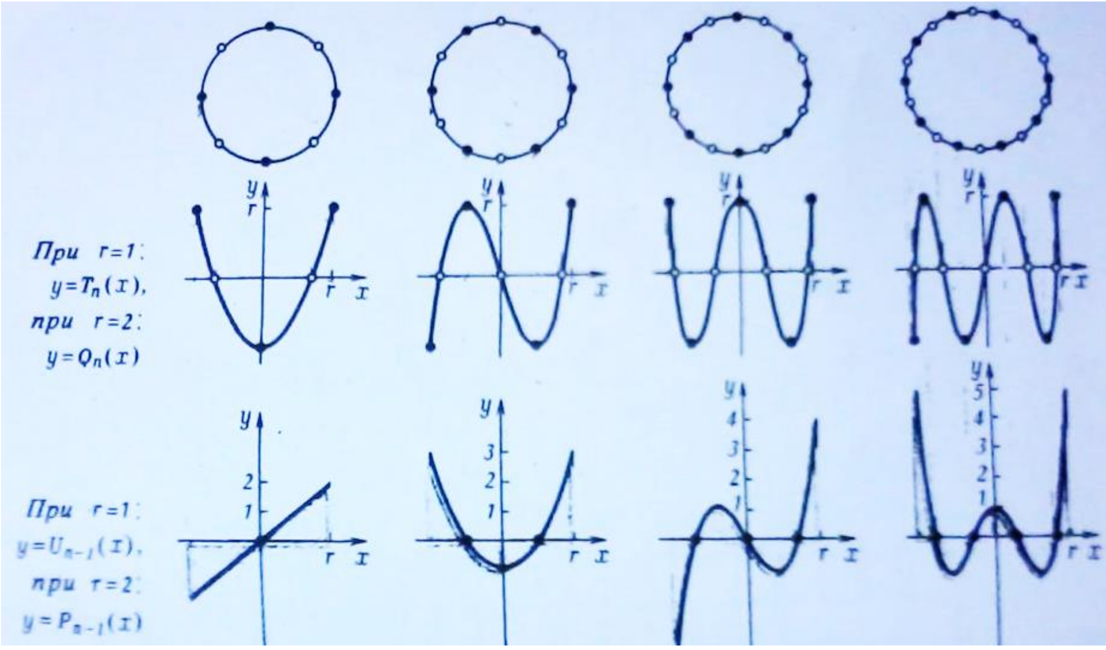

Рис.1. Графіки поліномів Чебишева першого та другого роду.

1.2. Рекурентні співвідношення для полінома Чебишева другого роду.

Для спрощення виду полінома шляхом вибору всіх його коефіцієнтів цілими необхідно змінити відрізок [-1;1] на відрізок [-2;2], так що $U_n(x/2) = P_n(x)$

Лема. Поліноми Чебишева $P_n(x)$ задовольняють рекурентному співвідношенню: при $P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,$

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x).$$

Доведення.

Справедливість леми випливає із введеного зв'язку між $P_n(x)$ і $U_n(x)$ та характеристичної властивості 3:

$$U_n(x) = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1} + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^{n+1}}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Лема залишається справедливою якщо для визначення полінома $P_n(x)$ скористатись характеристичною властивістю 4

$$U_n(x) = 2^n (x - \cos\frac{\pi}{n+1})(x - \cos\frac{2\pi}{n+1}) \dots \left(x - \cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

1.3. Явне представлення полінома Чебишева $P_n(x)$.

Представлення полінома Чебишева через його коефіцієнти, можлива різними способами. Покажемо як можна знайти форму запису $P_n(x)$ через його коефіцієнти.

Нехай $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ і

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x) \tag{1.1}$$

Запишемо деякі з них. Після $P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x$ йдуть

$P_2(x) = x^2 - 1$

$P_3(x) = x(x^2 - 1) - x = x^3 - 2x$

$P_4(x) = x(x^3 - 2x) - (x^2 - 1) = x^4 - 3x^2 + 1$

Запишемо відому формулу суми нескінченної геометричної прогресії (при $|qz|<1$). Але цим прийомом можна отримати твірну функцію для нашої послідовності многочленів $P_n(x)$.

Нехай

$$\Phi(z) = \sum_{n>0} P_n(x) z^n = 1 + xz + \sum_{n\geq 2} P_n(x) z^n$$

Згідно з (1.1), запишемо при $n \geq 2$ замість кожного $P_n(x) = x \cdot P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$.

Тоді

$$\Phi(z) = 1 + xz + \sum_{n\geq 2} x\, P_{n-1}(x) z^n - \sum_{n\geq 2} P_{n-2}(x) z^n =$$

$$= 1 + xz + xz \cdot \sum_{n\geq 2} x\, P_{n-1}(x) z^{n-1} - z^2 \cdot \sum_{n\geq 2} P_{n-1}(x) z^{n-2} =$$

$$=1 + xz + xz(\Phi(z) - 1) - z^2 \Phi(z).$$

Звідси

$$\Phi(z) \cdot (z^2 - xz + 1) = 1$$

Отже

$$\Phi(z) = \frac{1}{z^2 - xz + 1} \tag{1.2}$$

З цієї формули можна отримати послідовність многочленів $P_n(x)$.

Знайдемо з (1.2) окремі коефіцієнти кожного многочлена $P_n(x)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{1-(xz-z^2)} = \sum_{k\geq 0}(xz-z^2)^k = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{0\leq j\leq k}(-1)^j C_k^j x^{k-j} z^{k+j}\right) =$$

$$= \sum_{0\leq j\leq k} z^2 \left(\sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j}\right)$$

Звідси

$$P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j} \tag{1.3}$$

Також можна показати, що в тригонометричній формі $P_n(x)$ має вигляд:

$$P_n(x) = \prod_{1\leq k\leq n}\left(x - 2\cos\frac{kn}{n+1}\right) \tag{1.4}$$

Розділ 2. Деякі властивості поліномів Чебишева та їх застосування.

2.1. Обчислення тригонометричних добутків.

Використання поліномів Чебишева дозволяє сформулювати і довести ряд красивих теорем. Деякі із них відомі навіть в шкільному курсі як навчальні приклади, безумовно розглянуті в спрощеному вигляді. Як приклад сформулюємо і доведемо наступну теорему.

Теорема 1. При m>0 середнє геометричне косинусів гострих кутів, кратних $\frac{\pi}{2m+1}$ дорівнює $\frac{1}{2}$, або

$$\prod_{1\le k\le m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}.$$

Не важко показати, що

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} \tag{2.1}$$

Звідки отримуємо:

$$P_{2m}(0) = \left(2\cos\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)/\sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right) = (-1)^m \tag{2.2}$$

З іншої сторони, згідно з (1.4):

$$P_{2m}(0) = \prod_{1\le k\le 2m}\left(-2\cos\frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Замінив кожне $\cos\frac{k\pi}{2m+1}$ при $m+1\le k\le 2m$ на $\left(-\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$ отримаємо:

$$P_{2m}(0) = (-1)^m \cdot \left[2^m \cdot \prod_{1\le k\le m} \cos\frac{k\pi}{2m+1}\right]^2$$

Але вираз у квадратних дужках додатній, оскільки в добуток входять косинуси тільки гострих кутів; тому цей вираз дорівнює 1, а тому:

$$\prod_{1\le k\le m} \cos\frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}$$

2.2.Сума коефіцієнтів полінома Чебишева другого роду.

Розглянемо представлення полінома Чебишева у вигляді:

$$P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j} \qquad (2.3)$$

Який ми отримали у розділі 1 як формулу (1.4)

Можна поставити задачу: пошук суми коефіцієнтів у формулі (2.3), що означає знайти значення полінома Чебишева в точці $x = 1$.

$$P_n(1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{n-j}^j \qquad (2.4)$$

Зауважимо що фактично така задача була запропонована на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й.Ядренка (2014р. м. Чернівці) [6] при $n = 2013,\ n = 2014,\ n = 2015$ та індексом підсумовування $\left[\frac{n}{2}\right]$ з назвою «Алгебраїчні суми».

Сформулюємо задачу «Алгебраїчні суми»:

Обчислити знакозмінні суми біноміальних коефіцієнтів:

а) $C_{2013}^0 - C_{2012}^1 + C_{2011}^2 - C_{2010}^3 + \cdots - C_{1008}^{1005} + C_{1007}^{1006}$;

б) $C_{2014}^0 - C_{2013}^1 + C_{2012}^2 - C_{2011}^3 + \cdots + C_{1008}^{1006} - C_{1007}^{1007}$;

в) $C_{2015}^{0} - C_{2014}^{1} + C_{2013}^{2} - C_{2012}^{3} + \cdots + C_{1009}^{1006} - C_{1008}^{1007}$

Розв’язання.

Врахувавши властивості полінома Чебишева, то скориставшись рекурентним співвідношенням Леми ми запишемо :

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x$$

$$P_{n+1}(x) = x \cdot P_n(x) - P_{n-1}(x).$$

При $x = 1$ маємо:

$$P_{n+1}(1) = P_n(1) - P_{n-1}(1)$$

При початкових умовах $P_0(1) = 1,\ P_1(1) = 1.$

Легко отримуємо послідовність значень $P_n(1)$:

$P_0(1) = 1$

$P_1(1) = 1$

$P_2(1) = 0$

$P_3(1) = -1$

$P_4(1) = -1$

$P_5(1) = 0$

$P_6(1) = 1$

$P_7(1) = 1$

Помітивши періодичність значень $P_n(1)$ і $T = 6$, знаходимо що значення полінома може будь знайденим за остачею від ділення n на період T,

Результати представимо в наступних таблицях, де r - остача від ділення n на T=6.

Приклад	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{P_n(1)}$
а	2013	3	-1
б	2014	4	-1
в	2015	5	0

r	0	1	2	3	4	5
$P_n(1)$	1	1	0	-1	-1	0

Особливу цікавість ми вбачаємо в тому, щоб отриманий результат подати у вигляді формули n-го члена послідовності $P_n(1)$.

Позначимо $P_n(1) = F(n)$.

Теорема2. Формула n-го члена послідовності $P_n(1)$ дорівнює

$$F(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot \left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-2}{3}\right]\right)$$

Доведення.

Розв’яжемо матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} F(n+2) & F(n+1) \\ F(n+1) & F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix} \times X^n \tag{*}$$

де $m \in \mathbb{Z}, m \geq 0$.

Позначимо $a = F(m+1)$, та $b = F(m)$

Тоді матриці А та В приймають наступний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} F(m+1) & F(m) \\ F(m) & F(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & b-a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} F(m+2) & F(m+1) \\ F(m+1) & F(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

Розв'яжемо рівняння

$$A \times X = B$$

Отже

$$X = A^{-1} \times B$$

Знайдемо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^* = \frac{1}{a \times b - a^2 - b^2} \begin{pmatrix} b-a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Таким чином

$$X = A^{-1} \times B =$$

$$= \frac{1}{a \times b - a^2 - b^2} \begin{pmatrix} b-a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & a \\ a & b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a \times b - a^2 - b^2} \begin{pmatrix} a \times b - a^2 - b^2 & a \times b - a^2 - b^2 \\ a^2 + b^2 - a \times b & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Підставимо отриману матрицю X в рівняння (*), отримаємо

$$\begin{pmatrix} F(n+2) & F(n+1) \\ F(n+1) & F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

Провівши відповідні розрахунки

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^6 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Та використавши циклічність (період T=6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Розглянемо послідовність $G(0) = 1$; $G(1) = 1$; $G(2) = 0$ з періодом $T(G) = 3$. Отримаємо, що

$$F(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot G(n)$$

де

$$G(n) = a_0(n) \cdot G(0) + a_1(n) \cdot G(1) + a_2(n) \cdot G(2)$$

коефіцієнти $a_i(n)$ в вигляді

$$a_i(n) = \begin{cases} 1, \ n \equiv i (mod\, 3) \\ 0, \ n \not\equiv i (mod\, 3) \end{cases}$$

або

$$a_i(n) = \left[\frac{n-i}{3}\right] - \left[\frac{n-i-1}{3}\right]$$

Таким чином

$$G(n) = \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] - \left[\frac{n-2}{3}\right] = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-2}{3}\right]$$

отже

$$F(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot \left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-2}{3}\right]\right)$$

Зауважимо що, отримана формула не єдина, наприклад:

$$F(n) = \frac{(-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} + (-1)^{\left[\frac{n+1}{3}\right]}}{2}$$

2.3.Апроксимація полінома поліномом меншого степеня

Запишемо новий поліном $T_k^*(x)$, який можна отримати з полінома Чебишева шляхом підстановки:

$$T_k^*(x) = T_k(2x - 1)$$

Постає питання, чи можна функцію n-го степеня представити функцією меншого степеня [5].

Розглянемо це питання на конкретному прикладі, нехай дана функція на інтервалі [0;1];

$$y = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6$$

Графік цієї функції відповідає графіку полінома шостого степені. Останнім членом не можна знехтувати не зробивши великої похибки, але все ж це можливо.

Запишемо поліном $T_k^*(x)$ для $k = 6,$:

$$x^6 = \frac{(6144x^5 - 6912x^4 + 3584x^3 - 840x^2 + 72x - 1)}{2048} + \frac{T_6^*(x)}{2048}$$

Тобто

$$x^6 = 3x^5 - 3{,}375x^4 + 1.75x^3 - 0{,}410156x^2 + 0{,}035156x - 0{,}000488 \qquad (2.5)$$

То ми допустимося похибки яка не перевищує $\frac{1}{2048} = 0{,}000488$, зауваживши ту обставину, що $T_6^*(x)$ коливається на інтервалі ±1, причому похибка не може перевищувати дану, оскільки 2048 в $T_6^*(x)$ є найбільш можливим коефіцієнтом будь якого полінома який в даному інтервалі коливається між ±1.

Отже якщо ми знехтуємо членом x^6, і замінимо його лінійною комбінацією нижчих степенів згідно рівності (2.5) то зробимо похибку яку дуже мала, і може виявитися нижче необхідної точності. Підставивши вираз (4) у задану функцію $y = f(x)$, отримуємо наближення

$$\bar{y} = 0{,}999512 - 0.964844x + 0{,}589844x^2 + 0{,}75x^3 - 2{,}375x^4 + 2x^5$$

$(\pm 0{,}0005)$.

Отримана функція є поліномом лише п’ятого степені.

Очевидно зробити припущення що цей процес можна повторити. Справді, таким чином можна перетворити поліном будь якої степені у поліном нижчої степені, знаючи похибку, яка буде незмінна у будь який точці графіка цього полінома.

Продовжимо зменшувати степінь функції y

Замінимо x^5 його лінійною комбінацією нижчих степенів

1. $\bar{y} = 1{,}003418 - 1{,}160156x + 2{,}152344x^2 - 3{,}625x^3 + 2{,}625x^4.$

(±0,0044)

Замінимо x^4 його лінійною комбінацією нижчих степенів

2. $\bar{y} = 0{,}982910 - 0{,}503906x - 1{,}128906x^2 + 1{,}625x^3.$

(±0,0249)

Замінимо x^3 його лінійною комбінацією нижчих степенів

3. $\bar{y} = 1{,}0337 - 1{,}4180x + 1{,}3086x^2$

(±0,0757)

Отже ми отримали поліном другої степені із полінома шостої степені, з точністю, яка може задовольняти умову у багатьох випадках.

Висновки.

Дана дослідницька робота складається із вступу, двох розділів та списку використаних джерел.

В першому розділі представлено основні теоретичні відомості, які є фундаментом роботи, а саме ми дали визначення поліномів Чебишева, розглянули рекурентні співвідношення для полінома Чебишева другого роду та явне представлення полінома Чебишева.

Використання поліномів Чебишева дозволяє сформулювати і довести ряд красивих теорем. Деякі із них відомі навіть в шкільному курсі, наприклад теорема про середнє геометричне косинусів гострих кутів, кратних $\frac{\pi}{2m+1}$ яка доведена в другий розділ роботи

Також в другому розділі роботи розв’язано задачу: пошук суми коефіцієнтів полінома Чебишева у вигляді $P_n(x) = \sum_j (-1)^j C_{n-j}^j \cdot x^{n-2j}$, що означає знайти значення полінома Чебишева в точці $x = 1$, $P_n(1) = \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{n-j}^j$ зауважимо що фактично така задача була запропонована на XVII Всеукраїнському турнірі юних математиків імені професора М.Й.Ядренка (2014р. м. Чернівці) при $n = 2013$, $n = 2014$, $n = 2015$ та індексом підсумовування $\left[\frac{n}{2}\right]$ під назвою «Алгебраїчні суми».

Розв’язуючі матричне рівняння

$$\begin{pmatrix} F(n+2) & F(n+1) \\ F(n+1) & F(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(2) & F(1) \\ F(1) & F(0) \end{pmatrix} \times X^n$$

в роботі доведена наступна теорема: Формула n-го члена послідовності $P_n(1) = F(n)$ дорівнює $F(n) = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \cdot \left(\left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n-2}{3}\right]\right)$.

В роботі на конкретному прикладі розглянута апроксимація полінома поліномом меншого степеня.

В подальшому я планую продовжити роботу над цією темою, зокрема мене цікавить розв’язання задач які не були розв’язані до цього часу.

Список використаних джерел.

1. Табачников С. Многочлены наименее уклоняющиеся от нуля.// Квант. 1990.- №6. С. 23-27.
2. Васильев Н., Зелевинский А. Многочлени Чебишева и рекуррентные соотношения.// Квант. 1982. -№1/ -С. 12-19
3. Пойа Д., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М., Наука, 1978. -. 400 с.
4. Гусак А. А. Приблежение функции. Мн, Университетское, 1989. - 120 с.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. Пер. с англ. М. 3. Кайнера; под ред. А. М. Лопшица. — М.:ГИФМЛ, 1961.-522с.
6. Завдання для відбірних етапів XVII Всеукраїнського турніру юних математиків. [електронний ресурс]: офіц. веб-портал The over-ukrainian tournament of young mathematicians named after prof. Mykhailo Yadrenko - Режим доступу: https://dl.dropboxusercontent.com/u/15765938/TYM/2014/TYM-2014-LYST_PROBLEMS.pdf