Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: математика
Секція: математичне моделювання

Моделювання нескінченних систем

Роботу виконав:
Новицький Олександр Сергійович,
учень 11 класу Миколаївського
муніципального колегіуму імені
Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник:
Крисинська Ірина Володимирівна,
завідуюча кафедрою математики, вчитель-методист Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Миколаїв – 2014

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Тези

науково-дослідницької роботи

«Моделювання нескінченних систем»

Новицький Олександр Сергійович, учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий керівник: Крисинська Ірина Володимирівна, вчитель-методист, завідуюча кафедрою математики Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Моделювання таких нескінчених систем, як багатовимірні куби та нескінчені сітки, які складаються з систем провідників є однією з тем, яка широко використовується в техніці, зокрема при виробництві технічних приладів, і має низку нерозв'язаних питань.

У роботі продовжено минулорічне дослідження задачі «Суми та біноміальні коефіцієнти», під час розв'язання якої ми зіткнулися з проблемами опору багатовимірних кубів та нескінчених сіток.

Метою нашої роботи є побудова моделей для виміру опору багатовимірних кубів та нескінчених сіток, побудова різних узагальнень, аналіз часткових випадків запропонованої задачі. Відповідно до поставленої мети визначено завдання: застосувати властивості біноміальних коефіцієнтів та математичних структур, таких як трикутник Лейбніца та трикутник Паскаля для розв'язання задачі прикладного характеру та на прикладі моделі n – вимірних кубів та квадратних нескінчених сіток виміряти опір провідників на заданих проміжках.

В дослідженні побудована математична модель схеми опору багатовимірних кубів та нескінчених сіток різних конфігурацій: квадратних, трикутних, шестикутних.

В роботі запропоновано розв'язок задачі, сформульовані гіпотези та узагальнення, щодо суми «вулиць» та «проспектів» трикутника Лейбніца, пораховано опір між двома точками з сумою координат 0 та n, також було знайдено опір між двома сусідніми точками нескінченої сітки, і зроблені просування для знаходження опору між будь-якими двома точками сітки, розробимо програму для обчислення сум трикутника Лейбніца.

В подальшому я планую продовжити роботу над цією темою, зокрема мене цікавить знаходження опору між двома будь-якими точками сітки та можливість знаходження опору для обмеженої сітки.

ЗМІСТ

ВСТУП

Моделювання таких нескінчених систем, як багатовимірні куби та нескінчені сітки, які складаються з систем провідників є однією з тем, яка широко використовується в техніці, зокрема при виробництві технічних приладів, і має низку нерозв'язаних питань.

У роботі продовжено минулорічне дослідження задачі «Суми та біноміальні коефіцієнти», під час розв'язання якої ми зіткнулися з проблемами опору багатовимірних кубів та нескінчених сіток.

Властивості біноміальних коефіцієнтів широко вивчені в роботах Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И., Валенкин Н.Я. [1-2]. Питаннями знаходження опору між точками багатовимірних кубів присвячена стаття Недемеиера Ф. та Смородинского Я. А. [7].

Проблемою розрахунку опору між будь-якими двома точками сітки в нескінченних решітках структур резисторів за допомогою функції Гріна займався Jo´zsef Cserti [8]. Зауважимо, що результати нашого дослідження можна розглянути як, окремий випадок відповідного дослідження.

Метою нашої роботи є обчислення сум елементів деяких математичних структур, наприклад, трикутник Лейбніца, аналіз часткових випадків, побудова різних узагальнень, обчислення опору ребер n – вимірних кубів та нескінчених сіток.

Відповідно до поставленої мети визначено *завдання*, які спрямовані на її досягнення:

- Поглибити знання про біноміальні коефіцієнти та суми;
- Навчитися використовувати властивості біноміальних коефіцієнтів та застосувати їх для розв'язання задач та побудови узагальнень;
- Створити схеми опору ребер n – вимірних кубів;
- Створити схеми опору ребер нескінчених сіток

Об'єктом дослідження є властивості біноміальних коефіцієнтів, математичні структури, такі як трикутник Лейбніца та трикутник Паскаля.

Предметом дослідження є задача: «Суми та біноміальні коефіцієнти», схеми ***n*** – вимірних кубів, нескінчених сіток.

В дослідженні побудована математична модель схеми опору багатовимірних кубів та нескінчених сіток різних конфігурацій: квадратних, трикутних, шестикутних.

Особистий внесок: запропоновано розв’язки задач, сформульовані гіпотези та узагальнення, обчислено опір ребер n – вимірних кубів та нескінчених сіток, також нами була написана програма для швидкого обчислення сум елементів трикутника Лейбніца. Були зроблені просування, щодо знаходження опору між будь-якими точками нескінченої n – вимірної сітки.

РОЗДІЛ 1

Трикутники Паскаля та Лейбніца

Розглянемо прямокутну сітку квадратів $m \times n$ («шахове містечко»), яка складається з $m \times n$ прямокутних кварталів, поділених $n-1$ «горизонтальними» та $m-1$ «вертикальними» вулицями (рис.1). Яке число різноманітних найкоротших шляхів на цій сітці, які ведуть з лівого нижнього кута(точки(0;0)) в правий верхній кут (точку(m;n))?

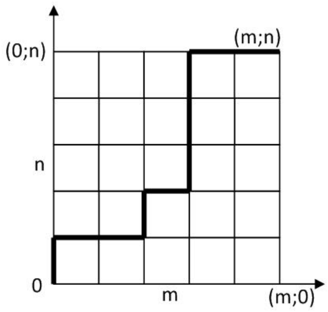


Рис.1

Кожен найкоротший шлях з точки(0;0) в точку (m;n) складається із $m+n$ відрізків, причому серед них є m горизонтальних та n вертикальних відрізків. Різні шляхи відрізняються лише порядком чергування горизонтальних та вертикальних відрізків. Тому загальне число шляхів дорівнює числу способів, якими з $m+n$ відрізків можна вибрати n вертикальних відрізків, тобто C_{m+n}^{n}. Можна було б роздивитися число способів вибору не n вертикальних, а m горизонтальних відрізків, і ми б отримали тоді C_{m+n}^{m}. Ми встановили геометричну рівність: $C_{m+n}^{n} = C_{m+n}^{m}$

В її справедливості можна переконатися, безпосередньо враховуючи число комбінацій через факторіали з точки (0;0) в точку (m;n).

Теорема 1. Має місце рівність: $C_n^k = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1}$ (*). Легко переконатися справедливості рівності(*), використовуючи формулу $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Доведення 1. Роздивимося деякий елемент a множини A, яка складається з n елементів, і всі k-елементні підмножини A розділимо на 2 групи підмножини, в склад яких входить елемент а, і підмножини, в склад яких не входить. Число підмножин в першій групі дорівнює C_{n-1}^{k-1}, так як кожна така підмножина отримується приєднанням до а деякої $(k-1)$- елементної підмножини множини А. Число множин в другій групі дорівнює C_{n-1}^{k}, тк як кожна така підмножина – це k-елементна підмножина множини А-{a }. Відповідно, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доведення 2. Число найкоротших шляхів з точки (0;0) в точку (k;n-k) дорівнює $C_{k+(n-k)}^{k} = C_n^k$ (рис.2)

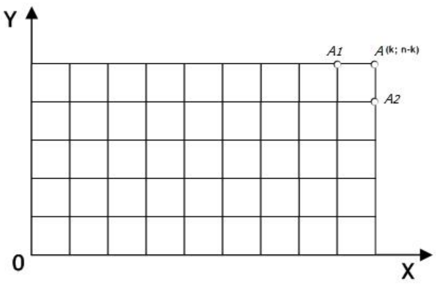


Рис.2

Всі такі шляхи можна розподілити на 2 групи: шляхи, які проходять через точку A_1(k-1;n-k) їхнє число дорівнює $C_{(k-1)+(n-k)}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$, і шляхи, які проходять через точку $A_2(k;n-k-1)$ їхнє число дорівнює $C_{k+(n-k-1)}^{k} = C_{n-1}^{k}$. Відповідно, $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$

Теорема 2. $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$ (**).

Число найкоротших шляхів з точки (0;0) в точку (n;n) дорівнює C_{2n}^n. Кожен такий шлях проходить через одну і лише одну з точок A_k(k;n-k), які лежать на діагоналі BD (рис.3)

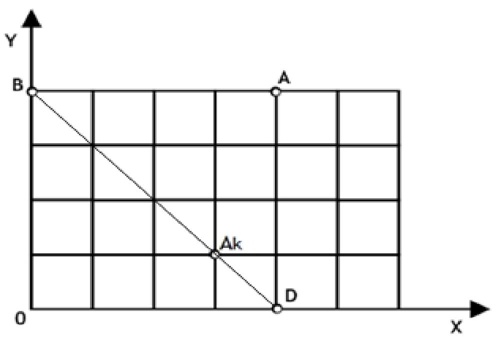
.


Рис.3

Число шляхів з точки (0;0) в точку A_k дорівнює $C_{k+(n-k)}^k = C_n^k$, а з точки A_k в точку (n;n) дорівнює $C_{n-k+k}^k = C_n^k$, тому число шляхів із (0;0) в (n;n), які проходять через A_k дорівнює $(C_n^k)^2$(правило множення). Додавши кількість шляхів, які проходять через кожну з точок A_k(k=0, 1, 2, … , n)(правило суми), отримаємо загальну кількість шляхів, тобто C_{2n}^n. Що треба було довести.

Біноміальні коефіцієнти мають ряд важливих властивостей.

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$. Рівність легко перевіряється обчисленням, також вона слідує з того, що число k- елементних підмножин множини з n елементів дорівнює числу (n-k)- елементних підмножин.

2) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$. Доведення – задача про «шахове містечко» рівності(*).

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1-k}) = \frac{n!(n+1)}{(k-1)!(n-k)!(n+1-k)k}$$

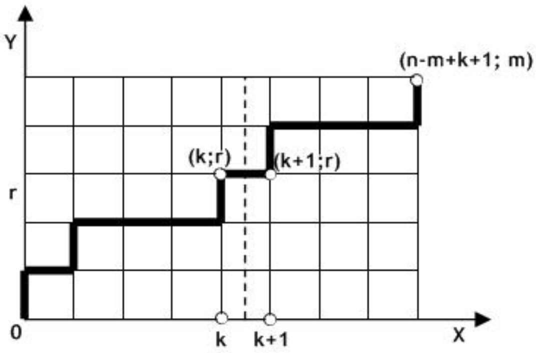
Властивість показує, що біноміальні коефіцієнти можна послідовно записувати у вигляді трикутної таблиці, тобто у арифметичний трикутник(трикутник Паскаля).

3) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$. Цю рівність можна отримати, підставивши в формулу бінома Ньютона a=b=1.

4) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$. Ця рівність отримується, якщо підставити у формулу бінома Ньютона a = 1, b = - 1.

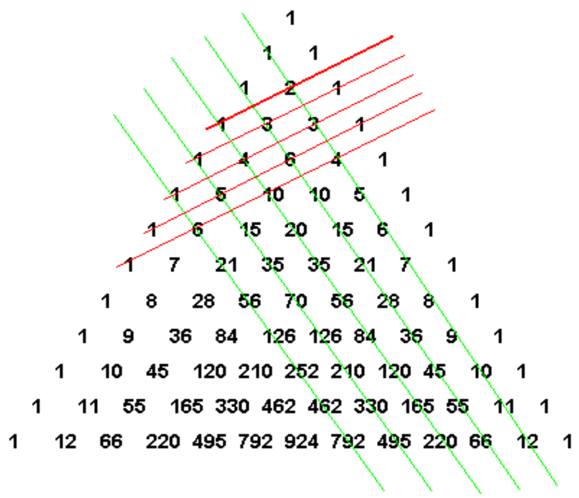
5) $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$. Рівність доведена(**).

6) $C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + ... + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m$. Роздивимося всі найкоротші шляхи, які ведуть з точки(0;0) в точку (n-m+k+1;m). Розіб'ємо усі такі шляхи на класи L_0, L_1,…, L_m, відносячи до класу L_r всі ті шляхи, які перетинають пряму x=k+0,5 і точці (k+0,5;r)(рис.7).



Оскільки кожну ламану із L_r можна розбити на 3 частини (ламану, яка з'єднує (0;0) з (k;r), горизонтальний відрізок, який з'єднує (k;r) та (k+1;r), і ламану яка з'єднує (k+1;r) з (n-m+k+1;m), то загальне число ламаних, з яких складається L_r, дорівнює $C_{k+r}^{r}C_{n-r}^{m-r}$. Загальне число всіх шляхів з точки (0;0) в точку (n-m+k+1;m) дорівнює C_{n+k+1}^{m}, що треба було довести.

Трикутник Паскаля – нескінчена таблиця біноміальних коефіцієнтів, що має трикутну форму. У цьому трикутнику на вершині і з боків стоять одиниці. Кожне число дорівнює сумі двох розташованих над ним чисел. Рядки трикутника симетричні щодо вертикальної осі. Названий на честь Блеза Паскаля. Широко застосовується в математиці.



Має ряд цікавих властивостей:

- Сума чисел *n*-ого ряд трикутника Паскаля дорівнює 2^n
- Всі числа в *n*-ому ряді, окрім одиниць, діляться на число *n*, тоді і тільки тоді, коли *n* є простим числом.

- Кажне число в трикутнику дорівнює кількості способів дібратися до нього, починаючи з вершини, якщо ходити можна вправо-вниз, або вліво-вниз.

«Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В то же время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике.»

<u>Мартин Гарднер</u>

Трикутник Лейбніца – нескінчена таблиця чисел, що будуються за правилом: у трикутнику на вершині і з боків стоять числа обернені до номерів рядка. Кожне число дорівнює сумі двох розташованих під ним. Ряди трикутника симетричні відносно вертикальної осі. Названий на честь Гофріда Вільгельма Лейбніца. Застосовується в теорії ймовірностей.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} \\
 & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & &
\end{array}$$

Загальна формула членів трикутника $\frac{1}{nC_m^n}$, де m – ряд в якому знаходиться число, n – порядковий номер числа.

Вулицею трикутника Лейбніца називається вертикальний ряд, а проспектом трикутника Лейбніца – діагональний.

Границя проспектів в трикутнику Лейбніца дорівнює елементу, який стоїть над першим членом проспекту. [9].

РОЗДІЛ 2

Сума біноміальних коефіцієнтів для вулиць трикутника Лейбніца

Розглянемо задачу XV Всеукраїнського математичного турніру імені М.Й.Ядренка про біноміальні коефіцієнти та суми.

Нехай k – задане натуральне число.

А) Знайдіть такі дійсні числа $A_0(k), A_1(k),...., A_k(k)$, що для всіх допустимих значень x справджується рівність

$$\frac{k!}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} = \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + ... + \frac{A_k(k)}{x+k}.$$

Б) Для натуральних $n \geq 2k$ знайдіть суму $S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\, C_{i+k}^{k}}$.

В) Доведіть існування границі та знайдіть її значення $\lim_{n \to \infty} S_n(k)$.

Визначення коефіцієнтів

Розглянемо вираз $\frac{k!}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} = \frac{A_0(k)}{x} + \frac{A_1(k)}{x+1} + ... + \frac{A_k(k)}{x+k}$,

при цьому зауважимо, що $x \neq 0, -1, -2, ..., -k$.

Звівши праву частину до спільного знаменника, маємо:

$$\frac{k!}{x(x+1)(x+2)...(x+k)} =$$

$$= \frac{A_0(k)(x+1)(x+2)...(x+k) + A_1(k)x(x+2)(x+3)...(x+k) + ... + A_k(k)x(x+1)...(x+k-1)}{x(x+1)(x+2)...(x+k)}$$

Розглянемо рівність чисельників

$$k! = A_0(k)(x+1)(x+2)...(x+k) + A_1(k)x(x+2)(x+3)...(x+k) + ...$$
$$... + A_k(k)x(x+1)...(x+k-1)$$

– наслідок попередньої формули.

Підставимо $x=0$ отримаємо $A_0(k)=1$

Підставивши $x=-1$ маємо $A_1(k)=-k$

Підставивши $x=-2$ отримаємо $A_2(k)=\frac{(k-1)k}{2}$

Для загального випадку маємо $x=-m$ $A_m(k)=(-1)^m\, C_k^m$

Обчислення суми

$$W_n(k)=\frac{1}{n\,C_{n+k}^k}=\frac{n!\,k!}{n(n+k)!}=\frac{(n-1)!}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n)}$$

– формула члена суми

$$S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i\,C_{i+k}^k}.$$

Оскільки границя проспектів в трикутнику Лейбніца дорівнює елементу трикутника, який стоїть над першим членом проспекту(за властивістю трикутника Лейбніца) було висунуте припущення, що для обчислення суми необхідно від числа, яке дорівнює границі відняти деяке число.

Припущення

$$S_n(k)=\frac{1}{k}-\frac{(k-1)!\,n!}{(n+k)!} \qquad (*)$$

Доведемо рівність методом математичної індукції

Бази при $n=2$ виконується.

Індукційне припущення $S_n(k)=\frac{1}{k}-\frac{(k-1)!\,n!}{(n+k)!}$.

Індукційний крок $S_{n+1}(k)=\frac{1}{k}-\frac{(k-1)!(n+1)!}{(n+k+1)!}$.

Розглянемо різницю

$$S_n(k)-S_{n+1}(k)=\frac{(k-1)!n!(n+k+1)-(k-1)!(n+1)!}{(n+k+1)!}=$$

$$=\frac{k!n!}{(n+k+1)!}=\frac{n!}{(k+1)(k+2)...(n+k+1)}$$

▲

Обчислення границі

Розглянемо границю формули суми

$$\lim_{n\to\infty}(S_n(k)=\frac{1}{k}-\frac{(k-1)!n!}{(n+k)!})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k}-\lim_{n\to\infty}\frac{(k-1)!n!}{(n+k)!}.$$

Границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(k-1)!n!}{(n+k)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(k-1)!}{(n+1)(n+2)...(n+k)}$$

дорівнює нулю, тому границя даної різниці дорівнює $\frac{1}{k}$.

Узагальнення та розширення задачі

Всі ми знаємо завдання типу: знайти суму даного виразу

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1};.$$

Отже,

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}-$$

елементарно.

А якщо ускладнити умову, наприклад,

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{1}{2\times3\times4\times5\times6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

за допомогою доведених теорем можемо знайти суму

$$\frac{4!}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{4!}{2\times3\times4\times5\times6}+\ldots+\frac{4!}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{1}{4}-\frac{3!n!}{(n+4)!}$$

з цього

$$\frac{1}{1\times2\times3\times4\times5}+\frac{1}{2\times3\times4\times5\times6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{3!n!}{(n+4)!}}{4!}$$

Розв'яжемо задачу для загального випадку, тобто

$$\frac{1}{1\times2\times\ldots\times m}+\frac{1}{2\times3\times\ldots\times(m+1)}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)\times\ldots\times(n+m-1)}=A.$$

Знайдемо суму для поданого виразу:

$$\frac{(m-1)!}{1\times2\times\ldots\times m}+\frac{(m-1)!}{2\times3\times\ldots\times(m+1)}+\ldots+\frac{(m-1)!}{(n+1)(n+2)\times\ldots\times(n+m-1)}=$$

$$=\frac{1}{m-1}-\frac{(m-2)!n!}{(n+m+1)!}$$

з цього випливає, що

$$A=\frac{\frac{1}{m-1}-\frac{(m-2)!n!}{(n+m-1)!}}{(m-1)!}$$

Розширення задачі

Знайдемо суму для вулиць трикутника Лейбніца:

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)C_n^k}=\frac{1}{nC_n^0}+\frac{1}{(n-1)C_n^1}+\frac{1}{(n-2)C_n^2}\ldots+\frac{1}{C_n^{n-1}},$$

за властивістю біноміального коефіцієнту $C_m^n = C_m^{m-n}$ маємо

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\,C_n^k} = \frac{1}{n\,C_n^0} + \frac{1}{(n-1)\,C_n^1} + \frac{1}{(n-2)\,C_n^2} \ldots + \frac{1}{C_n^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n\,C_n^n} + \frac{1}{(n-1)\,C_n^{n-1}} + \frac{1}{(n-2)\,C_n^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{C_n^1}$$

– члени трикутника Лейбніца.

$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\,C_n^k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}$ – легко перевіряється підстановкою $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Можна також показати, що $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)2^k}$ [6].

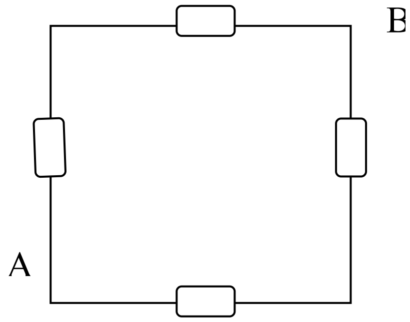
$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} S_{n-1};$$

доводиться використанням рекурентної формули трикутника Лейбніца, а саме $S_{n-1} = 2(S_n - \frac{1}{n})$ ▲.

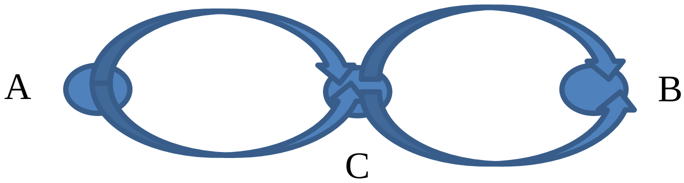
РОЗДІЛ 3

Опір ребер *n* – вимірного куба

Розглянемо 2 – вимірний куб(квадрат), нехай кожне з ребер має опір 1 Ом, потрібно знайти опір, який показувати омметр, якщо його підключити до А та В.



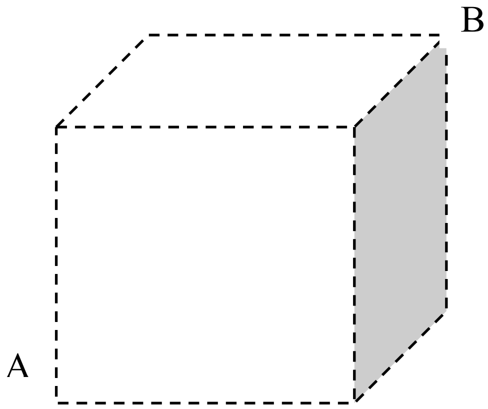
Даному квадрату буде відповідати схема:



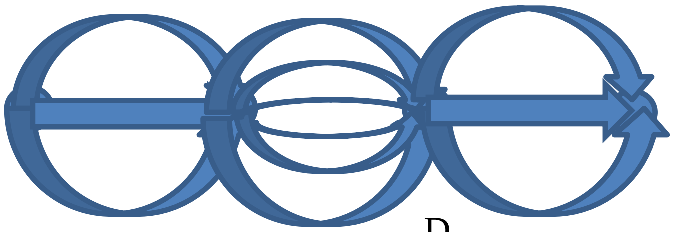
Оскільки, якщо даний квадрат розглянути як одиничний в декартовій системі координат, і для вершин з однаковою сумою координат скласти різницю потенціалів, то їх потенціал буде однаковим, оскільки квадрат симетричний. Тому ми можемо закоротити ці вершини, не порушуючи загального опору на будь якій ділянці кубу, і отримати саме таку схему, що складається з двох послідовно з'єднаних груп паралельних опорів.

$\frac{1}{R_{A-C}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\Rightarrow R_{A-C}=\frac{1}{2}$, аналогічно $R_{C-B}=\frac{1}{2}$, тоді $R_{A-B}=1$

Розглянемо 3 – вимірний куб, потрібно знайти опір який показувати омметр, якщо його підключити до А та В.



За вказаним вище методом даному кубу буде відповідати схема:



$R_{A-C}=\frac{1}{3}$, $R_{C-D}=\frac{1}{6}$, $R_{D-B}=\frac{1}{3}$, тоді $R_{A-B}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

Аналогічно можна побудувати схеми для n – вимірних кубів, розглянемо такий випадок:

Очевидно, що вершин, які мають суму координат 0, та n буде по одній, вершин з сумою координат 1 буде n. Вершин з сумою координат 2 буде $n(n-1)$, оскільки для кожної з вершин з сумою координат знайдеться, по $n-1$ вершині в якій 1 буде стояти на цьому самому місці та мати ще одну 1 одиницю на будь-якому іншому місці.

Знайдемо кількість вершин у яких сума координат дорівнює два, їх буде $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$, і для кожної такої вершини знайдеться $n-2$ вершини сума координат якої на 1 більше і вона містить дві інші одиниці на тих самих місцях, маємо $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ таких з’єднань, для загального випадку кількість таких ребер буде дорівнювати $(n-k)C_n^k$, відповідно щоб знайти опір потрібно порахувати суму

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(n-k)C_n^k} \qquad (**)$$

що в свою чергу є сумою вулиць елементів трикутника Лейбніца.

На мові програмування Pascal , розробимо програму для обчислення сум трикутника Лейбніца (його вулиць та проспектів), на основі формул (*) та (**).

Програма для обчислення сум трикутника Лейбніца

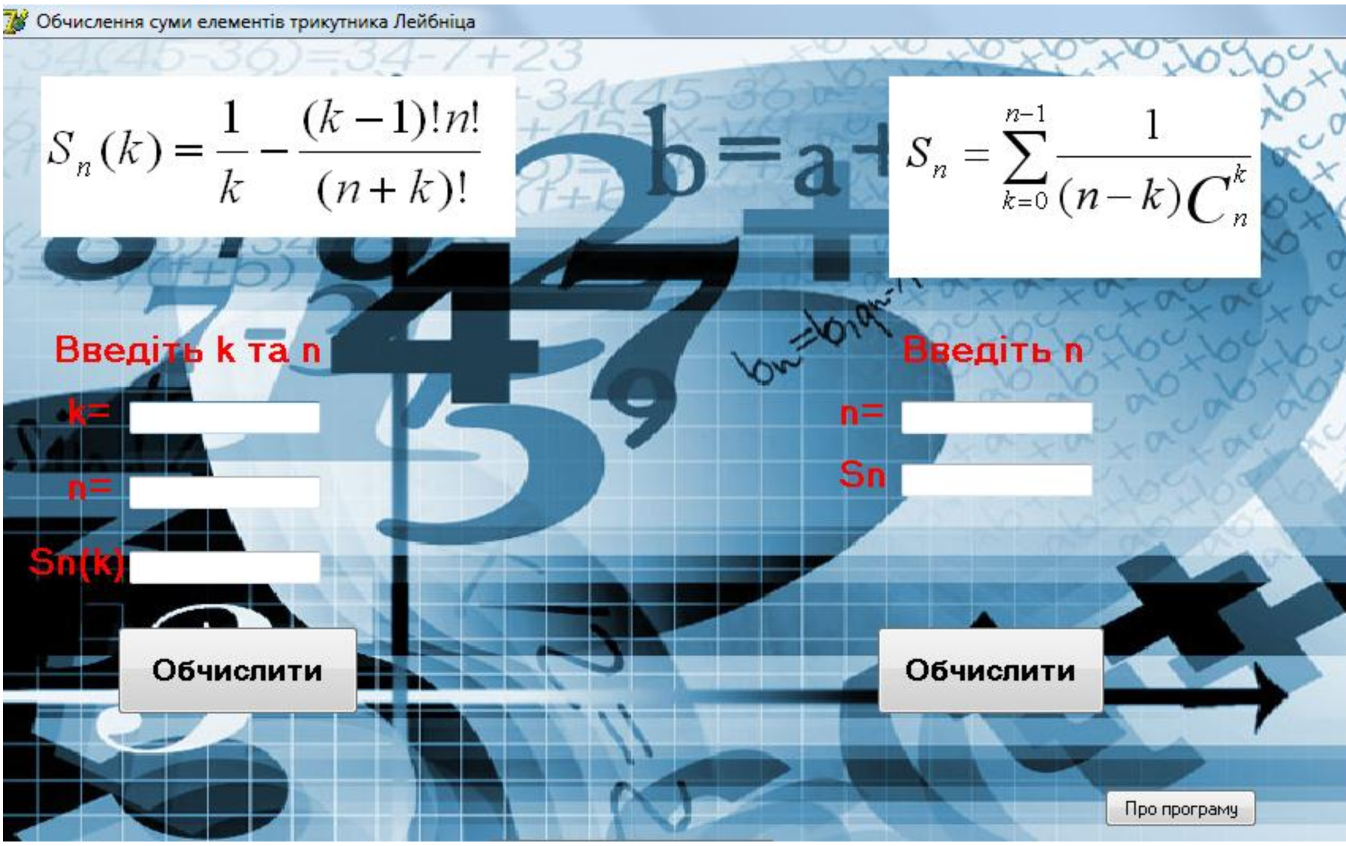
```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes, Graphics, Controls, Forms,
  Dialogs, jpeg, ExtCtrls, StdCtrls, XPMan;

type
  TForm1 = class(TForm)
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    Edit1: TEdit;
    Edit2: TEdit;
    Label5: TLabel;
    Label6: TLabel;
    Label7: TLabel;
    Edit4: TEdit;
    Edit5: TEdit;
    Button1: TButton;
    Button2: TButton;
    Button3: TButton;
    Button4: TButton;
    Image1: TImage;
    Image2: TImage;
    Label4: TLabel;
    Edit6: TEdit;
    Label9: TLabel;
    Button5: TButton;
    Image3: TImage;
```

```
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
    procedure Button4Click(Sender: TObject);
    procedure Button3Click(Sender: TObject);
   procedure Button5Click(Sender: TObject);

  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;

  implementation

{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var i,k,n:integer;
    s:extended;
    cod:integer;
    r : string;
    ff,kf,nf,nkf:int64;

 function factor(x:integer):int64;
  var i:integer;
      ff:int64;
  begin
```

```
  ff:=1;
  for i:=1 to x do ff:=ff*i;
  factor:=ff;
  end;



begin

Val(Edit1.Text,k, cod);
Val(Edit2.Text,n, cod);

{AllocConsole;
writeln(factor(k-1));
writeln(factor(n));
writeln(factor(n+k));
writeln(1/k -(factor(k-1)*factor(n))/(factor(n+k)));
writeln((factor(k-1)*factor(n))/(factor(n+k)));
writeln(factor(k-1)*factor(n));
sleep(5000);
FreeConsole;}
s:=1/k -(factor(k-1)*factor(n))/(factor(n+k));
Str(s:15:8,r); Edit4.Text := r;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
Edit1.Text:='';
Edit2.Text:='';
//Edit3.Text:='';
```

```
Edit4.Text:='';
var  TForm1.Edit4: TEdit - Unit1.pas (18)
end;

procedure TForm1.Button4Click(Sender: TObject);
begin
ShowMessage('Програму виконав Новицький Олександр, ММК, 2013.')
end;

procedure TForm1.Button3Click(Sender: TObject);
begin
close;
end;

procedure TForm1.Button5Click(Sender: TObject);
var i,k,n:integer;
    s:extended;
    cod:integer;
    r : string;
    ff,kf,nf,nkf:uint64;
```

```
 function factor(x:integer):int64;
  var i:integer;
      ff:int64;
  begin
  ff:=1;
  for i:=1 to x do ff:=ff*i;
  factor:=ff;
  end;

begin

//Val(Edit3.Text,k, cod);
Val(Edit6.Text,n, cod);
s:=0;
for i:=0 to n-1 do
s:=s+factor(i)*factor(n-i-1)/factor(n);
Str(s:15:8,r); Edit5.Text := r;

end;
```



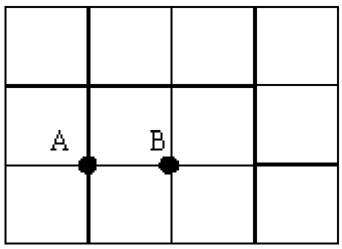
РОЗДІЛ 4

Опір ребер нескінченої сітки

Не менш цікаво розглядати не лише зміни кількості ребер в кубі, а й саму конфігурацію схеми, так наприклад, розглянемо квадратну нескінчену сітку, що складається з m вузлів та S опорів, що підключені до вузла.

Квадратна нескінчена сітка

Розглянемо нескінчену квадратну сітку($m \to \infty, S = 4$) та знайдемо опір між точками А та В , як показано на рисунку:



Прикладемо струм I до точки А, оскільки сітка симетрична, нескінчена , то струм розділиться на 4 рівні частини. За законами Кіргофа відомо, що струм, який входить в систему рівний тому, що виходить, тому у точку В буде повертатися струм із схеми рівний $\frac{I}{4}$.

Згідно з принципом «накладання» струм, що тече на ділянці АВ буде рівний :

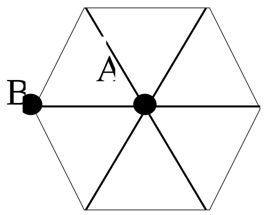
$$\frac{I}{4} + \frac{I}{4} = \frac{I}{2}$$, маємо:

$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$, якщо опір відрізка $AB = R = 1$, то: $U_{AB} = R * \frac{I}{2}$

Тоді $R_{AB} = \frac{1}{2}$

Трикутна нескінчена сітка

Розглянемо нескінчену трикутну сітку($m \to \infty, S = 3$) та знайдемо опір між точками A та B , як показано на рисунку.



Струм прикладений до точки A розділиться на 3 рівних частин, тому у точку B буде повертатися струм із схеми рівний $\frac{I}{3}$.

Згідно з принципом «накладання» струм, що тече на ділянці AB буде рівний :

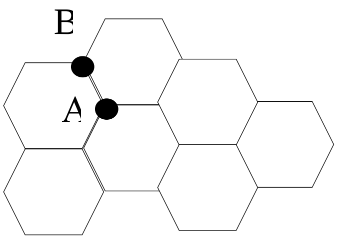
$\frac{I}{3} + \frac{I}{3} = \frac{2I}{3}$, маємо:

$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I}$, якщо опір відрізка $AB = R = 1$, то: $U_{AB} = R * \frac{2I}{3}$

Тоді $R_{AB} = \frac{2}{3}$

Шестикутна нескінчена сітка

Розглянемо нескінчену шестикутну сітку($m \to \infty, S = 6$) та знайдемо опір між точками A та B , як показано на рисунку.



Струм прикладений до точки A розділиться на 6 рівних частин, тому у точку B буде повертатися струм із схеми рівний $\frac{I}{6}$.

Згідно з принципом «накладання» струм, що тече на ділянці AB буде рівний :

$\frac{I}{6}+\frac{I}{6}=\frac{I}{3}$, маємо:

$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}$, якщо опір відрізка $AB=R=1$, то: $U_{AB}=R*\frac{I}{3}$

Тоді $R_{AB}=\frac{1}{3}$

Загальний випадок

Розглянемо нескінчену сітку($m\to\infty, S=S$) та знайдемо опір між точками А та В.

Струм прикладений до точки А розділиться на S рівних частин, тому у точку В буде повертатися струм із схеми рівний $\frac{I}{S}$.

Згідно з принципом «накладання» струм, що тече на ділянці АВ буде рівний :

$$\frac{I}{S}+\frac{I}{S}=\frac{2I}{S},$$

маємо:

$R_{AB}=\frac{U_{AB}}{I}$, якщо опір відрізка $AB=R=1$, то: $U_{AB}=R*\frac{2I}{S}$

Тоді $R_{AB}=\frac{2}{S}$

Також ми зацікавилися знаходженням опору не лише для точок сусідів, а й для будь-яких точок розміщення А та В, зокрема, Jo´zsef Cserti в своїй статті Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of infinite networks of resistors [8] розглянув нескінчену n – вимірну сітку, для якої за допомогою функції Гріна, автор отримав формулу для n – вимірної сітки:

$$R(l_1;l_2;...;l_d)=R\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_1}{2\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_d}{2\pi}\frac{1-e^{i(l_1x_1+l_2x_2+...+l_dx_d)}}{\sum_{i=1}^{d}(1-\cos x_i)}$$

Для квадратної сітки ($d=2$) було отримано, що:

$$R(l_1;l_2)=R\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-e^{i(l_1x_1+l_2x_2)}}{1-\cos x_1-\cos x_2}\frac{dx_2}{2\pi}$$

Використовуючи формулу Ейлера і прийнявши його комплексну частину за 0, отримаємо формулу:

$$R(l_1;l_2)=R\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(l_1x_1+l_2x_2)}{1-\cos x_1-\cos x_2}\frac{dx_2}{2\pi}$$

Підставивши $l_1=l_2=1$, що відповідає діагональному положенню точок А та В

$$R(1;1)=R\int_{-\pi}^{\pi}\frac{dx_1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\cos(x_1+x_2)}{1-\cos x_1-\cos x_2}\frac{dx_2}{2\pi}$$

Після деяких математичних перетворень автор отримує, що

$$R(1;1)=\frac{R}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-\cos x)^2dx}{\sqrt{(2-\cos x)^2-1}}$$

Знайдемо значення даного виразу:

$$1-\cos x=t;\quad \cos x=1-t;\quad 0\le x\le\pi\Rightarrow 0\le t\le 2;$$

$$x=\arccos(1-t);\quad dx=\frac{dt}{\sqrt{1-(1-t)^2}}$$

$$\int_0^2\frac{t^2dt}{\sqrt{(1+t)^2-1}\sqrt{1-(1-t)^2}}=\int_0^2\frac{t^2dt}{\sqrt{(2t+t^2)(2t-t^2)}}=$$

$$=\int_0^2\frac{tdt}{\sqrt{4-t^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{d(4-t^2)}{\sqrt{4-t^2}}=-\sqrt{4-t^2}\Big|_0^2=2$$

Отже, $R(1;1)\ =\ 2\,\dfrac{R}{\pi}$

Також автор пропонує розглядати випадки для $d=3$, і результат отримуються наближеним.

ВИСНОВКИ

Дана дослідницька робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновку, списку використаних джерел.

В першому розділі представлено основні теоретичні відомості, які є фундаментом роботи, а саме ми розглянули властивості біноміальних коефіцієнтів, важливі математичні структури, такі як трикутник Лейбніца та Паскаля.

Другий розділ містить розв’язок однієї з задач XV Всеукраїнського математичного турніру ім. М.Й. Ядренка: про біноміальні коефіцієнти та суми, яка буле презентована мною в складі команди “Тривед” під час участі в турнірі, нами були зроблені деякі узагальнення, які можуть бути використані під час розв’язання олімпіадних задач та розширення сформульованої задачі.

Третій і четвертий розділи є прикладним змістом даної роботи, а саме для моделі n – вимірного кубу з опором ребер 1 Ом пораховано опір між двома точками з сумою координат 0 та n, також було знайдено опір між двома сусідніми точками нескінченої сітки, і зроблені просування для знаходження опору між будь-якими двома точками сітки.

На мові програмування Pascal , розробимо програму для обчислення сум трикутника Лейбніца (його вулиць та проспектів).

Результатом роботи стала презентація «Деякі узагальнення задач про біноміальні коефіцієнти та суми» на засіданні математичного гуртка Малої академії наук. В грудні 2013 року я приймав участі в міжнародному конкурсі-захисті ICYS 2014, перший відбірковий етап був успішно пройдений і я ввійшов до резервної команди України у конкурсі ICYS 2014.

В подальшому я планую продовжити роботу над цією темою, зокрема мене цікавить знаходження опору між двома будь-якими точками сітки та можливість знаходження опору для обмеженої сітки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. перев.с укр. М, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977, -80 С.
2. Валенкин Н.Я. Популярна комбінаторика. – М.:Наука, 1975.- 209 С.
3. И.М.Мітельман, В.М.Лейфура Розв'язуємо разом: Задачі з цілими числами. Комбінаторика клітчастої дошки.—Харків: Вид. група "Основа", 2003.—144С.
4. Ерош.И.Л. Дискретная математика. Комбинаторика: Учебное пособие - :СПбГУАП.СПб., 2001. - 37С.
5. Завдання для відбірних етапів XIV Всеукраїнського турніру юних математиків. http://ukrtym.blogspot.com/p/xiv-2012.html
6. Недемеиер Ф., Смородинский Я. А. Сопротивление ребер многомерного куба. Науч.-популярный физ.-мат. журнал АН и АПН СССР. Квант. 1986. №6. 21-24с.
7. Новицький О. Суми та біноміальні коефіцієнти. ІІІ етап Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт. Рукопис. 2013.-21с.
8. Jo´zsef Cserti. Application of the lattice Green's function for calculating the resistance of infinite networks of resistors. Eotv¨os University, Department of Physics of Complex Systems, Budapest, Hungar- [Електронний ресурс]. – Режим доступу http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9909120.pdf