Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Миколаївський національний університет

імені В.О. Сухомлинського

Механіко-математичний факультет

УДК 378.124:51-7

Кафедра математики та механіки

Валентин Миколайович Лейфура – керівник Всеукраїнської команди юних математиків

Дипломна робота магістра

Студентки спеціальності

8.04020101 Математика*

Палій Галини Миколаївни

Науковий керівник: доктор технічних наук, професор

Будак Валерій Дмитрович

Науковий консультант: доцент

Баран Олег Іванович

Миколаїв - 2012

Згідно рішення кафедри математики і механіки

Протокол №________від _______________

дипломну роботу студентки Палій Галини Миколаївни

на тему «Валентин Миколайович Лейфура – керівник Всеукраїнської команди юних математиків»

«Рекомендувати до захисту»

Завідувач кафедри математики і механіки__________________(Будак В.Д.)

Декан механіко-математичного факультету ____________(Овчаренко А.В.)

Проректор з науково-педагогічної роботи________________(Рехтета М.А.)

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ВНЗ – Вищий навчальний заклад

ВДПУ – Вінницький державний педагогічний університет

КДПІ – Київський державний педагогічний інститут

ЛНУ – Львівський національний університет

МАН – Мала академія наук

МДГУ – Миколаївський державний гуманітарний університет

МДІ – Миколаївський державний інститут

ММК – Миколаївський муніципальний колегіум

ММЛ – Миколаївський морський ліцей

ММО – Міжнародна математична олімпіада

МНУ – Миколаївський національний університет

НАН – Національна академія наук

НАПН – Національна академія педагогічних наук

НДР – Німецька демократична Республіка

НТУУ – Національний технічний університет України

НУК – Національний університет кораблебудування

РАН – Російська академія наук

СРСР – Союз Радянських Соціалістичних Республік

ФПК – Факультет підвищення кваліфікації

ВСТУП

Україна – інтелектуальна держава з необмеженими потенційними можливостями розвитку й процвітання. Обдаровані діти – золоте надбання нації, її інтелектуальна еліта, світовий авторитет, гордість і честь. Держава завжди приділяла виняткову увагу формуванню розумового потенціалу українського громадянства, вважаючи, що тільки еліта може просувати суспільство й державу до висот досконалості. Саме тому в Україні велика увага приділяється вивченню математики. Знання з математики допомагають молодим людям робити свідомий вибір особистого життєвого шляху, встановлювати особисті цілі, спрямовані на розвиток суспільства, науки, розбудови Української держави. До яких би обріїв не прагнула людина, вона завжди торкається на своєму шляху основ математики.

Актуальність дослідження. *Актуальність дослідження* зумовлюється зростаючим інтересом громадськості до педагогічних персоналій та святкуванням у 2013 році сторіччя Миколаївського національного університету імені В.О.Сухомлинського, у зв'язку з цим значна частина творчих біографій уперше стає предметом наукових досліджень. Багато науковців сьогодні звертаються до вивчення питань, пов'язаних із зародженням, становленням і розвитком вітчизняної педагогічної думки, спадщини видатних учених.

Постановка проблеми визначає персоніфікований підхід. Педагогічна персоналія репрезентує доробок того чи іншого педагога як індивідуального творця, але передусім, як представника педагогічної думки певної історичної епохи. Звернення до педагогічної спадщини українських педагогів, науковців, освітян дає можливість ґрунтовніше вивчити історичні закономірності, становлення і розвитку української педагогіки.

У цьому аспекті актуального значення набувають освітня діяльність та науково-педагогічні погляди Валентина Миколайовича Лейфури.

Професор Валентин Лейфура – це унікальна постать. Крім наукової діяльності, викладацької роботи у вузах, складання олімпіадних завдань і видання навчальних посібників, Валентин Миколайович витрачав багато свого вільного часу, дуже часто на ентузіазмі, «за дякую» або мізерну винагороду для роботи з обдарованими школярами.

Метою дослідження є науково-теоретичне обґрунтування і систематизація освітньої діяльності В.М. Лейфури в контексті розвитку національної освіти, актуалізація педагогічного досвіду вченого в умовах модернізації вищої освіти в Україні.

Сформульована мета визначила наступні **завдання**:

– здійснити системний аналіз рівня висвітлення проблеми в педагогічній теорії та практиці і визначити напрями подальшого дослідження;

– розкрити етапи життєвого і творчого шляху вченого-викладача у контексті розвитку вищої освіти в Україні;

– визначити головні напрями освітньої діяльності вченого-педагога, розробити її періодизацію;

– обґрунтувати науково-педагогічну концепцію В.М. Лейфури;

– визначити перспективи використання науково-педагогічного досвіду вченого-педагога в сучасних умовах модернізації педагогічної освіти в Україні.

Об’єкт дослідження – розвиток національної освіти в Україні в кінці XX на початку XXI ст..

Предмет дослідження – освітня діяльність та науково-методичні досягнення Валентина Миколайовича Лейфури.

Методи дослідження. Для реалізації мети, вирішення поставлених завдань використано комплекс методів наукового дослідження:

– аналіз, синтез, індукція і дедукція, зіставлення, систематизація й узагальнення для виявлення об’єктивних даних творчого доробку В.М. Лейфури;

– пошуково-бібліографічний, зіставно-порівняльний аналіз наукової літератури та архівних матеріалів із теми дослідження;

– біографічний, хронологічний – для вивчення життєдіяльності вченого та його наукового доробку;

– інтерпретація й структурно-прогностичний метод – для формулювання висновків та пропозицій;

– соціологічні (відбір, класифікація та періодизація історичних фактів, письмове й усне опитування, прогнозування), що дали можливість здійснити актуалізацію досвіду вченого, визначити можливості і перспективи використання історико-педагогічної спадщини В.М. Лейфури в сучасній науці.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що в ньому *вперше:*

- на основі архівних джерел і наукової літератури глибоко й системно досліджено біографічні дані, здійснено цілісний опис життєвого і творчого шляху В.М. Лейфури;
- комплексно досліджено і систематизовано зміст і напрямки освітньо-управлінської діяльності В.М. Лейфури;
- удосконалено підходи до визначення біографічних даних життя й творчості вченого шляхом введення нових невідомих архівних матеріалів;
- подальшого розвитку набули:
    - зміст та основні напрямки освітньої та педагогічної діяльності вченого;
    - науково-педагогічні погляди і аспекти освітньої діяльності вченого з метою впровадження прогресивного досвіду в навчально-педагогічний процес підготовки майбутніх учителів.

Практичне значення одержаних результатів. Матеріали дослідження можуть використовуватися у навчально-виховній роботі зі студентами у вищих навчальних закладах під час вивчення майбутніми вчителями курсу математики, історії математики, математики вищої школи, а також у розробці спецкурсів з історії математики і в процесі підвищення кваліфікації вчителів у системі післядипломної педагогічної освіти.

Особистий внесок здобувача. Робота є самостійним науковим дослідженням та містить отримані особисто автором результати аналізу життєвого і творчого шляху, напрямків освітньої діяльності та науково-педагогічних поглядів В.М. Лейфури. У даному дослідженні основні ідеї, а також розробки і висновки належать авторові.

Публікації.

Валентин Миколайович Лейфура – керівник Всеукраїнської команди юних математиків./ Г.М. Палій // Матеріали щорічних магістерських читань «Педагогічна освіта як умова сталого розвитку суспільства». — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2012 — С. 85 – 88.

Робота В.М. Лейфури з обдарованими учнями./ Г.М. Палій // Актуальні проблеми підготовки майбутнього фахівця: Збірник науково-методичних праць. — Випуск 2. / За ред. А.К. Солодкої, Т.В. Шиян. — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2012.

Автор висловлює щиру вдячність вдові Валентина Миколайовича, Аллі Іванівні Воробйовій, за надання пропозицій щодо написання роботи, методичних матеріалів, монографій, фотографій тощо.

РОЗДІЛ 1
ВАЛЕНТИН МИКОЛАЙОВИЧ ЛЕЙФУРА: МАТЕМАТИК. УКРАЇНЕЦЬ. УЧИТЕЛЬ. КЕРІВНИК.

1.1. Вплив Республіканської школи-інтернат, фізико-математичного профілю, на формування науковця В.М. Лейфури

Випадковість це чи закономірність, але саме його, сільського хлопця, учня Березанської середньої школи, як самого здатного до точних наук в цілому районі, після 8 класу запросили на навчання в Республіканську школу-інтернат фізико-математичного профілю (Додаток С). Тоді Валентин Лейфура показав найкращі знання за результатами обласної олімпіади з математики, успішно пройшов відбірковий тур в спеціалізовану школу.

Відтепер йому самому доводилося будувати своє життя. Тут і почалися перші серйозні випробування. Виявилося, одних здібностей мало, потрібна була хороша підготовка. У класі фізико-математичної школи було багато киян, хлопців з обласних центрів, у яких була підготовка набагато краще. Валентину Миколайовичу довелося багато працювати над собою, щоб надолужити згаяне. Уже через рік були ліквідовані всі прогалини, він відчув себе впевнено, у нього з'явилося багато друзів, а далі пішло цікаве, насичене життя.

І саме тоді, в перший рік навчання у фізико-математичній школі-інтернаті, коли він особливо потребував підтримки і допомоги вчителя, Валентин Лейфура сформулював для себе майбутнє – допомагати і вчити талановитих дітей незалежно від того, яких висот сягне він сам. Доля була до нього прихильною. Може тому, що В.М. Лейфура завжди своєю працею і завзятістю сприяв цьому. Іноді здавалося, що цілий ланцюжок випадковостей приводила його до перемог і бажаних результатів. Але випадковість – це неусвідомлена закономірність. У нього був вибір і Валентин Лейфура сам вибрав собі дорогу, може, не зовсім типову в середовищі його однокласників [17; 4].

Математика не вимагає суєти. Але вимагає швидкої реакції розуму, глибини, логічного мислення. Це наука кшталт його характеру. Валентин Миколайович сам не любив суєти, поступав в житті так, як підказувало йому серце. Тоді молодий випускник педагогічного інституту, який отримав добру освіту, не обтяжувався сільською школою, а навпаки, був переконаний, що в глибинці є чимало талановитих хлопців, їм потрібен лише хороший наставник [10; 14].

«Я дворянин з Арбатского двору, своїм двором введений у дворянство! .., – каже В.М. Лейфура. Приблизно так я можу сформулювати свої професійні досягнення. Саме мої учні звели мене на п'єдестал суспільно-державного визнання, яке я отримав за цю роботу. Їх успіхи відображають мої зусилля. Мої учні завжди тримають мене в тонусі. Найголовніше – бачити, як вони відкривають для себе щось нове. У мене завжди була потреба в спілкуванні з обдарованими дітьми – направити, підштовхнути, передати свої знання, яких вони не отримають у школі. Відкрити їм дивовижний світ математики. А щоб був результат, ти також повинен бути цікавий їм. Для мене найвища нагорода – це коли учні тебе починають переростати. І тоді дай Бог тобі самому встигнути за ними і зрозуміти, що ці молоді мізки вже придумали ... Математика – це наука молодих» [18; 5].

Крок за кроком він підводив своїх учнів до найвищого рівня математичних змагань, де вони повинні володіти наукою логічного ланцюжка міркувань, перетворення сухих цифр в спосіб пізнання закономірностей навколишнього світу. Саме завдяки математичним методам були звершені найвидатніші науково-технічні відкриття в атомній енергетиці, космічній галузі, створення електронно-обчислювальних машин, плануванні в економіці та ін.. В.М. Лейфура не просто причетний,

він є безпосереднім учасником у підготовці фахівців високого рівня, еліти нашої країни

1.2. Життєвий і творчий шлях В. М. Лейфури

Творча спадщина видатних педагогів минулого і використання провідних педагогічних ідей дає змогу поєднати минуле і сучасність, що стає важливою умовою пізнання педагогічної істини.

В.М. Лейфура народився 9 серпня 1947 року в смт. Березанці Миколаївської області. Неабиякі математичні здібності талановитого юнака привели його з невеликої звичайної сільської школи до навчання у фізико-математичній школі-інтернат, до якої його запросили після 8-го класу, потім – у фізико-математичний ліцей при Київському державному університеті імені Т.Г. Шевченка [2; 79].

В 1970 р. успішно закінчив фізико-математичний факультет Миколаївського педагогічного інституту імені В.Г. Бєлінського (зараз Миколаївський національний університет імені В.О. Сухомлинського) і поїхав працювати в сільську школу вчителем у свій рідний Березанський район [17; 91]. Цим здивував багатьох, адже перед ним були відкриті всі дороги у велику науку.

Незабаром про юних математиків з Березанки і про молодого вчителя заговорили в області: його учні показували небачені результати на всіх етапах шкільних олімпіад. З обласного центру до сільського вчителя математики зачастили [1]. Приїхав з Миколаєва директор школи №38 з математичним ухилом (нині – муніципальний колегіум), до себе спеціально викликав завідувач облвно: «Ну, навіщо вам, молодій людині, сидіти в цій глушині? Ви повинні їхати в місто, де отримаєте квартиру, де розкриються всі ваші таланти! ... В розклад в міській школі вас поставлять хоч завтра».

«Добре, я подумаю, – відповів скромно В.М. Лейфура, – можливо через тиждень відповім ...». Він не відповів ні через тиждень, ні через місяць. Закінчував чверть у своїй школі. А в травні склав іспити до аспірантури при Київському державному університеті імені О.М. Горького, у вересні – був зарахований [18; 5].

У 1973 – 1976 роки навчався в аспірантурі на кафедрі вищої математики Київського педагогічного інституту за спеціальністю «Диференціальні і інтегральні рівняння». За призначенням Міністерства освіти, у зв'язку із закінченням аспірантури, почав працювати в Миколаївському держаному педагогічному інституті імені В.Г. Бєлінського з 1 жовтня 1976 року (Додаток Х). З цим інститутом, який згодом став Миколаївським національним університетом імені В.О. Сухомлинського, до 2001 року і була пов'язана наукова й педагогічна діяльність В. М. Лейфури. В березні 1979 року захистив дисертацію на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук. Вчене звання доцента отримав у 1983 році, звання професора – в 1991 році.

З 1980 по 2001 роки керував кафедрою математичного аналізу. Очолювання кафедри, перетворення її на потужний науково-педагогічний колектив, викладання багатьох фундаментальних математичних курсів, численних спецкурсів, власна плідна наукова робота з теорії диференціальних рівнянь, визнані всіма фахівцями наукові монографії, статті в авторитетних журналах, популярні серед студентів підручники, навчально-методичні посібники тощо, успішна участь у багатьох наукових конференціях – лише стислий перелік того, чим були наповнені ці роки [25].

У період 1982 – 2001 рр., В.М. Лейфура, був член журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, останні 5 років – заступник голови журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Був членом журі та експертом-консультантом математичних фестивалей фізико-математичної творчості школярів, які відбувалися на Україні в м. Одеса у 1993 – 1999 роках.

З 1994 – 1995 рік працював як старший науковий співробітник за держбюджетною темою МО України №9-АН «Системи диференціальних рівнянь з точками повороту» (керівник – академік Шкіль М.І.).

Лейфура В.М. член журі з математики усіх шести Соросовських олімпіад, які відбулися в Україні починаючи з 1994 року. Ці винятково престижні змагання проводяться за регламентом ММО, відповідним є і рівень складності задач. Тому й до роботи у складі журі залучаються найкращі фахівці України [4; 93].

У 1996 – 1999 роки (чотири роки поспіль) залучався МО України до відбірково-тренувальних зборів з метою підготовки національної команди школярів України до участі в ММО. За ці роки команда України виступила досить успішно, виборовши 8 золотих, 6 срібних і 9 бронзових медалей.

У 1997 році професор Лейфура В.М. запрошений як основний доповідач від України на II міжнародну конференцію по роботі з обдарованими дітьми і студентами, яка проводилась у м. Варна, Болгарія. Цю поїздку було підтримано міжнародним фондом «Відродження», який призначив професору спеціальний грант.

У 1997 – 1 998 роки працював як керівник держбюджетної теми МО України «Державні стандарти освіти з математики для вузів I та II рівня акредитації та класів загальноосвітніх шкіл економічного профілю».

З 1998 року брав активну участь у роботі Всеукраїнських турнірів юних математиків як голова, заступник голови журі. В.М. Лейфура очолював секцію математики територіального відділення Малої академії наук по Миколаївській області. Тривалий час був головою журі обласної математичної олімпіади.

У 2001 році Валентина Миколайовича запрошують керувати кафедрою прикладної та вищої математики новоствореного вищого навчального закладу – МДГУ ім. Петра Могили комплексу Києво-Могилянської академії, який сьогодні носить назву «Чорноморський державний університет імені Петра Могили» [25].

Окремою сторінкою творчої біографії В.М. Лейфури була його багаторічна активна участь у підготовці збірної команди України до Міжнародних математичних олімпіад (Додаток Д). А в 2003-2006 рр. Валентин

Миколайович призначався Міністерством освіти і науки України науковим керівником команди України на Міжнародних олімпіадах, і можна впевнено стверджувати, що в медалях, завойованих нашими олімпійцями-математиками в Японії, Греції, Мексиці, Словенії, є частка наукового таланту, педагогічної майстерності, відданого дітям серця професора В. Лейфури (Додаток Е).

Протягом багатьох років він керував створеним ним у Миколаєві семінаром для математично обдарованих учнів, який не мав аналогів в Україні. Цей семінар дав можливість зробити перші кроки в олімпіадній творчості та в математиці багатьом талановитим дітям, дехто з яких блискуче виступав на Соросівських, Всеукраїнських, Всесоюзних і Міжнародних математичних олімпіадах, а зараз уже є відомими науковцями [4; 93].

Серед знаменитих учнів професора В.М. Лейфури, які звели його на п'єдестал пошани, – Микола Рибак, випускник муніципального колегіуму, двічі завойовував срібні медалі на Міжнародних олімпіадах з математики в США і Великобританії, Фелікс Харитонов, Олена Ковилянская, Сергій Мозговий, Олександр Манзюк, Андрій Анікушин і ін.. У В.М. Лейфури багато таких талановитих учнів, які хоч і не потрапили з певних причин в збірну Україну на Міжнародні олімпіади, але цілком відповідали рівню найсильніших математиків. Як показало життя, вони поступали в престижні вузи, були в числі переможців на різних студентських олімпіадах, в науці вони робили відкриття, домоглися висот. Головне – розгледіти талант. А далі – ставити завдання, розвивати вміння логічно мислити, на інтуїтивному рівні відчувати хід до завершення поставленого завдання.

Один із учнів – Олександр Манзюк, який двічі писав під керівництвом професора В.М. Лейфури наукові роботи в МАН, в кінці кожної роботи для Малої академії наук писав: «Висловлюю щиру вдячність моєму науковому керівнику Валентину Миколайовичу за постановку задачі».
Професор дивувався: «Я не вчив його так писати, це він сам. Зате я дійсно ставив перед ним завдання і потім сам був вражений оригінальністю його

відповідей. Ми обидва були один одному цікаві. Хіба не про це я мріяв?» [17; 4].

Валентин Миколайович, попри свою завантаженість, завжди прагнув передавати у вигляді книг, статей і посібників свій величезний досвід і свої знання в галузі роботи з юними математиками, і своїх колег і друзів, хто працював з ним поруч, надихав на таку винятково важливу справу. Він є автором і співавтором декількох десятків друкованих робіт для математично обдарованих учнів, серед яких, наприклад, такі книги, як «Математичні задачі евристичного характеру», «Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування», «Математичні олімпіади школярів України: 1991 – 2000», «Математичні олімпіади школярів України: 2001 – 2006», «Задачі з параметрами», численних цікавих статей тощо (Додаток Р). Остання книга вийшла з друку у видавництві «Євросвіт», Львів, 1999р. «Задачі міжнародних математичних олімпіад та деякі методи їх розв’язання». Цю книгу рекомендовано МО України як навчально-методичний посібник для ліцеїв, гімназій та класів з поглибленим вивченням математики. Передмову до цієї книги написав директор Інституту математики НАН України, академік НАН України Самойленко А.М..

В. М. Лейфура був членом редакційної ради журналу «У світі математики», редакційних колегій журналу «Наукові праці Чорноморського державного університету імені Петра Могили» та газети «Математика».

Вагомий внесок Валентина Миколайовича в розвиток національної освіти відзначений високими державними, урядовими та галузевими нагородами (Додаток М). Указом Президента України йому було присвоєно почесне звання «Заслужений вчитель України» (Додаток Ж). Він нагороджений Почесною грамотою Кабінету Міністрів України (Додаток А), знаком імені Петра Могили «За розвиток вищої школи» (Додаток Н), знаками «Відмінник народної освіти УРСР», «Отличник просвещения СССР» (1991р.), « Відмінник народної освіти України» (1999р.) (Додаток В), почесними грамотами МОН України , відзнакою Благодійного фонду «Україна

– дітям» (Додаток В). Мав В.М. Лейфура і звання Соросівського вчителя (Додаток Н). У 2002 році мешканці міста Миколаєва визнали його «Громадянином року» в номінації «Середня школа» (Додаток З), у 2003 році Валентин Миколайович став переможцем Всеукраїнської акції «Дипломи доброти» (Додаток Л).

21 лютого 2011 року тяжка хвороба передчасно обірвала життя Валентина Миколайовича. Але професор прожив плідне життя, він заклав науковий фундамент у своїх учнях, яким належатиме в подальшому розвивати основні ідеї та праці свого вчителя. В кожному з них – частинка його душі, з кожним щедро ділився він своїми знаннями та досвідом.

1.3. Досягнення в масштабах України професора В.М. Лейфури

- Програма з математики для вузів І та ІІ рівня акредитації за економічним фахом. Ухвалено МО України для використання, 1995 р..
- В 1993 – 1994 роках працював у складі комісії МО України щодо підготовки положення про реалізацію ступеневої освіти: рівень бакалавра, спеціаліста, магістра для фізико-математичних спеціальностей.
- Член комісії МО України щодо стандартів освіти з математики.
- З 1994 – 1995 рік працював як старший науковий співробітник за держбюджетною темою МО України №9-АН «Системи диференціальних рівнянь з точками повороту».
- У 1996 – 1999 рр. (чотири роки поспіль) залучався МО України до відбірково-тренувальних зборів з метою підготовки національної команди школярів України до участі в Міжнародних математичних олімпіадах.
- 1997 – 1998 роки працював як керівник держбюджетної теми МО України «Державні стандарти освіти з математики для вузів І та ІІ рівня акредитації та класів загальноосвітніх шкіл економічного профілю».

- Створено програму з математики для шкіл економічного профілю, яку рекомендовано для впровадження МО України. Програму надруковано в газеті «Математика», серпень 1999 р..
- 20 років постійний член журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків, останні 5 років заступник голови журі.
- Член редакційної ради Українського математичного журналу для школярів і студентів «У світі математики».
- У 1997 році був запрошений як основний доповідач від України на ІІ міжнародну конференцію по роботі з обдарованими дітьми і студентами.
- Лейфура В.М. член журі з математики усіх шести Соросовських олімпіад, які відбулися в Україні починаючи з 1994 року.
- Професор В.М. Лейфура був член журі та експерт-консультант математичних фестивалей фізико-математичної творчості школярів.
- Член журі І та ІІ Всеукраїнських турнірів юних математиків, які проводяться за патронатом МО України (1998, 1999 роки).

РОЗДІЛ 2
МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ОЛІМПІАДНИЙ РУХ

2.1. Міжнародні математичні олімпіади від початку їх заснування і до сьогодення

Міжнародні математичні олімпіади школярів (ММО) було започатковано в 1959 році. Перша така олімпіада відбулася в Румунії, у ній брали участь лише 7 країн. В подальші десятиліття кількість країн, що приєднувалися до міжнародного математичного олімпійського руху, неухильно зростала. Так, в 1969 році в ММО брали участь 14 країн, в 1979 році – 23 країни, 1989 – 52, 1999 році – 81. В 2009 році в місті Бремені (Німеччина відбулася ювілейна, 50-та ММО, учасниками якої були школярі вже із 104 країн світу. Олімпіади відбуваються щороку у різних країнах (за винятком 1980 року, коли ММО не відбулася). За роки, що минули, склалися певні традиції щодо проведення таких авторитетних форумів юних математиків, якими є ММО. Цих традицій дотримуються країни – організатори. Час проведення – липень. Заздалегідь створюються організаційний комітет, до якого запрошують членів уряду, керівників закладів освіти, провідних вітчизняних математиків. На адресу оргкомітету країни-учасниці надсилають по декілька задач, з яких задачний комітет формує так званий Short List – список біля 30 задач, впорядкованих за розділами (алгебра, геометрія, комбінаторика, теорія чисел). Міжнародне журі, до складу якого входять наукові керівники команд, протягом кількох днів остаточно визначає шість задач, які пропонуються учасникам змагання. Усі ухвали журі затверджує голосуванням, в якому кожна країна має один голос. Спочатку голосують за дві прості задачі, потім – за дві складні і насамкінець, визначають середні за складністю задачі. Далі затверджують англійську версію тексту завдань, яку перекладають на інші офіційні мови: іспанську, німецьку, російську, та французьку. Кожен учасник отримує умови задач на своїй рідній мові та одній із офіційних мов, тому після затвердження офіційних перекладів наукові керівники команд готують переклади на державній мові своїх країн.

Змагання відбуваються в два тури. В кожному з них пропонується по три задачі, для розв'язання яких надається 4,5 години (використання калькуляторів та будь-яких довідників заборонено).

Повне розв'язання кожної задачі оцінюється в 7 балів. Оригінали робіт перевіряються керівниками команд – кожний перевіряє роботи своїх учнів. Паралельно копії робіт перевіряють координатори, яких призначає оргкомітет. Всього створюють шість груп координаторів, і кожна з них перевіряє лише одну й ту саму задачу у всіх учасників олімпіади. Далі розпочинається процес координації, тобто узгодження балів відповідно до схеми оцінювання по кожній з шести задач. Якщо ж узгодити бал науковому керівнику команди з координатором не вдається навіть після втручання старшого координатора, то остаточний бал буде визначено голосуванням на заключному засіданні журі.

За регламентом ММО учасники, що досягли найкращих результатів, нагороджуються золотими, срібними та бронзовими медалями. При цьому загальна кількість нагороджених не повинна перевищувати половину всіх учасників. Золоту медаль отримує приблизно $\frac{1}{12}$ частина від загальної кількості учасників, срібну $\frac{1}{6}$, бронзу $\frac{1}{4}$. Усім учням які не отримують медалей, але мають повні 7 балів хоча б по одній задачі, присуджуються Почесні грамоти. До 1982 року склад команд формувався з восьми осіб. В 1982 році кількість учасників від кожної країни була зменшена до чотирьох учнів. З 1983 року і до тепер команда складається з шести учасників (може бути і менше від шести, але не більше). Немає обмеженості на кількість виступів на ММО. Учасник на момент початку ММО повинен мати вік, який не перевищує 20 років і бути учнем середнього навчального закладу. Оскільки в багатьох країнах середня освіта складає не менше 12 років, то є не поодинокі приклади коли учні з деяких країн були учасниками чотирьох і навіть п'яти ММО, здобуваючи при цьому високі нагороди.

1959. I ММО (Бухарест, Румунія). З 21 по 31 липня 1959 року за ініціативою Румунського математичного і фізичного товариства було проведено першу Математичну олімпіаду. В ній взяли участь команди Болгарії, Угорщини, Німецької Демократичної Республіки, СРСР, Румунії, Чехословаччини. Максимально дозволене представництво - 8 учасників, від кожної країни. До складу команди СРСР увійшли 4 московських школярі. Андрій Тоом, учень школи №60 міста Москви, отримав третю премію.

1960. II ММО (Бухарест, Румунія). Всього було представлено 5 країн. Команда СРСР участі не брала. Перші премії отримали три учасники: Богуслав Девіш (Чехословаччина) Чанак Дьордь (Угорщина), Бесараб Нікулеску (Румунія).

1961. III ММО (Веспрем, Угорщина). 6 країн було представлено. Команда СРСР участі не брала. Бела Болюбаш вдруге поспіль отримав 1 премію для Угорщини. Нині відомий математик. Був запрошений на святкування 50-ої річниці ММО.

1962. IV ММО (Прага, Чехословаччина). 7 країн-учасниць. Команда СРСР була у повному складі – 8 школярів. Сама олімпіада відбувалась поблизу міста Чеські Будєйовіци в чудовому замку Глибока. Вперше радянські школярі Йосип Бернштейн та Лідія Гончарова (Москва) отримали перші премії (золоті медалі). Григорій Маргуліс отримав другу премію. В 1983 році його було нагороджено медаллю Філдса, яка вручається за видатні досягнення молодих математиків (до 40 років).

1963. V ММО (Вроцлав, Польща). 8 країн-учасниць. Вперше участь у ММО взяла Югославія. Вперше до складу команди СРСР увійшли українські школярі. Звягінцев Анатолій – учень школи № 4 м. Вінниця та Толпиго Олексій – учень школи № 57 м. Києва. Дебют юних математиків України у складі СРСР був успішним: Олексій Толпиго виборов диплом I ступеня, а Анатолій Звягінцев диплом II ступеня. Вперше всі 8 учасників команди СРСР отримали нагороди (4 дипломи I ступеня, 3 дипломи II ступеня та один диплом III ступеня).

1964. VI ММО (Москва, СРСР). Олімпіада відбувалася на Ленінських горах, в будинку Московського державного університету ім. М.В. Ломоносова. 9 країн-учасниць. Вперше участь в ММО взяла команда Монголії. Серед нагороджених дипломами I ступеня учень 10-го класу фізико-математичної школи при МДУ Юрій Матіясевич, майбутній академік РАН, який розв'язав знамениту десяту проблему Гільберта.

1965. VII ММО (Берлін, НДР). 10 країн-учасниць. Вперше брала участь в ММО Фінляндія, і її делегація була складена з найбільш успішних учнів деяких шкіл, на відміну від інших країн, де склад формується за підсумками національних олімпіад.

1966. VIII ММО (Софія, Болгарія). 9 країн-учасниць. До складу команди СРСР увійшли українські школярі: Юрій Богданський (СШ № 38 м. Київ) та Марченко Андрій (м. Харків СШ № 27). Обидва виступили блискуче і були нагороджені дипломами I ступеня. Нині Юрій Богданський доктор фізико-математичних наук, професор НТУУ «Київський політехнічний інститут».

1967. IX ММО (Цетиньє, Югославія). 13 країн-учасниць. Вперше брали участь у ММО команди Франції, Італії, Швеції. Саймон Нортон (Simon Norton) виборов першу золоту медаль для Великої Британії.

1968. X ММО (Москва, Ленінград, СРСР). 12 країн-учасниць: Болгарія, Велика Британія, Італія, Монголія, Німецька Демократична Республіка, Польща, Румунія, СРСР, Чехословаччина, Швеція, Югославія, Угорщина. До складу команди СРСР входив Білий Геннадій (м. Київ), який отримав диплом III ступеня.

1969. XI ММО. (Бухарест, Румунія). 14 країн-учасниц. Вперше учасниками ММО стали Голландія та Бельгія. Єдиний диплом першого ступеня для команди СРСР виборов український школяр Володимир Дрінфельд (м. Харків, СШ № 27), який у1990 році став лауреатом премії ім. Філдса, а нині є членом-кореспондентом Національної Академії Наук України. Третій диплом І ступеня поспіль для команди Великої Британії отримав Саймон Нортон.

1970. XII ММО (Кестебель, Угорщина). 14 країн-учасниць. Вперше в ММО брала участь команда Австрії. В складі команди СРСР українського школяра Ліпецького Олексія було відзначено дипломом учасника.

1971. XIII ММО (Братислава, Жилине, Чехословаччина). 15 країн-учасниць. Дебют команди Куби. У складі команди СРСР Олег Ляшко (СШ № 27, Харків) виборює диплом ІІ ступеня. Для Вольфганга Бурмайстера це була п’ята поспіль олімпіада. Загалом він виборов три дипломи І ступеня та два дипломи ІІ ступеня для своєї країни Німецької Демократичної Республіки.

1972. XIV ММО (Польща, Варшава, Торунь - батьківщина М. Коперніка). 14 країн-учасниць. Всі учасники команди СРСР отримали дипломи (2 першого ступеню, 4 другого ступеня, 2 третього ступеня).

1973. XV ММО (Москва, СРСР). 16 країн-учасниць. Сергій Конягін (Москва) виборов для команди СРСР другий поспіль диплом І ступеню. Пізніше активний член журі Всесоюзних математичних олімпіад школярів та студентів.

1974. XVI ММО (Берлін і Ерфрут, НДР). 18 країн-учасниць. Вперше до ММО долучилися команди Демократичної Республіки В’єтнам та Сполучених Штатів Америки. В складі команди СРСР Микола Чернов (СШ№ 35, м. Кривій Ріг) виборов диплом ІІІ ступеня. Жан Крістоф Йокош (Франція) отримав диплом І ступеня. В 1994 році його було нагороджено медаллю ім. Флідса.

1975. XVII ММО (Софія і Бургас, Болгарія). 17 країн-учасниць. В складі команди СРСР Олександр Резніков(СШ № 145 м. Київ) виборов диплом ІІ ступеня, а Іннус Ілля (СШ№ 27, м. Харків) отримав диплом ІІІ ступеня.

1976. XIII ММО (Австрія, Лінц). 19 країн-учасниць. В складі команди СРСР Гончаров Олександр (СШ № 13 м. Нікополь) виборов диплом I ступеня. Всього 9 учасників отримали перші премії, серед них Тетяна Хованова (СШ № 444 м. Москва).

1977. XIX ММО (Бєлград, Югославія). 20 країн-учасниць. Річард Борчердс (Велика Британія) виборов диплом I ступеня. В 1998 році отримав медаль Філдса. Нині професор факультету чистої математики і математичної статистики в Кембриджі. Пітер Шор (США) виборов диплом II ступеня. В 1998 році отримав Премію Неванліни, яка присуджується з 1982 р. за досягнення в галузі комп'ютерної математики. Визнаний світом за роботи з комбінаторного аналізу та теорії квантових комп'ютерів. У складі команди СССР Ярослав Виннишин (м. Київ) виборов диплом II ступеня. Професійний математик, працює в Інституті математики НАН України.

1978. XX ММО (Бухарест, Румунія). 17 країн-учасниць. Максимальна сума балів за розв'язання всіх задач для окремого учасника дорівнювала 40. Команда СРСР участі в цій олімпіаді не брала.

1979. XXI ММО (Лондон, Велика Британія). 23 країни-учасниці. Олександр Разборов (СРСР) виборов диплом I ступеня. В 1990р. він отримав приз Неванліни. Рудковський Михайло(ФМШ при КДУ, м. Київ) в складі команди СРСР отримав диплом II ступеня. Команда СРСР посіла перше місце у неофіційному заліку.

1980. ММО не відбулася.

1981. XXII ММО (Вашингтон, США). 27 країн-учасниць. Канада вперше брала участь в ММО. Команда СРСР виступила в неповному складі – 6 учасників. Абсолютним переможцем стала команда Люксембургу, вона не втратила жодного балу, її єдиний учасник набрав 42 бали із 42. В останній момент не отримали дозвіл на поїздку до США українські школярі Наталія Грінберг та Тарас Маланюк, які успішно подолали бар'єр відбору до складу команди СРСР і потенціально претендували на золоті медалі.

1982. XXIII ММО (Будапешт, Угорщина). 30 країн-учасниць.

1983. XXIV ММО (Париж, Франція). 32 країни-учасниці. Леонід Парновський (СШ № 52, м. Львів) виборов для команди СССР єдину золоту медаль.

1984. XXV ММО (Прага, Чехословаччина). 34 країни-учасниці. Леонід Оридорога (СШ № 64, м. Донецьк) у складі команди СРСР виборов золоту медаль, набравши 42 бали з 42. Команда СРСР маючи, в своєму активі 5 золотих та одну срібну медалі, посіла перше місце.

1985. XXVI ММО (Йоутса, Фінляндія). 38 країн-учасниць. Українські школярі Олег Бондаренко та Мальованець Анатолій (обидва – ФМШ при КДУ, м. Київ) у складі команди СРСР отримали срібні медалі. Вперше брали участь команди Китаю, Ірану, Ісландії, Турції. Єдину золоту медаль для команди СРСР виборола ленінградська школярка Ольга Леонтьєва

1986. XXVII ММО (Варшава, Польща). 37 країн-учасниць. Глущенко Геннадій (СШ № 91, м. Запоріжжя) виборов срібну медаль за команду СРСР. Три учасники – Володимир Роганов, Станіслав Смірнов та Куш Гіза (Угорщина) – набрали 42 бали з 42 можливих.

1987. XXVIII ММО (Гавана, Куба). 42 країни-учасниці. Золоті медалі отримали 22 учасники і лише ті, які набрали 42 бали з 42 можливих. Ленінградський школяр С. Смірнов отримав свою другу золоту медаль В подальшому відомий математик – вчений, лауреат премій Філдса і Салема. Румунія посіла перше місце, набравши 250 балів із 252 можливих.

1988. XXIX ММО (Канберра, Австралія). 49 країн-учасниць Перша олімпіада в Південній півкулі. Успішним був виступ у складі команди СРСР Дмитра Тулякова (СШ № 7, м. Маріуполь). На церемонії нагородження він отримав золоту медаль з рук прем’єр-міністра Австралії Роберта Хоука. Вперше брали участь Ірландія та Республіка Корея.

1989. XXX ММО (Браншвейг, Німеччина). 52 країни-учасниці. Мартін Хартеріч (Martin Harterich) брав участь вп’яте на ММО. Загалом він виборов три золотих, одну срібну і одну бронзову медалі для Федеративної Республіки Німеччини.

1990. XXXI ММО (Пекін, Китай). 54 країни-учасниці. Ендрю Макмуррі виборов першу медаль для Ірландії. Вперше участь в ММО брали команди Алжиру, Бахрейна, Японії, Макао, КНДР.

1991. XXXII ММО (Сигтуна, Швеція). 55 країн-учасниць. Євгенія Маліннікова (Ленінград) виборола свою третю золоту медаль для СРСР. У складі команди СРСР срібну медаль отримав Некрашевич Володимир (с. Круті Горби, Таращанського р-ну. Київської обл.). Теодор Баніка (Румунія) виборов свою третю золоту медаль.

1992. XXXIII ММО (Москва, Росія). 56 країн-учасниць. Ще 11 команд (Азербайджан, Білорусія, Вірменія, Естонія, Казахстан, Латвія, Литва, Молдова, Словенія, Туркменістан, Україна) мали статус спостерігачів. Тому Україна брала участь окремою командою, поза конкурсом, у складі: Бородін Олексій (м. Донецьк,) Бринюк Вадим (м. Донецьк), Дудко Денис (м. Київ), Корнієнко Олександр (м. Дніпропетровськ), Саприкін Сергій (м. Одеса), Теплінський Олексій (м. Кам'янець-Подільський). За підсумками олімпіади Бородін показав результат, який в офіційному конкурсі давав би право на срібну медаль. Нині О.Бородін – професор Каліфорнійського технологічного університету. Результати інших наших учасників відповідали бронзовій медалі.

1993. XXXIV ММО (Стамбул, Туреччина). Кількість країн-учасниць помітно зросла і досягла 73. Це було зумовлено, насамперед, появою незалежних держав, які утворилися в результаті розпаду СРСР та Югославії. Вперше офіційними учасниками ММО стали, зокрема, команди України, Молдови, Македонії. На олімпіаді наші учасники показали такі результати: Дудко Денис (м. Київ, ліцей «Лідер») – срібна медаль; Саприкін Сергій (м. Одеса, Рішельєвський ліцей) – срібна медаль; Мокляк Максим (м. Київ УФМЛ) – бронзова медаль; Піковський Владислав (м. Київ

СШ № 206) – бронзова медаль; Шкляров Дмитро (м. Харків, СШ № 51) – бронзова медаль; Станько Сергій (м. Львів, ФМЛ) – диплом учасника.

1994. XXXV ММО (Гонгконг). 69 країн-учасниць. За підсумками олімпіади 30 учасників було нагороджено золотими медалями, 63 – срібними, 102 – бронзовими. Першу золоту медаль для України виборов Юлій Санніков (м. Севастополь СШ № 8) 42 бали. Успіхи інших учасників було відзначено однією срібною (Сергій Болотенко, м. Харків, СШ № 84), двома бронзовими та двома почесними грамотами. Вперше в історії ММО всі учасники однієї команди отримали максимально можливу кількість балів – 42. Це була національна команда США, всі учасники якої, зрозуміло, вибороли золоті медалі.

1995. XXXVI ММО (Торонто, Канада). 73 країни-учасниці. Особливістю олімпіади стала незвичайно велика кількість переможців, які набрали максимальну кількість балів. 15 золотих медалістів мали в своєму активі по 42 бали. Зокрема, Китай, Румунія і Угорщина отримали золоті медалі з максимальною кількістю балів. Ніколай Ніколов (Болгарія) виборов свою третю золоту медаль. Команда України виборола, одну золоту (Ю. Санніков 41 бал), одну срібну (Максим Бойко, м. Харків ФМШ № 27) та одну бронзову медаль (Владислав Дума, УФМЛ), а також дві почесні грамоти. Вперше до складу команди України увійшла дівчина з м. Чернігова Леоненко Олена, яку було відзначено дипломом учасника.

1996. XXXVII ММО (Мумбаї – колишній Бомбей, Індія). 75 країн брали участь. Вперше всі учасники команди України отримали медалі. Ю. Санніков виборов для України третю поспіль золоту медаль. Решта українських школярів вибороли бронзові медалі. Лише одного балу не вистачило до срібла Павлу Пилявському. Повних 42 бали набрав лише один учасник – Кіпріан Манолеску з Румунії.

1997. XXXVIII ММО (Мар-дель-Плата, Аргентина). 82 країни-учасниці. Це був рік найбільшого успіху школярів України. Вперше всі учасники нашої команди отримали золоті чи срібні медалі. Золоті медалі отримали: Гиря Павло (м. Харків, ФМЛ № 27), Гречук Богдан (м. Київ, УФМЛ), Каблучко Захар (м. Вінниця, ліцей № 7.). Срібні медалі отримали Болтенков Андрій (м. Харків, ФМЛ № 27), Пилявський Павло (м. Вінниця, № 27ліцей), Руденко Олексій(м. Київ, СШ № 142). В неофіційному командному заліку команда України посіла шосте місце.

1998. XXXIX ММО (Тайбей, Тайвань). 76 країн-учасниць. Команда України виборола одну золоту, три срібні та дві бронзові медалі. Блискуче виступив П. Пілявський, який потрапив до трійки кращих учасників змагання, набравши 41 бал. Повні 42 бали набрав лише один учасник – Омід Аміні (Іран).

1999. XXXX ММО (Бухарест, Румунія). 81 країна-учасниця. Команда України виборола дві золоті, дві срібні та бронзову медалі. Другу золоту медаль поспіль отримав П. Пілявський. За результатами своїх чотирьох виступів на ММО він здобув дві золоті, одну срібну та одну бронзову медалі. Чудовий результат показав Максим Федорчук (м. Київ, ліцей «Лідер, 10 клас» 39 балів. Це була найбільша кількість балів. Таку ж кількість балів набрали ще по одному учаснику з Румунії та Угорщини. Результати всіх інших були нижчими. Золоту медаль переможця Максим отримав з рук Президента Румунії Еміла Константінеску.

2000. XXXXI ММО (Теджан, Республіка Корея). 82 країни-учасниці. Команда України отримала дві золоті медалі – М. Федорчук та Павло Цицура (м. Київ, ліцей «Лідер»), дві срібні медалі та Почесну грамоту. Сергію Сіденко (м. Київ, УФМЛ) не вистачило одного балу до золотої медалі.

2001. XXXXII ММО (Вашингтон, США). 83 країни-учасниці. Вдруге команда України виборола золото і срібло. Золоту медаль отримав Михайло Бернштейн (м. Харків, ФМЛ № 27). Високий результат Бернштейна дав йому можливість поділити 7 – 9 місце в загальному заліку. Інші учасники – Дудко Артем (м. Харків ФМЛ № 27,) Рибак Микола (м. Миколаїв, ММК), Шафалюк Антон (м. Євпаторія, СШ № 6), Володько

Сергій (м. Краматорськ СЗШ № 35), Волошин Денис (м. Київ ліцей «Лідер») отримали срібні медалі. В неофіційному командному заліку Україна посіла 8 місце.

2002. XXXXIII ММО (Глазго, Велика Британія). 84 країни-учасниці. Збірна команда України виборола одну золоту та три срібні медалі. Золоту медаль отримав Олександр Рибак (м. Київ ліцей «Лідер»). Вдруге поспіль срібні медалі отримали М. Рибак (ММК, м. Миколаїв), А. Дудко, С. Володько.

2003. XXXXIV ММО (Токіо, Японія). 84 країни-учасниці. Всі українські школярі вибороли медалі – одну золоту, дві срібні, три бронзових. Варвара Шепельська (м. Харків, ФМШ № 27) стала першою українською дівчинкою, яку було відзначено золотою медаллю. Крім того, в складі команди України виступили ще дві дівчинки: Тетяна Щербина (м. Харків, ФМШ № 27), та Галина Добровольська (м. Київ, ліцей «Лідер»), які отримали бронзові медалі.

2004. XXXXV ММО (Афіни, Греція). 85 країн-учасниць. Команда України втретє виборола золоті і срібні медалі. Наші п’ять представників найсильнішої статі виявилися справжніми джентльменами: усі вони в особистому заліку задовольнилися срібними медалями, а золото дісталося шостій учасниці – Галині Добровольській (м. Київ ліцей «Лідер»). Галя справді була визнаним лідером команди, помінявши токійську бронзу на афінське золото.

2005. XXXXVI ММО (Меріда, Мексика). 91 країна-учасниця. Команда України виборола 2 золоті, 2 срібні та 2 бронзові медалі. У підсумку команда набрала 181 бал, увійшовши до чільної десятки найкращих команд світу. Серед європейських держав Україна була третьою за рейтингом. Сергій Слободянюк (м. Київ, УФМЛ) показав абсолютний результат - 42 бали. Роман Чепляка (м. Одеса, Рішельєвський ліцей) до афінського срібла додав ще й мексиканське золото, набравши 38 балів із 42. Другу поспіль срібну медаль виборов Василь Кузнєцов (м. Київ ліцей «Лідер»).

Трійку найкращих команд світу склали: Китай (5 золотих, 1 срібна, 235 балів); США (4 золотих, 2 срібні, 213 балів); Росія (4 золотих, 2 срібні, 212 балів). Юрій Борейко виборов єдину для Молдови золоту медаль набравши 42 бали. Крім того Ю. Борейко було відзначено спеціальним призом журі за вражаючий розв'язок задачі № 3.

2006. XXXXVII ММО (Любляна, Словенія). 90 країн-учасниць. Команда України виборола 1 золоту, 2 срібні, 2 бронзові медалі та Почесну грамоту. Золоту медаль отримала Наталія Гончарук (м. Харків, ФМШ № 27), Олександр Чуклін (м. Севастополь) здобув срібну медаль. Це його друга нагорода, минулого року в Мексиці він мав бронзову медаль. Десятикласники Володимир Медвідь (м. Львів ФМЛ) та Данило Радченко (м. Київ, ліцей «Лідер») отримали відповідно срібну та бронзові медалі.

2007. XXXXIII ММО (В'єтнам, Ханой). 90 країн-учасниць. Команда України отримала 3 золоті, 1 срібну та 2 бронзові медалі. Це був один з найкращих виступів команди, яка набрала 154 бали і поділила 6 – 7 місця з командою Японії. Золоті медалі вибороли Д. Радченко, В. Медвідь та П. Міщенко (м. Донецьк, ліцей «Ерудит»). Потенційно на золоту медаль міг розраховувати і Віктор Богданський (м. Київ, ліцей «Лідер») – син Юрія Богданського, але прикро не впорався повністю із задачею № 1 і задовольнився сріблом.

2008. XXXXIX ММО (Мадрид, Іспанія). Команда України отримала 2 золоті, 2 срібні та 2 бронзові медалі. Другу золоту медаль поспіль здобув для України П. Міщенко. Золотим медалістом також став Ю. Шишацький (м. Київ ліцей «Лідер»). Десятикласники Назар Сердюк та Віталій Сенін (обидва м. Київ, ліцей № 208) отримали відповідно срібну та бронзову медалі. Трійку найсильніших команд склали Китай (217), Росія (199), США (190).

2009. L ММО (Бремен, Німеччина). Ювілейна п'ятидесята олімпіада зібрала найкращих юних математиків з 104 країн. З нагоди ювілею організатори запросили до участі колишніх переможців міжнародних олімпіад, а нині відомих математиків – лауреатів престижних математичних премій: Белу Балобаша, Тімоті Говерса, Ласло Ловаша, Станіслава Смирнова, Теренса Тао, Жан-Крістофра Юкоша. Кожен з цих математиків виступив з доповіддю на церемонії відкриття, а також вручав нагороди під час урочистої церемонії закриття олімпіади. Вже втретє за історію виступів на ММО наші школярі вибороли три золоті медалі: Н Сердюк, В. Сенін та Б. Веклич (м. Київ, ліцей «Лідер»). Крім того в активі нашої команди одна срібна та дві бронзові медалі. Максимальну суму – 42 бали здобули лише два учасники (представники Японії та Китаю). Чільну трійку у неофіційному командному заліку склали Китай (6 золотих, 221 бал). Японія (5 золотих, 1 бронзова, 212 балів), Росія (5 золотих, 1 срібна, 203 бали).

2010. LI ММО (Астана, Казахстан). 97 країн-учасниць. Команда України виборола 1 золоту (Б. Веклич), 2 срібних та 3 бронзових медалі. В неофіційному командному заліку Україна поділила 22 – 23 місця. Лише один учасник (Зіней Ні, Китай) показав абсолютний результат – 42 бали.

Переможці ММО – золоті медалісти:

1. Юлій Санніков (м. Севастополь, СШ № 8) – три золоті медалі(1994-1996 рр.)
2. Павло Пілявський (м. Вінниця, СШ № 27) – дві золоті медалі (1998, 1999).
3. Максим Федорчук (м. Київ, ліцей «Лідер») – дві золоті медалі (1999, 2000).
4. Павло Міщенко (м. Донецьк, ліцей «Ерудит») – дві золоті медалі (2007, 2008).
5. Богдан Веклич (м. Київ, ліцей «Лідер») – дві золоті медалі (2009, 2010).
6. Богдан Гречук (м. Київ, УФМЛ, 1997).
7. Павло Гиря (м. Харків, ФМЛ № 27, 1997).
8. Захар Каблучко (м. Вінниця, гімназія № 17, 1997).
9. Павло Цицюра (м. Київ, ліцей «Лідер», 2000).

10. Михайло Бернштейн (м. Харків, ФМЛ № 27,2001).
11. Олександр Рибак (м. Київ, ліцей «Лідер», 2002).
12. Варвара Шепельська (м. Харків ФМШ № 27, 2003).
13. Галина Добровольська (м. Київ, ліцей «Лідер», 2004).
14. Сергій Слободянюк (м. Київ, УФМЛ, 2005).
15. Роман Чепляка (м. Одесса, Решельєвський ліцей, 2005).
16. Наталія Гончарук (м. Харків, ФМЛ № 27, 2006).
17. Данило Радченко (м. Київ, ліцей «Лідер», 2007).
18. Володимир Медвідь (м. Львів, ФМЛ, 2007).
19. Юрій Шишацький (м. Київ, ліцей «Лідер», 2008).
20. Назар Сердюк (м. Київ, ліцей № 208, 2009).
21. Віталій Сенін (м. Київ, ліцей № 208, 2009).

Володарі срібних медалей:

1. Денис Дудко (м. Київ, ліцей «Лідер», 1993).
2. Сергій Саприкін (м. Одеса, Рішельєвський ліцей,1993).
3. Сергій Болотенко (м. Харків, СШ № 84, 1994)
4. Максим Бойко (м. Харків ФМШ № 27,1995.)
5. Андрій Болтенков (м. Харків ФМШ № 27, 2003р.)
6. Павло Пілявський (м. Вінниця, СШ № 27, 1997).
7. Олексій Руденко (м. Київ, СШ № 142, 1997).
8. Богдан Гречук (м. Київ, УФМЛ, 1998).
9. Антон Мелліт (м. Київ, ліцей «Лідер», 1998).
10. Сергій Торба (м. Київ, ліцей «Лідер», 1998).
11. Андрій Примак (м. Київ, УФМЛ, 1999).
12. Євген Степанов (м. Київ, ліцей «Наукова зміна», 1999).
13. Сергій Сіденко (м. Київ, УФМЛ, 2000).
14. Олександр Кравченко (м. Київ, ліцей «Лідер», 2000).
15. Денис Волошин (м. Київ, ліцей «Лідер», 2001).
16. Антон Шафалюк (м. Євпаторія СЗШ № 6, 2001).
17. Артем Дудко (м. Харків, ФМЛ № 27, 2001, 2002).

18. Микола Рибак (м. Миколаїв, ММК, 2001,2002).
19. Сергій Володько (м. Краматорськ, СШ № 35, 2001,2002).
20. Дмитро Гордон (м. Харків, гімназія № 45, 2003).
21. Максим Кацев (м. Севастополь, школа гімназія № 5, 2003).
22. Олександр Цимбалюк (м. Харків, ФМЛ № 27, 2004).
23. Антон Луньов (м. Донецьк, ліцей «Ерудит», 2004).
24. Володимир Челноков (м. Київ, ліцей «Лідер», 2004).
25. Роман Чепляка (м. Одеса, Рішельєвський ліцей, 2004).
26. Василь Кузнецов (м. Київ, ліцей «Лідер», 2004, 2005).
27. Роман Апостол (м. Київ, УФМЛ, 2005).
28. Володимир Медвідь(м. Львів, ФМЛ, 2006).
29. Олександр Чуклін(м. Севастополь, СШ, 2006).
30. Віктор Богданський (м. Київ, ліцей «Лідер», 2007).
31. Назар Сердюк (м. Київ, ліцей № 208, 2008).
32. Дмитро Соболєв (м. Харків, гімназія № 47, 2008).
33. Анастасія Лисакевич (м. Харків, ФМЛ № 27, 2009).
34. Максим Чорний (м. Київ, ліцей «Лідер», 2010).
35. Тімур Хрущов (м. Харків, ФМЛ № 27, 2010).

Володарі бронзових медалей:

1. Піковський Владислав (м. Київ СШ № 206, 1993).
2. Максим Мокляк (м. Київ, УФМЛ, 1993).
3. Дмитро Шкляров (м. Харків, СШ № 51,1993).
4. Ілля Карабаш (м. Донецьк, ФМШ № 17, 1994).
5. Віктор Кульчицький (м. Харків, СШ № 161,1994).
6. Владислав Дума (м. Київ, УФМЛ, 1995).
7. Андрій Конішевський (м. Київ, УФМЛ, 1996).
8. Сергій Мозговий (м. Київ, УФМЛ, 1996).
9. Михайло Нижник (м. Львів, ФМЛ, 1996).
10. Павло Пілявський (м. Вінниця, СШ № 7, 1996).
11. Олександр Рибак (м. Київ, ліцей «Наукова зміна», 1996).

12.Андрій Болтенков (м. Харків, ФМЛ № 27, 1998).

13.Сергій Бондаренко (м. Київ, УФМЛ, 1999).

14.Даниїл Зарайський(м. Донецьк, СЗШ № 37, 1999).

15.Тетяна Щербина (м. Харків, ФМЛ № 27, 2003).

16.Галина Добровольська (м. Київ, ліцей «Лідер», 2003).

17.Дмитро Петровський (м. Київ, УФМЛ, 2003).

18.Олександр Кравець(м. Київ, ліцей «Лідер», 2005).

19.Олександр Чуклін (м. Севастополь) СШ, 2005).

20.Данило Радченко (м. Київ, ліцей «Лідер», 2006).

21.Віталій Лішунов (м. Київ, УФМЛ, 2006).

22.Сергій Ніколаєнко (м. Донецьк, ліцей «Ерудит», 2007).

23.Юрій Шашацький (м. Київ, ліцей «Лідер», 2007).

24.Віталій Сенін (м. Київ, ліцей № 208, 2008).

25.Юлія Семикіна (м. Київ, ліцей «Лідер», 2008).

26.Ігор Кудла (м. Київ, ліцей «Лідер», 2009).

27.Дар'я Щедріна (м. Київ, УФМЛ, 2009).

28.Дар'я Теплова (м. Харків, ФМЛ № 27, 2010).

29.В'ячеслав Жениленко (м. Харків, ФМЛ № 27, 2010).

30.Тетяна Лавинська (м. Харків, ФМЛ № 27, 2010).

Почесні грамоти:

1. Михайло Ганічев (м. Київ, СШ № 19, 1994).
2. Олександр Хоменко (м. Київ, УФМЛ, 1996).
3. Сергій Болотенко (м. Харків, СШ № 84, 1995).
4. Дмитро Редькін (м. Одеса, Рішельєвський ліцей, 1995).
5. Ференц Товт (м. Берегове, 2000).
6. Ярослав Рагель (м. Ужгород, 2002).

Диплом учасника:

1. Сергій Станько (м. Львів, УФМЛ, 1993).
2. Олена Леоненко (м. Чернігів, 1995).

3. Олександр Манзюк (м. Миколаїв,ММК, 1999).
4. Павло Конончук (м. Львів, ФМЛ, 2000).
5. Станіслав Мельниченко (м. Вінниця, 2002).
6. Тарас Матохнюк (м. Вінниця, 2002).

За роки незалежності українські юні математики вибороли на Міжнародних олімпіадах 27 золоті, 39 срібні, 30 бронзові медалі та 6 Почесних грамот.

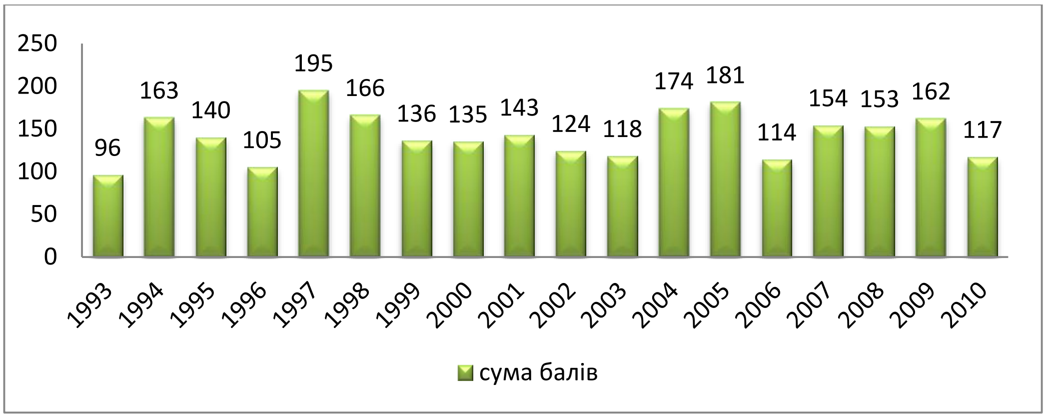


Рис.2.1. Результати української команди на ММО

Найкращим результатом української команди є результат виступу у 1997 році (3 золоті, 3 срібні медалі, 77% максимальної кількості балів, шосте командне місце). До найвищих результатів команди України відносяться: виступ у 2007 році (3 золоті, 1 срібні та 2 бронзові медалі, 61% максимальної кількості балів, шосте командне місце), виступ у 2005 році (2 золоті, 2 срібні медалі та 2 бронзові медалі, 72% максимальної кількості балів, дев'яте командне місце), а також виступи у 2001 та 2004 рр., коли всі учні вибороли тільки золоті та срібні медалі (команда посіла восьме та одинадцяте місця відповідно). Вагомим досягненням є виступ команди на Міжнародній олімпіаді 2003 року, коли на надзвичайно складних завданнях усі шість українських учасників вибороли медалі (1 золоті, 2 срібні медалі та 3 бронзові) [20; 213].

2.2. 44-та Міжнародна математична олімпіада у Японії

44-та Міжнародна олімпіада з математики відбувалася з 7 по 19 липня в Токіо (Японія) (Додаток П). В олімпіаді взяли участь 457 учасники з 83 країн.

До української команди увійшли випускники:

Дмитро Гордон – учень 11 класу, НВК № 45 м. Харкова;

Максим Кацень – учень 11 класу, школа-гімназія № 17 м. Севастополя;

Варвара Шепельська – учениця 11 класу, фізико-математичного ліцею № 27 м. Харкова;

Тетяна Щербина – учениця 11 класу, фізико-математичного ліцею № 27 м. Харкова;

Дмитро Петровський – учень 10 класу, фізико-математичний ліцей КНУ ім. Тараса Шевченка – УФМЛ;

Галина Добровольська – ліцей № 171 «Лідер» м. Києва.

Склад команди формувався за підсумками Всеукраїнської математичної олімпіади (м. Черкаси, березень 2003 р.) та конкурсного відбірково-тренувального збору до участі в ММО-44, який відбувся з 12 по 21 травня 2003 р. в м. Львові на базі Фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті імені І.Я. Франка. Під час збору було проведено чотири відбіркових тури за регламентом Міжнародної математичної олімпіади: в кожному турі пропонувалося три задачі, на виконання яких давалося 4,5 години. Повне розв'язання задачі оцінювалося в 7 балів. У відборі взяли участь 12 учнів, в журі входили: Вартанян Г.М. (м. Одеса), Мітельман І.М. (м. Одеса), Теплінський О.Ю. (м. Київ), Шевченко Г.М. (м. Київ), Лейфура В.М. (м. Миколаїв). Крім того, активно працював лекторій та практикум по розв'язуванню задач за матеріалами міжнародних та зарубіжних олімпіад. Особливо хотілося б тут відзначити В.А.Ясінського (м. Вінниця) та І.М.Мітельмана, які прочитали значні за обсягом курси лекцій з геометрії та комбінаторики і теорії чисел відповідно. Учням також надавалися консультації стосовно завдань, які їм пропонувались для самостійного розв'язання. Слід зазначити, що Львівський фізико-математичний ліцей (директор Добосевич М.С.) доклав усіх зусиль щодо забезпечення успішного проведення зборів [2; 46].

Керівником команди України на ММО-44 була В.О.Борисова (м. Київ, Науково-методичний центр МОН), науковим керівником – В.М. Лейфура (м. Миколаїв, МДГУ ім. П. Могили).

Як завжди, в перші чотири дні олімпіади з 7 по 11 липня наукові керівники команд (журі олімпіади) працювали над вибором 6 задач із списку завдань (Short-listed Problems), який підготував Проблемний комітет (Problem Selection Committee). Ці задачі було розподілено на 4 групи: алгебра, комбінаторика, геометрія і теорія чисел. Спочатку члени журі класифікували задачі за трьома рівнями складності: легкі, середні та важкі. В межах кожного класу в результаті обговорення і голосування було обрано по дві задачі. Задачі 1 і 4 класифікувалися як легкі, 2 і 5 як середні, 3 і 6 як важкі. Потім затверджувалися остаточна редакція умов задач та версії (переклади на основні робочі мови олімпіади та на мови країн-учасниць). Насамкінець, опрацьовували критерії оцінювання по кожній задачі (Marking Scheme).

Урочисте відриття олімпіади відбулося 12 липня в Національному Молодіжному Олімпійському Меморіальному центрі (олімпійське селище, яке було збудовано в 1964 році з нагоди олімпійських ігор).

Кожну команду запрошували на сцену для представлення.

Команда України при підготовці до олімпіади й на самій олімпіаді працювала як згуртований колектив. На відкритті олімпіади наші учні несли перед собою Державний прапор України. Всі вони були одягнені в однакові футболки жовтого кольору з написом «Life with symmetry». Керівники команди мали такі футболки блакитного кольору. Футболки – це подарунок команді України від Організаційного комітету 5-ої міжнародної наукової конференції «Симетрія в нелінійній математичній фізиці», яка відбулася в кінці червня в місті Києві (Голова оргкомітету – доктор фіз.-мат. наук Нікітін А.Г.).

13 і 14 липня відбулись тури. 15 і 16 липня – перевірка і координація робіт. Задачу № 1 повністю розв'язали 182 учасники, задачу № 2 – 62, задачу № 3 – 24, задачу № 4 – 277, задачу № 5 – 63, задачу № 6 – 22 учасники.

По-справжньому підступними виявились задачі № 2 і № 5. Зовні привабливі в ідейному розумінні, вони вимагали певного рівня математичної культури, вміння вдало вибрати класифікацію для виконання оптимального за часом перебору всіх можливих ситуацій, вміння акуратно виконувати оцінки. На пошуки розв'язання цих задач учасники витрачали дуже багато часу, а тому для розв'язання найскладніших задач № 3 і № 6 залишалось обмаль часу.

За підсумками олімпіади команда України своє основне завдання виконала – усі українські школярі вибороли медалі.

Учасники, які набрали 29 – 42 бали, нагороджувалися золотою медаллю. Серед них і наша Варвара Шепельська. Учасники, які набрали 19 – 28 балів, нагороджувались срібними медалями – серед них Максим Кацев і Дмитро Гордон. Учасники, які набрали 13 – 18 балів, нагороджувалися бронзовими медалями – серед них Тетяна Щербина, Галина Добровольська та Дмитро Петровський.

Крім нашої Варвари Шепельської, найвищі нагороди отримали ще: Вікторія Лебедь (Білорусія), Олена Бормашенко (Канада), Ана Караіані.

Таблиця 2.1.

Результати учасників команди України на 44-й ММО

Учасник	Задачі						Σ	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		

Г. Добровольська	0	5	0	7	0	2	14	Бронзова медаль
Д. Гордон	7	0	0	7	7	0	21	Срібна медаль
М. Кацев	7	7	0	7	0	2	23	Срібна медаль
Д. Петровський	2	3	0	7	1	1	14	Бронзова медаль
В. Шепельська	7	7	7	7	2	0	30	Золота медаль
Т. Щербина	7	1	0	7	0	1	16	Бронзова медаль

Варто відзначити, що лише команди 10 країн спромоглися вибороти по 6 медалей різного гатунку. Ці команди та якість їх медалей подано в табл. 2.2..

Таблиця 2.2.

Винагороди здобуті командами країн-учасниць

Країна	золоті	срібні	бронзові
Болгарія	6	—	—
Китай	5	1	—
СІЛА	4	2	—
Росія	3	2	1
Корея	2	4	—
В'єтнам	2	3	1
Румунія	1	4	1
Японія	1	3	2
Велика Британія	1	2	3
Україна	1	2	3

Закриття олімпіади відбулося 18 липня. Нагороди переможцям вручалися в присутності Його Високості спадкового принца Японії, який звернувся до учасників з вітальним словом [21; 58 – 62].

2.3. 45-та Міжнародна математична олімпіада у Греції

2004 року найкращих математиків планети гостинно зустріла Греція – країна, яка дала світові таких видатних математиків і філософів як Фалес, Піфагор, Платон, Арістотель, Евклід, Архімед (Додаток П). Найбільш престижне математичне змагання у світі – саме так назвав ММО-45 у вітальному слові Голова організаційного комітету олімпіади професор Ніколаос Александріс – відбулося з 4 по 18 липня 2004 року в столиці Греції місті Афіни. На ньому зібралися 486 учнів з 85 країн світу. Команда України складалася з шести учасників:

Цимбалюк Олександр – випускник ФМЛ № 27 м. Харків;

Чепляка Роман – учень 11-го класу Рішельєвського ліцею, м. Одеса;

Добровольська Галина – випускниця ліцею «Лідер», м. Київ;

Кузнецов Василь – учень 11-го класу, ліцей «Лідер», м. Київ;

Луньов Антон – випускник ліцею «Ерудит», м. Донецьк;

Челноков Володимир – випускник ліцею «Лідер», м. Київ.

Склад команди формувався за підсумками Всеукраїнської математичної олімпіади (м. Львів, березень 2004 р.) та конкурсного відбірково-тренувального збору, який відбувся з 5 по 14 травня в м. Львові на базі фізико-математичного ліцею при Львівському національному університеті імені І.Я. Франка. У відборі взяли участь 12 учнів, в журі працювали: Курченко О.О., Радченко В.М., Шевченко Г.М. (КНУ ім. Т. Шевченка), Теплінський О.Ю. (Інститут математики НАН України),

Сарана О.А. (Житомирський державний університет), Ясінський В.А. (Вінницький державний педагогічний університет), Лейфура В.М. (Миколаїв, МДГУ ім. П. Могили комплексу «Києво-Могилянська академія» – голова журі). Відбір кандидатів до складу команди України для участі в ММО-45 відбувався в умовах високої конкуренції. На 6 місць в рівній мірі претендувало 10 учнів, безперечно, здібних і талановитих. Вирішальним виявився останній, четвертий тур, рівень складності завдання якого, був максимально наближений до рівня завдань, які пропонуються на ММО. Члени журі відбору доклали значних зусиль щодо тренування наших школярів шляхом проведення лекцій, практикумів, консультацій, творчих дискусій, постійного неформального спілкування з учнями з питань ідеології та методології розв’язання задач рівня міжнародних олімпіад, надання дидактичних матеріалів та рекомендацій членам команди стосовно їх підготовки до участі в ММО в період вже після відборів і до початку ММО-45.

Керівником команди України на ММО-45 була В.О. Борисова (м. Київ, Науково-методичний центр МОН), науковим керівником – В.М. Лейфура. Зазвичай, у перші дні члени журі працювали над вибором 6 задач із списку 30 задач, який підготував Проблемний комітет, за чотирма розділами: алгебра, комбінаторика, геометрія і теорія чисел.

Команда України виступила гідно за якісними та спортивними показниками. П’ять задач підкорилися нашій команді, причому розв’язки, запропоновані нашими учнями, були вишуканими і різноманітними. Лише задачу №3 не розв’язав жоден з учасників нашої команди. Ця задача виявилася справжньою ломиголовкою – її розв’язало тільки 11 учасників (по одному учаснику з Болгарії, Канади, Китаю, Німеччини, Угорщини, Ірану, Литви, Румунії, Тайваню та два учасника з Росії). Цікаво, що учасник команди Литви, який розв’язав задачу №3, отримав нулі по кожній з решти п’яти задач. Серед наших учнів найбільш істотні просування в напрямку пошуку правильного розв’язку були в роботах Р. Чепляки і В. Челнокова. За підсумками олімпіади 45 учасників, які набрали 32 – 42 бали, отримали золоті медалі; 78 учасників, які набрали 24 – 31 бал, отримали срібні медалі; 120 учасників, які набрали 16 – 23 бали, отримали бронзові медалі. Кожного учасника, який набрав менше 16 балів, але отримав повні 7 балів за розв’язання якої-небудь задачі, було нагороджено Почесною грамотою. Наші п’ять юних представників найсильнішої статі виявилися справжніми джентельменами: всі вони в особистому заліку задовольнилися срібними медалями, а золото дісталося шостій учасниці – Галині Добровольській. Галя справді була визнаним лідером команди, помінявши токійську бронзу на афінське золото. Срібні медалі О. Цимбалюка та А. Луньова можна назвати медалями із золотим нашаруванням – адже кожному з них до «золота» не вистачило одного балу. Потенціально на золоту медаль міг розраховувати і В. Челноков, якби не прикрі помилки, яких він припустився при розв'язанні задачі №2. Проте, попри негаразди учасники нашої команди боролися до кінця, здобувши і золото, і срібло для України.

Таблиця 2.3.

Результати учасників команди України на 45-й ММО.

Учасник	Задачі						∑	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
Цимбалюк Олександр	7	7	0	7	3	7	31	Срібна медаль
Чепляка Роман	7	1	2	7	7	0	24	Срібна медаль
Добровольська Галина	7	7	1	7	7	7	36	Золота медаль
Кузнецов Василь	7	7	0	7	3	0	24	Срібна медаль
Луньов Антон	7	7	1	7	3	7	31	Срібна медаль
Челноков Володимир	7	2	2	7	3	7	28	Срібна медаль

В неофіційному командному заліку Україна посіла 11 місце, набравши 174 бали. Серед європейських країн Україна посіла п'яту сходинку. За якістю медалей ми не поступилися командам Румунії та Ірану, які посіли відповідно 9 та 10 місця і випередили Україну лише на 5-4 бали. У порівнянні з минулорічним рейтингом чільну десятку залишили команди Кореї та Туреччини, натомість в цьому році туди потрапили команди Тайваню та Ірану. Команда Таджикістану участі в ММО-45 не брала [22; 62 – 65].

2.4. 46-та Міжнародна математична олімпіада у Мексеці

Сорок шостий за порядковим номером форум найкращих юних математиків планети відбувся з 8 по 19 липня 2005 року в Мексиці, в місті Меріда, яке є столицею штату Юкатан (Додаток Р). Сюди прибули команди з 91 країни світу. Команда України складалася з шести учасників:

Чепляка Роман – випускник Рішельєвського ліцею м. Одеси;

Чуклін Олександр – учень 10 класу гімназії №1 м. Севастополя;

Кравець Олександр – випускник Києво-Печерського ліцею № 171 «Лідер» м. Києва;

Кузнєцов Василь – випускник Києво-Печерського ліцею № 171 «Лідер» м. Києва;

Слободянюк Сергій – випускник Українського фізико-математичного ліцею КНУ ім. Тараса Шевченка;

Апостол Роман – випускник Українського фізико-математичного ліцею КНУ ім. Тараса Шевченка;

Лідером команди України (науковим керівником) був професор, завідуючий кафедрою МДГУ комплексу «Києво-Могилянська академія» Лейфура В.М. (Додаток Т). Керівником команди була Литвиненко О.О., методист Науково-методичного центру середньої освіти. Програма для лідерів команд, які водночас складають міжнародне журі, розпочалася 8 липня.

Журі ММО-46 протягом перших п’яти днів працювало поблизу міста Меріда на узбережжі Мексиканської затоки. На обговорення і дискусії було винесено 27 задач. Серед цих 27 задач була і задача з геометрії, запропонована доцентом Вінницького державного університету Ясінським В.А.. Цього року журі ММО-46 відзначило В.А. Ясінського сертифікатом за його внесок у формування попереднього списку завдань олімпіади. З цих 27 задач було обрано 6.

Особливість перевірки завдань полягає в тому, що вона є подвійною, з одного боку роботи своїх учасників перевіряє Лідер команди, іншого боку фотокопії робіт перевіряють координатори. В даному випадку – це були математики з різних університетів Мексики. Крім того до роботи в якості координаторів запрошувались і фахівці з інших країн. Приємно відзначити, що вже другий рік поспіль до роботи координатором був запрошений вчений з Одеси доцент, кандидат фізико-математичних наук Мітельман І.М.. Команда координаторів поділяється на 6 груп. Кожна група перевіряє лише одну задачу. Кожну групу очолює старший координатор. Є математик який очолює роботу всієї команди координаторів. Лідер повинен чітко відповісти на запитання координаторів, в разі необхідності перекласти англійською мовою окремі фрагменти роботи, обґрунтувати наявність повного розв’язку чи певних просувань при відсутності повного розв’язку. Кінцева мета – лідер і координатори повинні узгодити оцінки кожного учасника команди по даній задачі. Тоді оформляється спеціальний протокол, який з одного боку підписує Лідер команди, а з іншого координатори. І так по кожній з 6 задач олімпіади.

Команда України виступила впевнено і основне своє завдання виконала: всі учасники вибороли медалі. Абсолютний результат показав Сергій Слободянюк, який набрав 42 бали із 42 можливих. Другу золоту медаль для України здобув Роман Чепляка (38 балів). Учасники змагань, які набрали від 23 до 34 балів, нагородженні срібною медаллю. Серед них і наші – Апостол Роман (32 бали) та Кузнєцов Василь (30 балів). Василь отримав срібну медаль вдруге поспіль. Олександр Кравець (22 бали) та Олександр Чуклін (17 бали) отримали бронзові медалі.

Таблиця 2.4.

Результати виступу учасників команди України на 46-й ММО

Учасники	Задачі						∑	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
Чепляка Роман	7	7	7	7	7	3	38	Золота медаль
Чуклін Олександр	7	1	0	2	7	0	17	Бронзова медаль
Кравець Олександр	0	7	1	7	7	0	22	Бронзова медаль
Кузнєцов Василь	7	7	0	7	7	2	30	Срібна медаль
Слободянюк Сергій	7	7	7	7	7	7	42	Золота медаль
Апостол Роман	7	4	7	7	7	0	32	Срібна медаль

На закритті всі члени команди були одягнені в красиву форму кольорів національного прапора України, яку виготовило спеціально для нашої команди на ММО одеське об’єднання «Нова реальність» за ініціативи його директора І.С. Давиденко. Був виготовлений і дуже гарний прапор України. Після отримання медалі, українці гордо підіймали його над собою.

До складу команди Таджикистану та Туркменістану входило по 3 учасники. Команда Узбекистану участі в ММО-46 не брала [23; 46 – 49].

2.4. 47-та Міжнародна математична олімпіада у Словенії

47-ма Міжнародна математична олімпіада проходила з 6 по 18 липня 2006 року в столиці Республіки Словенії – місті Любляні. До Любляни прибули команди 90 країн. Журі працювало в м. Порторожі, яке розташовано за 120 км від столиці. Уряд країни зробив усе можливе для того, щоб створити учасникам олімпіади, членам журі, керівникам команд, іншим запрошеним на олімпіаду особам чудові умови для перебування і роботи. Відчувалося, що для Словенії Міжнародна математична олімпіада є непересічною подією. Почесний комітет ММО очолював Президент Республіки Словенії доктор Янеш Дрновшек. Для наукових керівників команд урочистий прийом був влаштований Президентом Національної Асамблеї Республіки Словенії доктором Франсом Кук'яті. Організаційний комітет олімпіади був керований професором Звонко Тронтелі – головою Словенського Товариства математиків, фізиків та астрономів. Значної підтримки проведенню олімпіади надала Європейська комісія з науки та наукових досліджень.

Склад команди України було визначено за підсумками Всеукраїнської математичної олімпіади 2006 року та відбірково-тренувальних зборів, які в травні проходили на базі Дніпропетровського обласного фізико-математичного ліцею при Дніпропетровському національному університеті. Почесне право участі в Міжнародній олімпіаді вибороли такі шість учнів:

Гончарук Наталія – випускниця фізико-математичного ліцею №27 м. Харкова;

Лішунов Віталій – випускник Українського фізико-математичного ліцею при КНУ імені Тараса Шевченка;

Медвідь Володимир - учень 10 класу фізико-математичного ліцею при ЛНУ імені Івана Франка;

Рагель Ярослав – випускник гімназії м. Ужгорода;

Радченко Данило – учень 10 класу ліцею №171 «Лідер» м. Києва;

Чуклін Олександр - випускник гімназії №1 м. Севастополя [3; 73].

Науковий керівник команди – Лейфура Валентин Миколайович, професор, завідувач кафедри МДУ ім. Петра Могили.

Керівник команди – Литвиненко Ольга Олександрівна, методист Інституту інноваційних технологій і змісту освіти МОН України.

Міжнародний задачний комітет був сформований з таких п'яти авторитетних в олімпіадній галузі професорів: Геза Кьош (Угорщина), Святослав Савчев (Болгарія), Марчін Кучма (Польща), Андрій Бауер (Словенія, голова комітету), Роберт Герецшлягер (Австрія).

Таблиця 2.5.

Результати виступу учасників команди України на 47-й ММО

Учасник	Задачі						∑	Відзнака
	1	2	3	4	5	6		
Гончарук Наталія	7	7	0	7	7	0	28	Золота медаль
Медвідь Володимир	7	1	7	7	1	0	23	Срібна медаль
Чуклін Олександр	7	5	0	7	0	0	19	Срібна медаль
Радченко Данило	7	1	1	7	1	0	17	Бронзова медаль
Лішунов Віталій	7	0	1	7	0	0	15	Бронзова медаль
Рагель Ярослав	7	0	0	5	0	0	12	Почесна грамота

Україна посіла в цьому неофіційному рейтингу 22-е місце. Такий результат дещо поступається результатам трьох попередніх Міжнародних олімпіад, але він залишає Україну серед 25 найсильніших команд на ММО [24; 64 – 66].

РОЗДІЛ 3
ЗАДАЧНИЙ МАТЕРІАЛ МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

3.1. Умови та розв’язки завдань 44-ї ММО

Задача 1 (Бразилія). Нехай A – підмножина множини

$$S = \{1,2,..., 1000000\},$$

яка містить точно 101 елемент.

Доведіть, що в множині S існують такі елементи $t_1, t_2, ... ,t_{100}$, що жодні дві множини вигляду

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \quad j = 1,...,100,$$

не перетинаються [21; 61].

Розв’язання (М. Кацев). Розглянемо множину D, елементами якої є різниці чисел x і y, де $x \in A, y \in A$. Позначимо цю множину так:

$$D = \{x - y : x, y \in A\}.$$

Якщо числа x і y є різними, то за правилом добутку ми отримаємо $101 \cdot 100$ різниць, кожна з яких не дорівнює нулю. Якщо $x = y$, то елементом множини D буде число нуль. Таким чином, множина D містить щонайбільше 10101 елементів.

Нехай t_i і t_j – довільні елементи множини S. Якщо в множині A існують такі елементи x і y, що

$$t_i - t_j = x - y,$$

то число $(t_i - t_j) \in D$.

Зрозуміло, що перетин множин A_i та A_j не буде порожнім тоді й тільки тоді, коли число $t_i - t_j$ буде належати множині D.

Таким чином, ми повинні вибрати 100 елементів з множини S у такий спосіб, щоб будь-яка пара цих елементів не утворювала різницю, яка належить до множини S.

Тепер покажемо за індукцією, як саме можна вибрати ці 100 елементів. Перший елемент обираємо довільно. Далі припустимо, що k елементів, $k \le 99$, вже вибрано. Якщо елемент t вже вибрано, то будь-який елемент вигляду $r = t + d, d \in D$, вибрати не можна, інакше $r - t \in D$. Отже, за правилом добутку, отримаємо, що кількість чисел, які є забороненими при виборі ($k+1$)-го елемента дорівнює $k \cdot |D|$. Проте

$$k \cdot |D| \le k \cdot 10101 \le 99 \cdot 10101 = 999999\,.$$

Це означає, що ми можемо вибрати ($k+1$)-ий елемент, який задовольняє умову задачі [21; 62].

Задача 2 (Болгарія). Знайдіть усі пари натуральних чисел (a, b) таких, що

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

є натуральним числом [21; 61].

Розв'язання (В. Шепельська). Позначимо

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} = k,$$ де k – натуральне число.

Тоді

$$a^2 - 2ab^2k = -b^3k + k.$$

Подальші перетворення будуть ґрунтуватись лише на виділенні повних квадратів:

$$a^2 - 2ab^2k + b^4k^2 = b^4k^2 - 2b^2k \cdot \frac{b}{2} + \frac{b^2}{4} + k - \frac{b^2}{4},$$

$$\left(a - b^2k\right)^2 = \left(b^2k - \frac{b^2}{2}\right)^2 + k - \frac{b^2}{4},$$

$$\left(2a - 2b^2k\right)^2 = \left(2b^2k - b\right)^2 + 4k - b^2. \qquad (1)$$

Позначимо $m = 2a - 2b^2k.$ Далі розглянемо можливі випадки:

1. Нехай $4k-b^2=0$. Тоді (5) набуває вигляду:

$$m=2a-2b^2k=\pm(2b^2k-b).$$

а) Якщо $2a-2b^2k=b-2b^2k$, то $b=2a$, тобто $a=n$, $b=2n$.

Отже, пари натуральних чисел ($n,2n$) задовольняють умову задачі.

б) Якщо $2a-2b^2k=2b^2k-b$, то $2a=4b^2k-b$, звідки, з урахуванням того, що b є парним числом, отримаємо

$b=2n$, $2a=b^4-b$, $a=8n^4-n$

Отже, пари натуральних чисел $(8n^4-n,2n)$, $n\in N$, можуть задовольняти умову задачі. Перевіркою впевнюємося, що це саме так.

2. Нехай $4k-b^2>0$. Тоді $m^2\geq(2b^2k-b+1)^2$ і

$$4k-b^2=m^2-(2b^2k-b)^2\geq(2b^2k-b)+1,$$

або

$$4k(b^2-1)+(b-1)^2\leq 0,$$

звідки $b=1$. Якщо $b=1,\dfrac{a^2}{2ab^2-b^3+1}=\dfrac{a}{2}$, звідки $a=2n$. Отже, пари $(2n,1)$ також задовольняють умову задачі.

3. Нехай $4k-b^2<0$. Тоді $m^2\leq(2b^2k-b-1)^2$ і

$$4k-b^2=m^2-(2b^2k-b)^2\leq(2b^2k-b-1)^2-(2b^2k-b)^2,$$

або

$$(4k-1)b^2-2b+4k-1\leq 0,$$

остання нерівність відносно b не має розв'язків.

Таким чином, умову задачі задовольняють три серії:

$(2n,1)$, $(n,2n)$, $(8n^2-n,2n)$, де $n\in N$ [21; 64 – 65].

Задача 3 (Польща). Дано опуклий шестикутник, у якому відношення відстані між серединами будь-яких двох протилежних сторін до суми довжин цих сторін дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Доведіть, що всі кути шестикутника є рівними. (Опуклий шестикутник *ABCDEF* має три пари протилежних сторін – *AB* і *DE*, *BC* і *EF*, *CD* і *FA*) [21; 61].

Розв'язання. Спочатку доведемо наступну лему.

Лема 1. Нехай маємо трикутник *PQR*, у якого $\angle QPR \geq 60°$ і точка L є серединою *QR*. Тоді нерівність $PL \leq \frac{\sqrt{3}}{2} QR$ перетворюється на рівність тоді й тільки тоді, коли трикутник *PQR*, є рівностороннім.

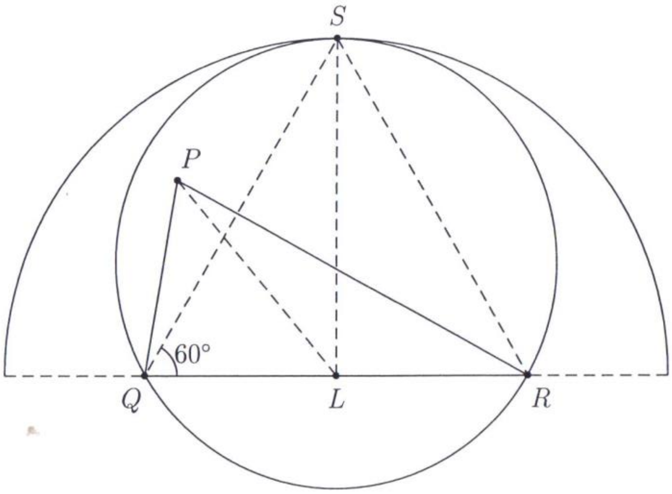


Рис.3.1. Зображення точки *P* яка лежить всередині кола

Доведення. Нехай *S* — вершина рівностороннього трикутники *QSR* і точка *P* лежить в одній півплощині відносно прямої *QR*. Тоді точка *P* лежить всередині кола, описаного навколо трикутника *QRS*. Проведемо коло з центром в точці *L*, радіус якого дорівнює *SL*. Тоді

$$PL \leq SL = QL \cdot tg 60° = \frac{1}{2} QR \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} QR$$

Лему доведено.

Головні діагоналі опуклого шестикутника утворюють трикутник, який може бути й виродженим. Таким чином, ми можемо вибрати дві з трьох діагоналей, що утворюють кут не менше за 60°. Не обмежуючи загальності міркувань, ми можемо вважати, для діагоналей *AD* і *BE* даного шестикутника *ABCDEF* $\angle APB \geq 60°$, де *P* — точка перетину цих діагоналей. Тоді, використовуючи лему, отримаємо:

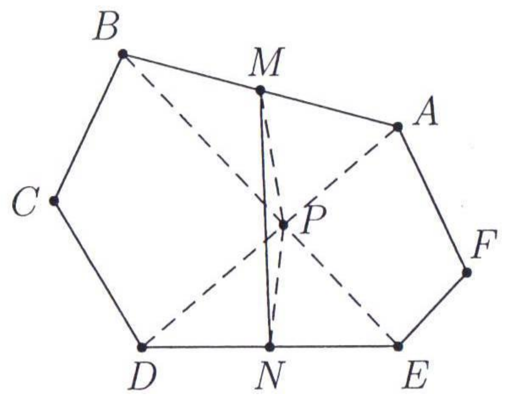


Рис.3.2. Опуклий шестикутник

$$MN = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) \geq$$
$$\geq PM + PN \geq MN,$$

де *M* і *N* є серединами *AB* і *DE* відповідно. Таким чином, з леми випливає, що трикутники *ABP* і *DEF* є рівносторонніми.

Далі зауважимо, що діагональ *CF* утворює кут більший або рівний 60° з однією з діагоналей *AD* і *BE.* Не зменшуючи загальності міркувань, можна припустити, що $\angle AQF \geq 60°$, де *Q* — точка перетину *AD* і *CF*. Міркуючи цілком аналогічно, як і вище, доводимо, що трикутники *AQF* і *CQD* є рівносторонніми.

Звідси випливає, що $\angle BRC \geq 60°$, де *R* є точка перетину *BE* і *CF*. Використовуючи ті самі міркування втретє, отримаємо, що трикутники *BCR* і *EFR* є рівносторонніми.

Отже, твердження задачі повністю доведено. Зауважимо, що конфігурацію, про яку йдеться в задачі, можна отримати, якщо в рівносторонньому трикутнику відрізати «кути» з однаковими висотами [6; 92].

Задача 4 (Фінляндія). Чотирикутник *ABCD* є вписаним у коло. Нехай *P*, *Q*, *R* – основи перпендикулярів, проведених з точки *D* до прямих *BC*, *CA*, *AB* відповідно. Доведіть, що *PQ* = *QR* тоді й тільки тоді, коли бісектриси кутів *ABC* та *ADC* перетинаються в точці, яка належить *AC* [21; 61].

Розв'язання (Т. Щербина). За теоремою Симпсона точки P, *Q*, *R* лежать на одній прямій. За теоремою Менелая для трикутника *BRP*, маємо, що

$$\frac{RQ}{PQ}\cdot\frac{PC}{BC}\cdot\frac{BA}{RA}=1 \qquad (2)$$

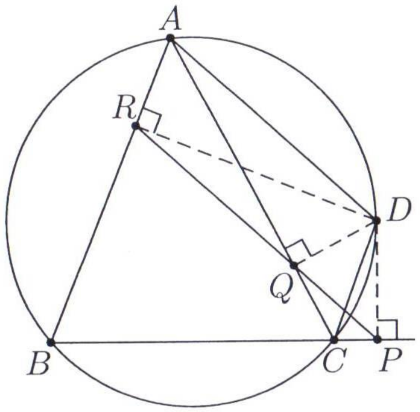


Рис.3.3. Чотирикутник ABCD вписаний в коло

Чотирикутник $ADRQ$ є вписаним в коло радіуса $R_1=\frac{AD}{2}$. Тому за теоремою синусів

$$AR = AD\cdot\sin\angle RQA \qquad (3)$$

Чотирикутник $DQCP$ є вписаним в коло радіуса $R_2=\frac{DC}{2}$. Тому

$$CP = DC\cdot\sin\angle CQP, \qquad (4)$$

$\varphi=\angle RQA=\angle CQP$ (як вертикальні). Підставляючи (3) і (4) у (2), дістанемо

$$\frac{CP}{AR}\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\frac{RQ}{QP}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BC}\cdot\frac{RQ}{QP}=1,$$

звідки

$$\frac{PQ}{QR}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{DC}{AD}.$$

Таким чином, $RQ=QR$ тоді й тільки тоді, коли $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Насамкінець зауважимо, що бісектриси кутів ABC і ADC ділять AC у відношенні $\frac{AB}{BC}$ і $\frac{AD}{DC}$ відповідно.

Розв'язання (Г. Добровольська). За теоремою Симпсона точки P, Q, R лежать на одній прямій. Оскільки $\angle DPC=\angle DQC=90^\circ$, то точки D, P, Q, C лежать на одному колі, а тому $\angle DCA=\angle DPQ=\angle DPR$. Аналогічно, точки D, Q, R, A лежать на одному колі, а тому $\angle DAC=\angle DRP$. Таким чином, $\Delta DCA\sim\Delta DPR$. Далі у такий самий спосіб доводимо, що $\Delta DAB\sim\Delta DQP$ і $\Delta DBC\sim\Delta DRQ$. Тоді

$$\frac{DA}{DC}=\frac{DR}{DP}=\frac{DB\cdot\dfrac{QR}{BC}}{DB\cdot\dfrac{PQ}{BA}}=\frac{QR}{PQ}\cdot\frac{AB}{BC}$$ [21; 68].

Задача 5 (Ірландія). Нехай n – натуральне число, і нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – дійсні числа, які задовольняють умову

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n .$$

а) Доведіть, що

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 .$$

б) Доведіть, що рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є членами арифметичної прогресії [21; 62].

Розв'язання (Д. Гордон). Оскільки обидві частини нерівності не змінюються при одночасному додаванні до всіх змінних x_i будь-якого числа, то можна, не втрачаючи загальності міркувань, вважати, що

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 . \qquad (5)$$

Маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i - x_j\right| = 2\sum_{i>j}(x_i - x_j) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i \qquad (6)$$

Застосовуємо нерівність Коші-Буняковського, дістанемо:

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \le 4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 .$$

За індукцією доводимо, що

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2 = \frac{n(n^2-1)}{3} \qquad (7)$$

Тоді

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \le \frac{4}{3}n(n^2-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^2 . \qquad (8)$$

З іншого боку маємо

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2 = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j + n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n} x_i^2. \qquad (9)$$

Тепер, з урахуванням (9), нерівність (8) набуває вигляду

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2 \le \frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_i - x_j\right)^2.$$

Таким чином, перший пункт задачі доведено.

Якщо нерівність перетворюється на рівність, то $x_i = k(2i-n-1)$ для деякої сталої $k, x_{i+1} - x_i = 2k = d, i = 1,...,n-1$, тобто $x_1, x_2, ..., x_n$ утворюють арифметичну прогресію.

З іншого боку, припустимо, що $x_1, x_2, ..., x_n$ є членами арифметичної прогресії з різницею d. Тоді не втрачаючи загальності

$$x_i = \frac{d}{2}(2i-n-1) \text{ і } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,$$

звідки випливає рівність [21; 69 – 70].

Задача 6 (Франція). Нехай p є простим числом. Доведіть, що існує таке просте число q, що для кожного цілого числа n число $n^p - p$ не ділиться на q [21; 62].

Розв 'язання. Оскільки

$$\frac{p^p - 1}{p-1} = 1 + p + p^2 + ... + p^{p-1} \equiv p + 1 \pmod{p^2},$$

то можна отримати щонайменше один простий дільник $\frac{p^p-1}{p-1}$, який не є конгруентним одиниці за модулем p^2.

Позначимо такий простий дільник через q. Покажемо, що q є тим простим числом, яке ми шукаємо. Припустимо, що існує $n \in N$ таке, що

$$n^p \equiv p \pmod{q}.$$

Тоді будемо мати

$$n^{p^2} \equiv p^p \equiv 1 \pmod q.$$

згідно означення q. З іншого боку, за малою теоремою Ферма $n^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, тому що q є простим. Оскільки $q-1$ не ділиться на p^2, то p ділиться на найбільший спільний дільник p^2 та $q-1$, звідки випливає, що $n^p \equiv 1 \pmod q$. Отже, $p \equiv 1 \pmod q$. Проте звідси випливає, що $1+p+...+p^{p-1} \equiv p \pmod q$. Згідно означення q, звідси випливає, що $p \equiv 0 \pmod q$. Суперечність.

Зауваження 1. Аналізуючи задачу, напевне, можна прийти до ідеї, що q повинно мати вигляд $pk + 1$. Тоді якщо знайдеться n таке, що

$$n^p \equiv 1 \pmod q, \text{ то } p^k \equiv 1 \pmod q,$$

тобто

$$p^k \neq 1 \pmod q \Rightarrow \text{ для всіх } nn^p \neq p \pmod q$$

Таким чином, потрібно знайти таке q. Ці спостереження цілком природно дозволяють прийти до ідеї, що q є простим дільником p^p-1 [6; 101].

3.2. Умови та розв'язки завдань 45-ї ММО

Задача 1 (Румунія). Нехай ABC – гострокутний трикутник, в якому $AB \neq AC$. Коло з діаметром BC перетинає сторони AB і AC в точках M і N відповідно. Позначимо через O середину сторони BC. Бісектриси кутів BAC і MON пертинаються в точці R. Доведіть, що кола , описані навколо трикутників BMR і CNR мають спільну точку, яка лежить на стороні BC.

Розв'язання (Р. Чепляка). Нехай бісектриса $\angle BAC$ перетинає сторону BC в точці L. Доведемо що точка L є спільною точкою кіл, описаних навколо трикутників BMR та CNR. Оскількі $\angle BLA$ є зовнішнім кутом ΔALC при вершині L і AL – бісектриса $\angle BAC$, то

$$\angle BLA = \angle LAC + \angle LCA = \frac{1}{2}\angle A + \angle C . \qquad (1)$$

Зазначимо, що точка R лежить на колі, описаному навколо ΔAMN. Справді, точка R належить бісектрисі $\angle MAN$ в трикутнику AMN. З іншого боку, оскільки $MO = ON$ (як радіуси), то в ΔMON бісектриса є водночас і висотою і медіаною, а отже бісектриса $\angle MON$ лежить на серединному перпендикулярі відрізка MN. Таким чином, в ΔAMN бісектриса $\angle MAN$ і серединний перпендикуляр відрізка MN перетинаються в точці, яка є серединою дуги MN, що не містить точку A. Залишилося зауважити, що $AM \neq AN$. Дійсно, $\angle AMN = \angle C, \angle MNA = \angle B$, бо чотирикутник $BMNC$ є вписаним. За умовою $\angle B \neq \angle C$, отже $\angle AMN \neq \angle MNA$, тобто $AM \neq AN$. Звідси випливає, що середина дуги MN є єдиною спільною точкою бісектриси $\angle MAN$ і серединного перпендикуляра до відрізка MN, тобто збігається з точкою R. Отже, чотирикутник $AMRN$ є вписаним.

Оскільки $\angle MAN$ є гострим, AR – бісектриса, що лежить між AM та AN, то точки R і N лежать в одній півплощині відносно прямої AM. Тоді маємо за властивістю кутів, що спираються на одну й ту саму дугу

$$\angle MRA = \angle MNA = 180° - \angle MNC = \angle B , \qquad (2)$$

бо $BMNC$ – вписаний чотирикутник.

Оскільки $\angle BMR$ є зовнішнім кутом для ΔAMR при вершині M, то згідно (2) маємо.

$$\angle BMR = \angle MAR + \angle MRA = \frac{1}{2}\angle A + \angle MRA = \frac{1}{2}\angle A + \angle B .$$

Беручи до уваги (1), дістанемо

$$\angle BMR + \angle BLR = \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle B\right) + \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle C\right) = \angle A + \angle B + \angle C = 180° .$$

Таким чином, чотирикутник $BLRM$ є вписаним. Аналогічно, для чотирикутника $CLRN$ маємо:

$$\angle CLA = \angle LAB + \angle LBA = \frac{1}{2}\angle A + \angle B = \angle CLR ;$$

$$\angle CNR = \angle NAR + \angle NRA = \frac{1}{2}\angle A + \angle NMA = \frac{1}{2}\angle A + \angle C .$$

Тоді $\angle CLR + \angle CNR = \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle B\right) + \left(\frac{1}{2}\angle A + \angle C\right) = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, а тому чотиракутник $CNRL$ також є вписаним. Це означає, що кола, описані навколо трикутників BMR і CNR мають спільну точку L, яка лежить на відрізку BC.

Задача 2 (Республіка Корея). Знайдіть всі многочлени $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами, які задовольняють рівність

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

для всіх дісних чисел a, b, c таких, що $ab + bc + ca = 0$.

Розв'язання (О. Цимбалюк). Доведемо спочатку, що $P(x) = x^2$ задовольняє рівність

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c) \qquad (3)$$

для всіх дісних чисел a, b, c таких, що

$$ab + bc + ca = 0. \qquad (4)$$

Справді,

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 =$$

$$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2(ab + bc + ac) = 2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (5)$$

$$2P(a+b+c) = 2(a+b+c)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ac) = 2(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (6)$$

З рівностей (5) і (6) випливає рівність (3).

Доведемо тепер, що $P(x) = x^4$ задовольняє рівність (3). Нехай $x = a - b, y = b - c, z = c - a$. Тоді $x^2 + y^2 + z^2 = 2(a+b+c)^2$ і оскільки $x + y + z = 0$, то бажана рівність випливає з наступних перетворень

$$xy + yz + zx = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = -(a+b+c)^2,$$

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2 = (xy + xz + yz)^2 - 2xyz(x + y + z) = (a+b+c)^4,$$

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2((xy)^2 + (yz)^2 + (xz)^2) = 2(a+b+c)^4.$$

Оскільки многочлени x^2 і x^4 задовольняють рівність (3), то і будь-яка їх лінійна комбінація також буде задовольняти рівність (3). Це означає, що розв'язком (3) будуть многочлени вигляду

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4, \qquad (7)$$

де α, β-довільні дійсні числа.

Нарешті доведемо, що інших розв'язків не існує.Очевидно, що коли $P(x) = c = const$, то $3c = 2c$, звідки $c = 0$, тобто $P(x) = 0x^2 + 0x^4$. Для будь-якого дійсного числа x трійка $(a,b,c) = (6x, 3x, -2x)$ задовольняє умову (4). Для $a = 6x, b = 3x, c = -2x$ рівність (3) набуває вигляду

$$P(3x) + P(5x) + P(-8x) = 2P(7x) \qquad (8)$$

для всіх дійсних x.

Нехай $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ - дісні числа, де $a_n \neq 0$, і $n \neq 0,2,4$.

Тоді, порівнюючи коофіцієнти при однакових степенях x в (6), дістанемо

$$(3^i + 5^i + (-8)^i - 2 \cdot 7^i)a_i = 0, \; i = 0,1,...,n \qquad (9)$$

Для непарних i множник в дужках є від'ємним і додатнім для $i = 0$.Якщо $i = 2k$, то маємо рівність

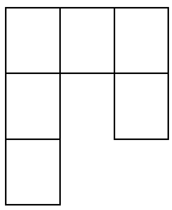
$$3^{2k} + 5^{2k} + 8^{2k} = 2 \cdot 7^{2k} \qquad (10)$$

звідки $8^{2k} < 2 \cdot 7^{2k}$. Проте $8^{2k} > 2 \cdot 7^{2k}$ вже при $k = 3$, а отже і при $k > 3$, що суперечить (10).

Таким чином, множник при a_i є додатним при всіх парних $i \geq 6$.Лише при $i = 2, i = 4$ цей вираз дорівнює нулеві.

Відповідь: $P(x) = \alpha x^2 + \beta x^4$, де α, β - дійсні числа.

Задача 3 (Естонія). Назвемо *гачком* фігуру, яка складається з 6 клітинок, як показано на рисунку,

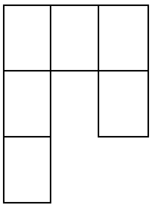


а також будь-яку фігуру, яку можна отримати з неї за допомогою поворотів та перевертань.

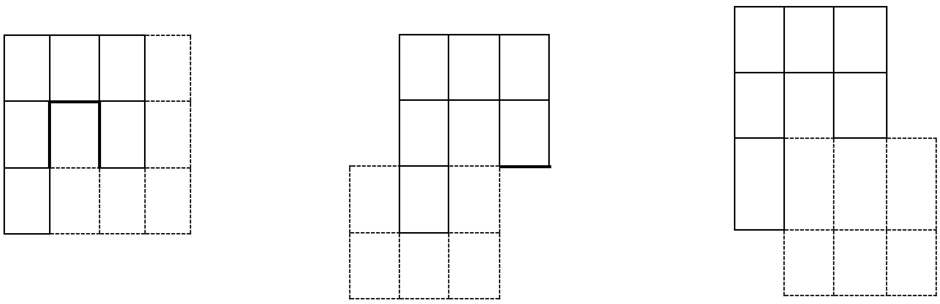
Знайдіть всі прямокутники $m \times n$, які можна зомостити гачками так, щоб:

- прямокутник повністю був накритий без прогалин і накладань;
- гачки не повинні воходити за межі прямокутника.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник П розміром $m \times n$, покриття якого гачками (якщо воно існує) задовольняє умову задачі.



Для кожного гачка Г розглянемо гачок Г` (будемо його називати доповнюючим до Г), якщо він містить клітинку позначену зірочкою. Кожний гачок Г має доповнюючий, бо якщо гачок Г лежить в прямокутнику, то клітинка позначена зірочкою теж лежить в прямокутнику, бо він опуклий, а тому є накритою яким-небудь гачком. Оскільки у клітинки позначеною зірочкою для деякого гачка Г є лише одна сусідня клітинка не накрита данним гачком, то в доповнюючому гачкові клітинка позначена зірочкою може виявитися клітинкою з номером 1 або з номером 2. (усі інші клітинки гачка Г мають по дві сусідні клітинки, що належать цьому гачку). Розглянувши для клітинок з номерами 1 та 2 всі вісім можливих поворотів і перевертань гачка, отримаємо три можливих варіанти розміщення доповнюючого гачка.



(1) (2) (3)

Варіант (3) є неможливим, бо клітинка позначена хрестиком не є накритою і вже не може бути накритою жодним гачком. Таким чином, якщо існує покриття прямокутника $m \times n$ гачками, то всі гачки розбиваються на пари, бо якщо гачок Г` є доповнюючим до гачка Г, то і гачок Г є доповнюючим до гачка Г`. Об'єднавши пари доповнюючих гачків, отримаємо розбиття прямокутника $m\times n$ на прямокутники 3×4, та восьмикутні фігурки типу (2), з сторонами, що мають довжини 3,2,1,2,3,2,1,2.

Отже, прямокутник $m\times n$ можна замостити гачками тоді і тільки тоді, коли його можна замостити фігурками типу (1) і типу (2), кожна з яких накриває 12 клітинок розміру 1×1.

Припустимо, що таке покриття існує. Тоді добуток mn є числом, яке ділиться на 12. Покажемо, що одне з чисел m або n ділиться на 4. Припутимо супротивне. Нехай такий випадок не має місця. Тоді ж обидва числа m і n є парними, бо mn ділиться на 4. Будемо вважати, що прямокутник $m\times n$ розбито на квадратні клітинки з стороною 1 та занумеруємо його рядки числами від 1 до m, а стовпчики числами від 1 до n. Будемо записувати 1 в клітинку i, j, якщо точно одне з чисел i або j ділиться на 4, та будемо записувати 2, якщо обидва числа i, j діляться на 4. Оскільки число клітинок в кожному рядку та в кожному стовпчику є парним, то сума всіх записаних чисел є парним числом. Тепер легко переконатися, що прямокутник 3×4 завжди накриває числа, сума яких дорівнює 3 або 7, а восьмикутна фігурка типу (2) завжди накриває числа , сума яких дорівнює 5 або 7. Таким чином, загальне число 12-клітинкових фігурок, що накривають прямокутник $m\times n$, є парним. Але тоді добуток mn ділиться на 24, а отже на 8, що суперечить припущенню про те , що m і n не діляться на 4. Зауважимо, що ні m, ні n не можуть дорівнювати 1,2,5 (будь-які спроби розмістити фігурки типу (1) або (2) вздовж сторони довжиною 1,2 або 5 не можуть мати успіху). Звідси приходимо до висновку, що покриття можливе тоді, коли одне з чисел m і n ділиться на 3, а інше на 4, та $m,n\notin\{1,2,5\}$. Тепер, навпаки, якщо ці умови виконуються то покриття є можливим з використанням лише прямокутників розміром 3×4. Це, очевидно, коли $m\vdots 3, n\vdots 4$, або навпаки. Нехай $m\vdots 12$ і $n\notin\{1,2,5\}$ або навпаки. Тоді n можна подати у вигляді $n = 4k + 3t, k \geq 0, t \geq 0$. Звідси випливає , що прямокутник $m \times n$ можна розбити на прямокутники $m \times 3$ та $m \times 4$, які легко покрити використовуючи знову лише прямокутники 3×4.

Задача 4 (Республіка Корея). Нехай $n \geq 3$ – натуральне число і нехай $t_1, t_2, ..., t_n$

додатні дійсні числа такі, що

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + ... + \frac{1}{t_n}\right).$$

Доведіть, що t_i, t_j, t_k є довжинами сторін трикутника для всіх i, j, k таких, що $1 \leq i < j < k \leq n$.

Розв'язання (В. Кузнєцов). З міркуваннь симетрії досить довести, що

$$t_1 < t_2 + t_3. \tag{11}$$

Маємо

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = \left(\sum_{i=1}^{3} t_i\right) \cdot \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{t_i} + \sum_{j=4}^{n}\left(\frac{t_1}{t_j} + \frac{t_j}{t_1}\right) + \sum_{j=4}^{n}\left(\frac{t_2}{t_j} + \frac{t_j}{t_2}\right) + \sum_{j=4}^{n}\left(\frac{t_j}{t_3} + \frac{t_3}{t_j}\right) + \left(\sum_{j=4}^{n} t_j\right)\left(\sum_{j=4}^{n} \frac{1}{t_j}\right)$$

.

Кожна з трьох сум $\sum_{j=4}^{n}\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right)$, $(i = 1,2,3)$, містить $n-3$ пари взаємнообернених чисел, а тому за нерівністю Коші дістанемо

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=4}^{n}\left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i}\right) \geq 3 \cdot 2(n-3) = 6n - 18$$, а також

$$\left(\sum_{j=4}^{n} t_j\right)\left(\sum_{j=4}^{n} \frac{1}{t_j}\right) \geq (n-3) \cdot \sqrt[n-3]{t_4 ... t_n} \cdot (n-3) \cdot \sqrt[n-3]{\frac{1}{t_4 ... t_n}} = (n-3)^2.$$

Таким чином,

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + 6n - 18 + (n-3)^2,$$

звідки

$$\left(\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1}\right)+\left(\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}\right)+\left(\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}\right)<7\,. \qquad (12)$$

Отже, залишилося довести, що з нерівності (12) випливає нерівність (11). Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, що деякі t_i, t_j, t_k, не утворюють трикутника. Тоді можна перенумеровати наші числа так, щоб не утворювали трикутника числа t_1, t_2, t_3, причому $t_1 \geq t_2, t_1 \geq t_3$. Отже, нехай $t_1 \geq t_2 + t_3$. Тоді беручі до уваги, що функція $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ зростає на проміжку $[1;+\infty)$, дістанемо: $f\left(\dfrac{t_1}{t_2}\right) \geq f\left(\dfrac{t_2+t_3}{t_2}\right)$, бо $t_1 \geq t_2 + t_3$, а тому

$$\frac{t_1}{t_2}+\frac{t_2}{t_1} \geq \frac{t_2+t_3}{t_2}+\frac{t_2}{t_2+t_3}\,. \qquad (13)$$

Аналогічно, маємо

$$\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1} \geq \frac{t_2+t_3}{t_3}+\frac{t_3}{t_2+t_3}\,. \qquad (14)$$

Тепер, остаточно, отримаємо оцінку

$\left(\dfrac{t_1}{t_2}+\dfrac{t_2}{t_1}\right)+\left(\dfrac{t_1}{t_3}+\dfrac{t_3}{t_1}\right)+\left(\dfrac{t_2}{t_3}+\dfrac{t_3}{t_2}\right) \geq 2+\dfrac{t_2+t_3}{t_2+t_3}+2\left(\dfrac{t_2}{t_3}+\dfrac{t_3}{t_2}\right) \geq 7$ що суперечить (12).

Задача 5 (Польща). В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD не є бісектрисою ні кута ABC, ні кута CDA. Точка P, яку відмічено всередині чотирикутника $ABCD$, задовольняє умови:

$$\angle PBC = \angle DBA \text{ і } \angle PDC = \angle BDA.$$

Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є вписаним тоді і тільки тоді, коли $AP = CP$.

Розв'язання (Р. Чепляка). Нехай $ABCD$ – вписаний чотирикутник. Доведемо, що $AP = CP$. Позначимо через N другу точку перетину прямої PD з колом, через M другу точку перетину прямої PB з колом.

За умовою $\angle PBC = \angle DBA, \angle PDC = \angle BDA.$ Тоді $\angle DCA = \angle DBA = \angle PBC = \angle MBC = \ = 180^\circ - \angle MDC$, тобто $\angle DCA + \angle MDC = 180^\circ$, звідки випливає, що $MD \parallel AC$. Аналогічно, отримаємо $\angle BCA = \angle ADB = \angle PDC = \angle NDC = 180° - \angle NBC$, тобто $\angle BCA + \angle NBC = 180°$, звідки $NB \parallel AC$.

Таким чином, чотирикутник $MDBN$ є рівнобічною трапецією, діагоналі якої перетинаються в точці P. Звідси, легко бачити, що точка P лежить на діаметрі кола, який є перпендикулярним до AC, а тому $AP = CP$.

Тепер, навпаки, нехай $AP = CP$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ є вписаним. Опишемо навколо трикутника ABD коло і позначимо через M точку перетину цього кола і променя AP. Через N позначимо точку перетину CD та MB. Не зменшуючи загальності міркувань, будемо вважати, що точка M лежить в тій самій півплощині відносно AC, що й точка D. Оскільки чотирикутник $ABMD$ є вписаним, то $\alpha = \angle ADB = \angle AMB = \angle PDC.$ Тоді маємо $\angle PDN = \angle PMN = \alpha$, тобто чотирикутник $PNMD$ є вписаним, звідки $\angle DNP = \angle DMP = \beta$. Оскільки $\angle ABD = \angle DMA = \angle PBC = \beta$, то $\angle DNP = \angle PBC = \beta$, а отже чотирикутник $BCNP$, також є вписаним , звідки $\angle NPC = \angle NBC = \gamma$.

Візьмемо на продовженні DP за точку P довільну точку K, і покажемо , що $\angle APB = \angle CPK$. Якщо $N \in [DC]$, то $\angle APB$ є зовнішнім для ΔMPB, а тому

$$\angle APB = \angle MBP + \angle PMB = (\angle CBP - \angle CBN) + \alpha = \alpha + \beta - \gamma.$$

З іншого боку, $\angle CPK = \angle NPK - \angle CPN = (\alpha + \beta) - \gamma$, отже $\angle APB = \angle CPK$. Якщо N лежить на продовженні DC за точку C, то $\angle APB = \angle MBP + \angle PMB = (\angle CBP + \angle CBN) + \alpha = \alpha + \beta + \gamma.$

З іншого боку, $\angle CPK = \angle NPK + \angle CPN = (\alpha + \beta) + \gamma$, тобто і в цьому випадку $\angle APB = \angle CPK$. Позначимо тепер через l-серединний перпендикуляр до AC. Легко бачити, що l є бісектрисою $\angle BPK$, а тому симетричним образом точки B відносно l буде точка $B' \in PK$. Тоді $AB = B'C$, а тому чотирикутник $ABB'C$ є вписаним. Трикутники $AB'P$ і CBP є симетричними відносно осі l ,а тому $\angle AB'P = \angle CBP,$ а тому $\angle AB'D = \angle AB'P = \angle CBP = \angle ABD = \beta$, тобто чотирикутник $ABB'D$ також є вписаним. Звідси випливає, що точки D і C, лежать на колі, описаному навколо трикутника ABB', тобто точки A, B, C, D належать одному колу, що й треба було довести.

Задача 6 (Іран). Назвемо натуральне число *смугастим*, якщо будь-які дві сусідні цифри в його десятковому запису мають різну парність.

Знайдіть всі натуральні n, для кожного з яких знайдеться смугасте число, яке ділиться на n.

Розв'язання. Якщо n ділиться на 20, то останні дві цифри його десяткового запису є парними, а тому для таких чисел не існує смугастого числа, яке ділиться на n. Якщо n не ділиться на 20, то існує смугасте число, яке ділиться на n. Доведемо це.

Будемо окремо розглядати степені двійки і числа вигляду $2\cdot 5^n$. В подальшому запис $u^k \parallel a$ буде означати найвищу степінь числа u, яка ділить a.

Лема 1. Для кожного числа вигляду 2^n, існує смугасте число, що містить парну кількість цифр і ділиться на 2^n.

Доведення. Достатньо побудувати нескінченну послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ десяткових цифр, таку, що $a_n \equiv n+1 (\mathrm{mod}\, 2); 2^{2n-1} \parallel \overline{a_{2n-1}...a_1}; 2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n}a_{2n-1...}a_1}$ для кожного n. Доведення наведемо за методом математичної індукції.

База індукції: $a_1 = 2, a_2 = 7$.

Крок індукції: припустимо, що шукана послідовність цифр побудована до a_{2n} включно. Тоді покладемо $a_{2n+1} = 4$. Оскільки за припущенням індукції $2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n}a_{2n-1...}a_1}$ і $2^{2n+2} \parallel 4\cdot 10^{2n}$, то

$$2^{2n+1} \parallel \overline{a_{2n+1}a_{2n...}a_1} = 4\cdot 10^{2n} + \overline{a_{2n}a_{2n-1...}a_1}.$$

Позначимо $\overline{a_{2n+1}a_{2n...}a_1} = 2^{2n+1}\cdot A$, де A – непарне. Тепер цифра a_{2n+2} повинна бути непарною і такою, що

$$2^{2n+3} \parallel \overline{a_{2n+2}a_{2n+1...}a_1} = a_{2n+2}\cdot 10^{2n+1} + \overline{a_{2n+1}a_{2n...}a_1} = 2^{2n+1}(a_{2n+2}\cdot 5^{2n+1} + A).$$

Тому непарну цифру a_{2n+2} виберемо з множини $\{0,1,...,7\}$ таким чином, щоб виконувалась умова $5\cdot a_{2n+2}+A\equiv 4(\mathrm{mod}\, 8)$. Тим самим побудову завершено.

<u>Лема 2.</u> Для кожного числа вигляду $2\cdot 5^n$, існує смугасте число, що містить парну кількість цифр і ділиться на $2\cdot 5^n$.

Доведення. Побудуємо за індукцією нескінченну послідовність $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ таку, що $b_n\equiv n+1(\mathrm{mod}\, 2)$ і $\overline{b_n...b_1} \vdots 2\cdot 5^n$ для кожного n.

База індукції: $b_1=0, b_2=5$.

Крок індукції: припустимо, що $b_1,b_2,...,b_n$ вже побудовано; нехай $5^m \,\|\, \overline{b_n...b_1}$, де $m\geq n$ і $B=\dfrac{\overline{b_n...b_1}}{5^m}$. Тоді наступна цифра b_{n+1} має бути такою, що $b_{n+1}\equiv n+2(\mathrm{mod}\, 2)$ і $\overline{b_{n+1}b_n...b_1}=b_{n+1}10^n+\overline{b_n...b_1}=5^n(b_{n+1}\cdot 2^n+5^{m-n}B)$ ділиться на 5^{n+1}. Остання умова буде виконуватися, якщо $b_{n+1}\cdot 2^n+B$ буде ділитися на 5. Але система одночасних конгруенцій $b_{n+1}\equiv n+2(\mathrm{mod}\, 2), b_{n+1}\cdot 2^n+B(\mathrm{mod}\, 5)$ на підставі китайської теореми про остачі має розв’язок, оскільки 2^n і 5 є взаємно простими. Потрібний розв’язок b_{n+1} можна вибрати з множини $\{0,1,...,9\}$.

Тепер перейдемо до розгляду загального випадку $n=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot k, (k,10)=1.$ Якщо n не ділиться на 20 то число $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$ є або степенем двійки , або степенем 5, або числом виду $2\cdot 5^{\beta}$. У всіх випадках, на підставі леми 1 та леми 2, існує парне смугасте число M, що містить парну кількість цифр $2m$ та ділиться на $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$. Зрозуміло, що всі смугасті числа вигляду $\overline{MMM...M}$ також діляться на $2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$. Доведемо, що деякі з них діляться також і на число n. Розглянемо числа вигляду $C_l=1+10^{2m}+...+10^{2m(l-1)}, l=1,2,...,k+1.$ Згідно з принципом Діріхле деякі два з них C_p і C_q, $p<q$,мають однакові остачі при діленні на k. Тобто різниця $C_q-C_p=C_{q-p}\cdot 10^{2mp}$ ділиться на k. Оскільки $(k,10)=1$, то C_{q-p} ділиться

на k. Звідси випливає, що число $C_{q-p}\cdot M$ є смугастим числом вигляду $\overline{MMM...M}$, яке ділиться на n [22; 65 – 77].

3.3. Умови та розв'язки завдань 46-ї ММО

Задача 1 (Румунія). На сторонах рівностороннього трикутника ABC відмічено шість точок A_1, A_2 на BC; B_1, B_2 на CA і C_1, C_2 на AB. Ці точки є вершинами опуклого шестикутника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, сторони якого мають однакову довжину. Доведіть, що прямі A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Нехай P – внутрішня точка трикутника ABC, причому така, що трикутник A_1A_2P є рівностороннім. Оскільки $A_1P \parallel C_1C_2$ і $A_1P = C_1C_2$, то $A_1PC_1C_2$ – ромб. Аналогічно $A_2PB_2B_1$ також є ромбом. Отже, трикутник C_1PB_2 – рівносторонній. Ї

Позначимо $\alpha = \angle B_2B_1A_1, \beta = \angle B_1A_2A_1, \gamma = \angle C_1C_2A_1$. Тоді α і β є зовнішніми кутами трикутника CB_1A_2 з $\angle C = 60°$, а тому $\alpha + \beta = 240°$. Легко бачити, що $\angle B_2PA_2 = 60°$ і $\angle C_1PA_1 = \gamma$.

Отже, $\alpha + \gamma = 360° - (\angle C_1PB_2 + \angle A_1PA_2) = 240°$, звідки $\beta = \gamma$.

Далі, зауважимо, що $\angle C_1B_1B_2 = \beta$. Таким чином, трикутники $A_1A_2B_1, B_1B_2C_1, C_1C_2A_1$ є рівними, а тому трикутник $A_1B_1C_1$ є рівностороннім. Звідси, випливає, що B_1C_2, A_1B_2, C_1A_2 є серединними перпендикулярами до сторін A_1C_1, C_1B_1, B_1A_1 трикутника $A_1B_1C_1$, а тому перетинаються в одній точці.

Задача 2 (Нідерланди). Нехай $a_1, a_2, \ldots$ – послідовність цілих чисел, яка містить нескінченно багато як додатних так і від'ємних членів. Відомо, що для кожного натурального n, всі n остач від ділення чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

на n є різними. Доведіть, що кожне ціле число зустрічається в цій послідовності рівно один раз.

Розв'язання (Р. Чепляка). Припустимо, що в послідовності $\{a_i\}$ деяке число зустрічається, принаймні, двічі. Тоді $a_i = a_j$, для деяких $i < j,\ i,\ j \in N$. Згідно з умовою, для $n = j$ числа $a_1,...,a_i,...,a_j$ дають різні остачі, проте $a_i \equiv a_j \pmod{n}$. Суперечність. Отже, всі числа $\{a_i\}$ є різними.

Далі для деякого натурального $n > 1$ розглянемо числа $a_1,...,a_n$. Позначимо через M – найбільше з них, через m – найменше.

Припустимо, що $M - m \geq n$. Зрозуміло, що $M - m \in N$. Розглянемо числа $a_1,...,a_{M-m}$. За умовою всі вони дають різні остачі за модулем $M - m$. Оскільки $M - m \geq n$, то серед цих чисел є числа m і M. Але ці числа дають рівні остачі за модулем $M - m$.(Різниця $M - m$ ділиться на модуль $M - m$) Суперечність. Отже, $M - m \leq n - 1$.

Припустимо тепер, що $M - m \leq n - 2$. Тоді $\forall i = \overline{1,n}$, $m \leq a_i \leq M \leq m + n - 2$, а тому a_i може набувати $n - 1$ значення: $m, m+1,...,m+n-2$.

Оскільки всього маємо n чисел $a_1,..a_n$, то за принципом Діріхле, принаймні, два з них повинні бути рівними.

Суперечність. Звідси $M - m \geq n - 1$. Оскільки $n - 1 \leq M - m \leq n - 1$, то $M - m = n - 1$.

Далі припустимо, що серед чисел $a_1,...,a_n$ немає числа k, $m \leq k \leq M = m + n - 1$.

Тоді, маємо n чисел $a_1,...,a_n$, кожне з яких може набувати $n - 1$ значення: $m, m+1,...,k-1, k+1,...,m+n-1$.

За принципом Діріхле два числа з набору $a_1,...,a_n$ мають бути рівними. Суперечність.

Таким чином доведено твердження: якщо числа $u, v \in \{a_1,...,a_n\}$, де $u < v$, то для будь-якого $s : u \leq s \leq v$ маємо $s \in \{a_1,..a_n\}$.

Насамкінець, покажемо, що довільне ціле число b належить послідовності $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.Оскільки всі члени послідовності $\{a_i\}$ є різними і серед них є нескінченно багато додатних, то існує $a_p > b$.

Аналогічно оскільки всі члени послідовності $\{a_i\}$ є різними і серед них є нескінченно багато від'ємних, то існує $a_q < b$. Позначимо $n = \max(p, q)$ і розглянемо множину $A = \{a_1, .. a_n\}$. Оскільки $a_p, a_q \in A,\ a_q < b < a_p$, то $b \in A$, а отже b є членом послідовності $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Зауважимо, що умова задачі є коректною – такі послідовності справді існують, наприклад, 0,1,-1,2,-2,3,-3,...

Задача 3 (Республіка Корея). Нехай $x, y, z -$додатні числа такі, що $xyz \geq 1$. Доведіть, що

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{z^5 - z^2}{x^2 + y^2 + z^5} \geq 0.$$

Розв'язання (С. Слободянюк). Дана нерівність є еквівалентною наступній нерівності:

$$\frac{3}{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{1}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^5 + z^2} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^5} \qquad (*)$$

Зауважимо, що коли ми доведемо нерівність (*) для всіх $x, y, z > 0$ і $xyz = 1$, то ми розв'яжемо нашу задачу і для випадку, коли $xyz = a^3 \geq 1$. Справді, якщо $xyz = a^3 \geq 1$, то покладемо $x = ax_1, y = ay_1, z = az_1$. Тоді x_1, y_1, z_1 є дійсні числа, для яких $y_1 x_1 z_1 = 1$. Залишилось зауважити, що

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}{x_1^{\ 5} a^3 + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}} \leq \frac{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}{x_1^{\ 5} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}},\ \text{і т.д.}$$

Тому надалі не зменшуючи загальності міркувань, будемо доводити нерівність (*) при умові $xyz = 1,\ x > 0, y > 0, z > 0.$

Нерівність (*) можна переписати ще так

$$3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^5+z^2)(x^2+y^2+z^5)\ge$$
$$\ge(x^2+y^2+z^2)((x^5+y^2+z^2)(x^2+y^5+z^2)+$$
$$+(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^5)+(x^2+y^5+z^2)(x^2+y^2+z^5))$$

Остання нерівність, після розкриття дужок і виконання очевидних перетворень, набуває вигляду:

$$x^9+y^9+z^9+x^3+y^3+z^3+2(x^7y^5+x^5y^7+z^7y^5+y^7z^5+x^7z^5+z^7x^5)\ge$$
$$\ge x^6+y^6+z^6+x^3y^3+z^3y^3+x^3z^3+(x^4y^2+y^4x^2+x^4z^2+z^4x^2+z^4y^2+y^4z^2)+$$
$$+(x^4y^5+y^4x^5+x^4z^5+z^4x^5+z^4y^5+y^4z^5) \qquad (1)$$

Позначимо $A=x^9+y^9+z^9+x^3+y^3+z^3$,

$$B=x^6+y^6+z^6+x^3y^3+z^3y^3+x^3z^3,$$

$$C=x^7y^5+x^5y^7+z^7y^5+y^7z^5+x^7z^5+z^7x^5,$$

$$D=x^4y^2+y^4x^2+x^4z^2+z^4x^2+z^4y^2+y^4z^2,$$

$$E=x^4y^5+y^4x^5+x^4z^5+z^4x^5+z^4y^5+y^4z^5.$$

Тоді маємо

$$A+2C\ge B+D+E. \qquad (2)$$

Тепер доведемо правильність наступних нерівностей

$A\ge B$ (3), $C\ge D$ (4), $C\ge E$ (5).

Застосувавши нерівність Коші та нерівність трьох квадратів, дістанемо

$$A=x^9+x^3+y^3+y^9+z^9+z^3\ge 2(x^6+y^6+z^6)=$$
$$=x^6+y^6+z^6+(x^3)^2+(y^3)^2+(z^3)^2\ge$$
$$\ge x^6+y^6+z^6+(xy)^3+(yz)^3+(zx)^3.$$

Таким чином нерівність (3) є правильною. Для доведення нерівності (4) скористаємось нерівностями Коші з вагами.

$$5(x^7y^5+x^5y^7)+x^7z^5+z^5x^7\ge 12\sqrt[12]{x^{72}y^{60}z^{12}}=12x^6y^5z=12x^5y^4,$$

$$5(x^7y^5+x^5y^7)+y^7z^5+z^5y^7\ge 12\sqrt[12]{x^{60}y^{72}z^{12}}=12x^4y^5$$

$$5(z^7y^5+z^5y^7)+y^7x^5+x^5y^7\ge 12z^4y^5$$

$$5(z^7y^5+z^5y^7)+z^7x^5+x^5z^7\geq 12y^4z^5$$

$$5(z^7x^5+z^5x^7)+z^7y^5+z^5y^7\geq 12z^5x^4$$

$$5(z^7x^5+z^5x^7)+x^7y^5+x^5y^7\geq 12z^4x^5.$$

Додавши останні нерівності, отримаємо, нерівність (4). Аналогічно доводиться і нерівність (5). Справді, застосувавши нерівність Коші з вагами, маємо

$$4(x^7y^5+x^5y^7)+2(x^7z^5+x^5z^7)\geq 12x^6y^4z^2=12x^4y^2.$$

Далі, з міркувань симетрії, отримаємо ще 5 нерівностей. Додаючи разом усі шість нерівностей, дістанемо нерівність (5). Таким чином, з нерівностей (3)-(5) випливає справедливість нерівності (1), а отже і нерівність (*), яка є еквівалентною вихідній нерівності.

Задача 4 (Польща). Послідовність $a_1, a_2, \ldots$ означена наступним чином :

$$a_n=2^n+3^n+6^n-1 \qquad (n=1,2,\ldots)$$

Знайдіть всі натуральні числа, які є взаємно простими з усіма членами цієї послідовності.

Розв'язання (В. Кузнєцов). Доведемо, що єдиним таким числом є 1. Зрозуміло, що 1 задовольняє умову задачі, бо $(1;a_n)=1, n\in N$. Для будь-якого іншого натурального числа $m>1$, візьмемо якесь просте число p, що ділить m $(p\,|\,m)$, і доведемо, що в послідовності знайдеться число a_i, що ділиться на p. Тоді будемо мати $(m;a_i)\,\vdots\, p$, $(m,a_i)\neq 1$, а тому виявиться, що m не є взаємно простим з a_i, тобто для $m>1$ умова не буде виконуватись. Таким чином, розв'язання задачі буде зводитись до розгляду простих чисел. Якщо $p=2, p=3$, то $a_2=48$, тобто $a_2\,\vdots\,2, a_2\,\vdots\,3$. Нехай тепер $p-$ просте число таке, що $(6;p)=1$, тобто $p>3$.

За малою теоремою Ферма маємо $2^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, і $3^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Звідки $(2^{p-1}+2)(3^{p-1}+3)\equiv(1+2)(1+3)\equiv 12\,(\mathrm{mod}\, p)$,

$$6(2^{p-2}+1)(3^{p-1}+1)\equiv 12\,(\mathrm{mod}\,p),\,6((2^{p-2}+1)(3^{p-1}+1)-2)\,\vdots\,p.$$

Оскільки $(6;p)=1$, то маємо, що число $a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1$ ділиться на p.

Таким чином ми справді довели, що для будь-якого простого числа p існує член послідовності, що ділиться на p.

Відповідь: $\{1\}$.

Задача 5 (Польща). Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, сторони BC і AD якого є рівними, але не паралельними. Нехай E і F – внутрішні точки на сторонах BC і AD відповідно такі, що $BE=DF$. Відомо, що прямі AC і BD перетинаються в точці P, прямі BD і EF перетинаються в точці Q, прямі EF і AC перетинаються в точці R. Розглянемо трикутники PQR, які утворені для всіх таких точок E і F. Доведіть, що кола, описані навколо всіх цих трикутників, мають спільну точку, відмінну від P.

Розв'язання (Р. Чепляка). Позначимо через L точку перетину серединних перпендикулярів до AC і BD (Рис.3.2.).

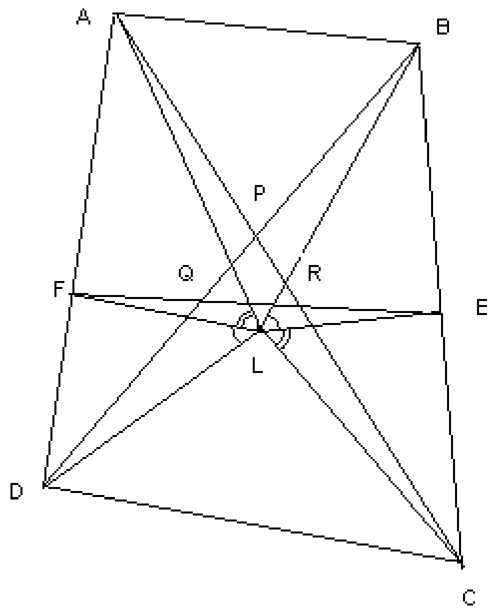


Рис.3.2. Опуклий чотирикутник

Доведемо, що описане коло трикутника PQR проходить через L. Оскільки $LA=LC, LB=LD$ і за умовою $AD=BC$, то $\Delta ADL=\Delta BLC$. Звідки $\angle ALD=\angle CLB=\varphi$. Розглянемо поворот навколо точки L, що переводить $A\to C, D\to B$. (Тобто переводить ΔALD в ΔCLB, такий поворот існує, бо трикутники рівні і однаково орієнтовані) Тоді $AD \to CB$ і оскільки $DF = BE$ то $F \to E$. Це означає, що $LE = LF$. Легко бачити, що $\Delta LFD = \Delta LEB$, бо $LD = LB, FD = BE.$

Оскільки $\angle ELB = \angle FLD$, то $\angle ELF = \angle DLB - \angle FLD + \angle BLE = \angle DLB.$ Оскільки $AD = BC, DF = BE$, то $AF = EC.$

Звідки $\Delta AFL = \Delta CEL$ за трьома сторонами. Маємо $\angle ALF = \angle CLE$, $\angle FLE = \angle ALC - \angle ELC + \angle ALF = \angle ALC.$ Отже, $\angle ELF = \angle ALC = \angle DLB.$

Звідси випливає, що рівнобедрені трикутники ELF, BLD, ALC є подібними, а тому $\angle LCA = \angle FEL = \angle LBD$. Легко бачити, що четвірка точок L, R, E, C є циклічною, а тому $\angle LRC = \angle LEC.$ Аналогічно, четвірка Q, B, E, L є циклічною, звідки $\angle LEC = \angle LQB$.

Таким чином, маємо $\angle LRC = \angle LEC = \angle LQB = \angle LQP$. Це означає, що четвірка точок P, Q, R, L є циклічною, що й треба було довести.

Зауваження 1.

Після того, як доведено подібність трикутників ELF, BLD, CLA можна було б завершити доведення ще й так: позначимо через K, N, M основи перпендикулярів, проведених з точки L до прямих EF, BD, AC відповідно. З огляду на подібність, про яку вже згадувалось вище маємо: $\frac{LO}{LE} = \frac{LN}{LB} = \frac{LM}{LC} = \lambda$ і $\angle ELK = \angle BLN = \angle CLM = \alpha$.

Таким чином, композиція повороту навколо точки L на кут α та гомотетії з центром в точці L та коефіцієнтом гомототеї λ переводить точки B, E, C відповідно в точки L, K, M. Звідси випливає, що точки L, K, M лежать на одній прямій. Тоді за теоремою про пряму Сімпсона (оберненою) маємо, що коло опиване навколо трикутника PQR проходить через точку L.

Зауваження 2. Точку, про яку йдеться в умові задачі, можна ідентифікувати як другу спільну точку кіл, описаних навколо трикутників BCP та DAP.

Задача 6 (Румунія). Учасникам математичної олімпіади було запропоновано 6 задач. Виявилось, що будь-які дві задачі розв'язали більше ніж 2/5 від загального числа учасників, але жоден учасник не розв'язав всі 6 задач. Доведіть, що знайдуться, принаймні, 2 учасника, кожен з яких розв'язав рівно 5 задач.

Розв'язання (С. Слободянюк). Зведемо нашу задача до випадку, коли кожний з учасників розв'язав хоча б 4 задачі. Для цього просто до розв'язків кожного з тих, хто розв'язав менше 4 задач, доповнимо необхідну кількість, щоб стало рівно 4. Умова задачі при цьому не зміниться.

Нехай кількість учасників – n.Розглянемо випадок, коли не існує учасника, я кий розв'язав 5 задач. Підрахуємо кількість пар задач яку розв'язав кожен з учасників. З одного боку вона рівна $6n$, бо кожен учасник розв'язав $C_4{}^2 = 6$ пар задач, а з іншого ця кількість більша за $6n$, бо кожна з 15 пар задач була розв'язана більше ніж $\frac{2n}{5}$ учасниками. Тобто загалом пар більше ніж $15 \cdot \frac{2n}{5} = 6n$. Отже, цей випадок неможливий.

Нехай є лише один учасник (назвемо його X), який розв'язав 5 задач, а їх номери(не обмежуючи загальності) 2,3,4,5,6. Введемо наступні позначення:

$A_{i,j}$ –множина учасників, що не розв'язали i–ту та j–ту задачі, $B_i = A_{i,i}$.

$C_{i,j}$ –множина тих, хто не розв'язав i–ту або j–ту задачу. $T_i = \sum_{j \neq i} |C_{i,j}|$. Кожен учасник крім X є лише в одній $A_{i,j}$, тому $\sum_{i<j} |A_{i,j}| = n-1$.

За умовою $|C_{i,j}| < \frac{3n}{5}$,

тому $|C_{i,j}| \le \frac{3n-1}{5}$, звідки $\sum_{i<j} |C_{i,j}| \le C_6^2 \frac{3n-1}{5} = 9n-3.$

Але оскільки кожен учасник крім X зустрічається в $C_{i,j}$ 9 раз, а X зустрічається в $C_{i,j}$ 5 раз, то $\sum_{i<j} |C_{i,j}| = 9n-4.$

Якщо $3n-1$ не ділиться на 5, то кожний $|C_{i,j}| \le \frac{3n-2}{5}$ і $\sum_{i<j} |C_{i,j}| \le 9n-6$, що неможливо. Отже, $3n-1$ ділиться на 5, і всі $|C_{i,j}| = \frac{3n-1}{5}$, крім одного C_{i_1,j_1}, що рівний $\frac{3n-1}{5} - 1.$

Покажемо, що виконується рівність $T_i = \begin{cases} 3|B_i| + 2n\ , & i = 1 \\ 3|B_i| + 2n - 1, & i \ne 1 \end{cases}$

Дійсно, $|C_{i,j}| = \begin{cases} \sum\limits_{k \ne i, k \ne j} (|A_{i,k}| + |A_{k,j}|) + |A_{i,j}|, & i \ne 1,\ j \ne 1 \\ \sum\limits_{k \ne i, k \ne j} (|A_{i,k}| + |A_{k,j}|) + |A_{i,j}| + 1, & i = 1 \textit{ або } j = 1 \end{cases}$,

тому розписуючи $T_i = \sum_{j \ne i} |C_{i,j}|$ за останньою формулою, маємо, що кожний $|A_{k,l}|(k \ne i, l \ne i)$ входить в T_i 2 рази, кожний $|A_{i,k}|(k \ne i)$ – 5 разів.

Зважаючи, що $|B_i| = \begin{cases} \sum\limits_{i \ne j} |A_{i,j}|, & i \ne 1 \\ \sum\limits_{i \ne j} |A_{i,j}| + 1, & i = 1 \end{cases}$ та $\sum_{i<j} |A_{i,j}| = n-1$ маємо шукану рівність.

Тепер $i_1 \ne j_1$. Тому, хоч одне з чисел i_1, j_1 не дорівнює одиниці.

Нехай це i_1. Тоді при $k \ne i_1,\ k \ne j_1,\ k \ne 1$ буде $T_{i_1} = \sum_{j \ne i_1} |C_{i_1,j}| = 3n-2 = 3|B_{i_1}| + 2n - 1$ і $T_k = \sum_{j \ne k} |C_{k,j}| = 3n-1 = 3|B_k| + 2n - 1$

.

Звідки $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 3), n \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$. Протиріччя.

Отже, і цей випадок неможливий [23; 49 – 60].

3.4. Умови та розв'язки завдань 47-ї ММО

Задача 1 (Республіка Корея). Точка I — центр вписаного кола трикутника ABC. Усередині цього трикутника вибрано таку точку P, що $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Доведіть, що $AP \geq AI$, причому рівність досягається тоді й тільки тоді, коли точка P співпадає з I.

Розв'язання (Я. Рагель). Будемо вважати без обмеження загальності, що $\angle ABP \geq \angle PBC$. Тоді $\angle BCP \geq \angle ACP$. Отже, матимемо:

$$\angle IBP = \angle ABP - \angle ABI = \angle ABP + \angle ACP - \angle ABI - \angle ACP =$$
$$= \angle CBP + \angle BCP - \angle ABI - \angle ACP = -\angle IBP + 2\angle ICP.$$

Таким чином, $\angle IBP = \angle ICP$, і точки B, C, P, I лежать на одному колі. Нехай W— друга точка перетину променя AI з описаним колом трикутника ABC. За відомою *теоремою про «тризуб»*, $BW = IW = CW$, звідки $WP = WI$. Далі, оскільки $AP + PW \geq AW = AI + IW$, то $AP \geq AI$. Якщо ж $AP = AI$, то точка P лежить на відрізку AW, і, зрозуміло, співпадає з точкою I.

Розв'язання *Радченка Данила* містило такий простий спосіб показати, що точка P лежить на описаному колі трикутника BCI: оскільки

$\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \angle B + \angle C$, то $\angle PBC + \angle PCB = 90° - \frac{1}{2}\angle A$, $\angle BPC = 90° + \frac{1}{2}\angle A = \angle BIC$. Подальші його міркування, так само як і в попередньому розв'язанні, спирались на *теорему про «тризуб»*.

Задача 2 (Сербія). Діагональ правильного 2006-кутника P називається добрим відрізком, якщо її кінці поділяють межу P на дві частини, кожна з яких містить непарну кількість сторін. Сторони P також вважаються добрими відрізками. Нехай P розбивається на трикутники 2003 діагоналями, жодні дві з яких не мають спільних точок усередині P. Яку найбільшу кількість рівнобедрених трикутників, кожен з яких має дві добрі сторони, може містити таке розбиття?

Розв'язання (*Н. Гончарук)*. Рівнобедрені трикутники з двома *добрими* сторонами, які входять до розглядуваної в умові тріангуляції, називатимемо *р-добрими.*

Лема. Нехай AB – одна з тих діагоналей, що бере участь у тріангуляції правильного 2006-кутника P, а L_{AB} – така частина його контуру з кінцевими точками A і B, яка містить n, $n<1003$, ланок. Тоді кількість *р-добрих* трикутників з усіма вершинами на L_{AB} не перевищує $\frac{n}{2}$.

Доведення *(за індукцією).* Для $n=2$ твердження є очевидним. Нехай $2<n\leq 1003$, і припустимо, що твердження справджується для ламаної, яка складається з $k<n$ ланок. Розглянемо тепер нашу ламану L_{AB} (що складається з n ланок) і всілякі *р-добрі* трикутники з усіма вершинами на L_{AB} (якщо ж там таких трикутників узагалі немає, то, зрозуміло, немає чого й доводити). Нехай відрізок PQ є найдовшою діагоналлю, що стала стороною такого трикутника PQS. Будемо вважати, що вершина P лежить на тій частині ламаної L_{AB}, що обмежується точками A і S. Отже, ламана L розбивається на частини L_{AP}, L_{PS}, L_{SQ}, L_{QB} (перша й остання можуть бути виродженими). Кожен з розглядуваних *р-добрих* трикутників (крім трикутника PQS), вписаних у ламану L_{AB}, як нескладно зрозуміти, має бути вписаним до одної з чотирьох зазначених вище частин. Застосуємо до кожної з них припущення індукції і врахуємо, що ламані L_{PS} і L_{SQ} містять непарну кількість ланок. Отже, кількість *р-добрих* трикутників (без урахування трикутника PQS) не перевищує $\frac{n}{2}-1$. Цим доведення леми завершується.

Нехай XY – найдовша діагональ тріангуляції (якщо таких декілька, то беремо будь-яку з них). Через L_{XY} позначимо ламану з кінцями X і Y (ця ламана складається не більше, ніж з 1003 ланок). Нехай XYZ – такий трикутник тріангуляції, що вершина Z не належить L_{XY}. Залишається тільки застосувати доведену лему до L_{XY}, L_{YZ}, L_{ZX} і врахувати, що якщо трикутник XYZ є *p-добрим,* то отриманої оцінки «вистачить» і для нього. Легко навести приклад тріангуляції з 1003 *p-добрими* трикутниками: для цього треба розглянути правильний 1003-кутник, який утворюється, якщо вершини P сполучити послідовно «через одну» (який, у свою чергу, тріангулюється вже довільним чином).

Задача 3 (Ірландія). Визначте найменше дійсне число M таке, що нерівність

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \le M(a^2+b^2+c^2)^2$$

виконується для будь-яких дійсних чисел $a,\ b\ i\ c$.

Розв'язання (В. Медвідь). Вихідну нерівність запишемо у вигляді

$$\left|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)\right| \le M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Беручи $a=\sqrt{2}-3, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{2}+3$, ми отримаємо, що $M=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$. Покажемо, що наша нерівність справджується з $M=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ для будь-яких дійсних чисел a, b і c. Це, як нескладно переконатися, буде випливати з наступних двох допоміжних нерівностей.

Лема: Для всіх дійсних a,b і c має місце нерівність

$$((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)^3 \ge 54(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.$$

Доведення: Доводжувана нерівність є симетричною, а тому вважатимемо, що $a \ge b \ge c$. Нехай $m=a-b,\ n=b-c$. Тоді

$$(m^2+n^2+(m+n)^2)^3 \ge \left(\frac{(m+n)^2}{2}+(m+n)^2\right)^3 = \frac{27}{8}(m+n)^6 \ge$$

$$\frac{27}{8}(2\sqrt{mn})^4(m+n)^2 = 54m^2n^2(m+n)^2.$$

Лему доведено.

Лема: Для всіх дійсних a,b і c має місце нерівність

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge \frac{16}{9}|a+b+c|\sqrt{\frac{\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)^3}{27}}.$$

Доведення: Нехай $p=a+b+c, y=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Тоді

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{(y+p^2)}{9} = \frac{\left(\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+\frac{y}{3}+p^2\right)^2}{9} \ge \frac{\left(4\cdot\sqrt[4]{\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot\frac{y}{3}\cdot p^2}\right)}{9} =$$
$$=\frac{16}{9}|a+b+c|\sqrt{\frac{y^3}{27}}$$

Лему доведено.

Розв'язання (*метод множників Лагранжа*). Можна вважати, що $a \ge b \ge c$ і знаходити найбільше значення виразу $|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)|$ за умови $a^2+b^2+c^2=1$. Або ж, після очевидної заміни змінних, – найбільше значення функції $f(x,y,z)=xyz(x+y)$ на компактній множині

$$M=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2+(x+y)^2=3, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}.$$

Найбільше значення функції f на множині M існує (за теоремою Веєрштрасса) і, очевидно, є числом додатним, а тому слід дослідити на звичайний екстремум функцію Лагранжа $f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2+(x+y)^2-3)$ в області $\{(x,y,z)|x>0, y>0, z>0\}$. Одержимо систему

$$\begin{cases} yz(2x+y)=2\lambda(2x+y), \\ xz(2y+x)=2\lambda(2y+x), \\ xy(x+y)=2\lambda z. \end{cases}$$

Звідки $x=y, z=2x^2, x=y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, z=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Подальше є зрозумілим.

Нарешті, розглянемо й цілком прозорий «геометричний» підхід до цієї задачі, який вимагає тільки навичок просторового уявлення та володіння початковими відомостями з аналітичної геометрії.

Розв'язання. У координатному декартовому просторі $Oabc$ розглянемо площини $\alpha: a-b=0$, $\beta: b-c=0$, $\gamma: c-a=0$, $\delta: a+b+c=0$. Треба знайти найбільше значення виразу $|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)|$ на сферичному двокутнику $\Omega=\{(a,b,c)\big|a^2+b^2+c^2=1, a\ge b\ge c\}$. Така задача еквівалентна знаходженню найбільшого значення добутку

$\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)$ для $M\in\Omega$ (тут через ρ позначається відстань від точки *M* до відповідної площини). Легко обґрунтувати, що найбільше значення досягається на бісекторі двогранного кута

$\{(a,b,c)\big|a\ge b\ge c\}$, і при цьому $\rho(M;\alpha)=\rho(M;\beta)=\frac{1}{2}\rho(M;\ell)$ (тоді тут

$\rho(M;\ell)=\rho(M;\gamma)$ – відстань від точки *M до* прямої $\ell: a=b=c$). Далі, враховуючи, що $(\rho(M;\delta))^2+(\rho(M;\ell))^2=1$, маємо:

$$\left(\rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)\right)^2=\left(\rho(M;\delta)\right)^2\cdot\frac{1}{4}\left(\rho(M;\ell)\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{4}\left(\rho(M;\ell)\right)^2\cdot\left(\rho(M;\ell)\right)^2=\frac{27}{16}\left(\rho(M;\delta)\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\rho(M;\ell)}{\sqrt{3}}\right)^2\le\frac{27}{16}\left(\frac{\left(\rho(M;\delta)\right)^2+\left(\rho(M;\ell)\right)^2}{4}\right)^4=\frac{27}{4^6}$$

Таким чином, для $M\in\Omega, \rho(M;\alpha)\cdot\rho(M;\beta)\cdot\rho(M;\gamma)\cdot\rho(M;\delta)\le\frac{3\sqrt{3}}{64}$, причому, зрозуміло, таке значення досягається (нескладно визначити

$a=\frac{2\sqrt{2}+6}{4\sqrt{6}}$, $b=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $c=\frac{2\sqrt{2}-6}{4\sqrt{6}}$. Отже і найбільшим значенням виразу

$\left|(b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)\right|$ на множині Ω є $\frac{3\sqrt{3}}{64}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Задача 4 (США). Знайдіть усі пари цілих чисел *x* і *y*, для яких справджується рівність $1+2^x+2^{2x+1}=y^2$.

Розв'язання (В. Лішунов). Якщо $x<0$ то $1<1+2^x+2^{2x+1}\le 2$. Для $x=0$ знаходимо $y=\pm 2$. Далі вважаємо, що $x\ge 3$ (випадки $x=1, x=2$ перевіряємо безпосередньо). Разом з кожним розв'язком *(x; y)* розв'язком буде й $(x;-y)$, а тому можна розглядати тільки випадок $y\ge 0$. Очевидно, що y— непарне число, причому $y\ge 3$. Нехай $y=2k+1, k\in N$. Тоді

$2^{x-2}(2^{x+1}+1)=k(k+1)$. Оскільки $\gcd(k;k+1)=1$, то $2^{x-2}|k$ або $2^{x-2}|k+1$. Для першого випадку $k=2^{x-2}\ell, \ell\in N$, і маємо: $2^{x-2}(8-\ell^2)=\ell-1$. Для $\ell\geq 3$ ця рівність неможлива, безпосередньо перевіряємо й те, що для $\ell=1$ і $\ell=2$ розв'язків також те буде. Нехай тепер $k+1=2^{x-2}\ell, \ell\in N$, тобто $2^{x-2}(\ell^2-8)=\ell+1$, звідки $\ell\geq 3$. Якщо $\ell\geq 4$, то, як легко помітити, $2^{x-2}(\ell^2-8)>2^{x-2}(\ell+1)>(\ell+1)$. Для $\ell=3$знаходимо відповідь $(4;\pm 23)$.

Задача 5 (Румунія). Нехай *P (x)* – многочлен степеня $n>1$ з цілими коефіцієнтами, *k* – довільне натуральне число. Розглянемо многочлен $Q(x)=P(P(..P(P(x))...))$ (тут *P* застосовується *k* разів). Доведіть, що існує не більше за *n* цілих чисел *t* таких, що $Q(t)=t$.

Розв'язання (Н. Гончарук). Припустимо супротивне: нехай многочлен $Q(x)$ має *m* цілих нерухомих точок $x_1, x_2, ..., x_m,\ m>n$. Якими б не були цілі *a* і *b,* для них існує ціле число *u,* яке задовольняє рівність $(a-b)u=P(a)-P(b)$. А тому

$$x_i-x_j=Q(x_i)-Q(x_j)=n_1(P^{(k-1)}(x_i)-P^{(k-1)}(x_j))=...=n_1\cdot...\cdot n_{k-1}\cdot$$
$$\cdot(P(x_i)-P(x_j))=n_1\cdot...\cdot n_k\cdot(x_i-x_j),\ n_1,...,n_m\in Z,\ 1\leq i<j\leq m$$

Звідси випливає, що $|n_i|=1, 1\leq i\leq k, |P(x_i)-P(x_j)|=|x_i-x_j|,\ 1\leq i<j\leq m$. Нехай для якоїсь пари індексів *i* та *j* виконується рівність $P(x_i)-P(x_j)=x_i-x_j$. Доведемо, що тоді для будь-якого *s,* $1\leq s\leq m, P(x_i)-P(x_s)=x_i-x_s$. Дійсно, якщо $P(x_i)-P(x_s)=x_i-x_s$, то $P(x_s)-P(x_j)=2x_i-x_j-x_s$, але ж $2x_i-x_j-x_s$, як легко бачити, не може дорівнювати ані x_s-x_j, ані x_j-x_s. Далі, якщо для якоїсь пари індексів *i* та *j* виконується рівність $P(x_i)-P(x_j)=x_i-x_j$, то й для будь-якої іншої пари індексів *s* і *r* $P(x_s)-P(x_r)=x_s-x_r$*:* за доведеним з попередньої рівності виводимо співвідношення $P(x_i)-P(x_r)=x_i-x_r$, яке*,* у свою чергу, дає потрібний факт. Отже, або для будь-якої пари індексів *i* та *j* виконується рівність $P(x_i)-P(x_j)=x_i-x_j$, або ж $P(x_i)-P(x_j)=x_i-x_j$ для всіх

i та j, $1 \le i < j \le m$. Розглянемо перший випадок (другий випадок – аналогічно).

Зафіксуємо j, і тоді рівняння $P(x) - x = P(x_j) - x_j$ матиме більше за n коренів, що неможливо. Задачу розв'язано.

Задача 6 (Сербія). Кожній стороні b опуклого многокутника P поставлено у відповідність найбільшу з площ трикутників, які містяться в P і одна із сторін яких співпадає з b. Доведіть, що сума площ, які відповідають усім сторонам многокутника P, не менша за його подвоєну площу.

Розв'язання. У цій задачі многокутник розглядається, зрозуміло, як частина площини. Для сторони b поставлену у відповідність площу позначимо S_b. Нам потрібно довести, що $\sum_b S_b \ge 2S(P)$ (підсумовування відбувається по всіх сторонах многокутника P). Розглянемо спочатку довільний опуклий многокутник з парною кількістю сторін.

Лема: Якщо F – опуклий $2n$-кутник, то серед його сторін можна обрати таку сторону b, що $S_b \ge \frac{S}{n}$.

Доведення: Для вершини X через XX' будемо позначати діагональ, яка виходить з X і розбиває контур F на дві ламані, кожна з яких містить по n ланок (такі діагоналі називатимемо *головними).* Нехай вершини A і B є кінцями сторони b многокутника F, $W_b = AA' \cap BB'$, через Δ_b позначимо трикутник (як частину площини) ABW_b.

Покажемо, що $\bigcup_b \Delta_b \supseteq F$. Для цього досить довести, що для довільної точки $M \in F$, яка не належить жодній з *головних* діагоналей, $M \in \bigcup_b \Delta_b$. Вважаємо, що точка M лежить ліворуч від променя AA' (тут і надалі промені позначається так само, як і *головні* діагоналі, що їх визначають), а праворуч від цього променя – уся відповідна частина контуру F: ламана $A \equiv C_0 \to C_1 \to \ldots \to C_{n-1} \to C_n \equiv A'$. Оскільки відносно променя $A'A$ точка M лежить праворуч, то для деякого i точка M лежить ліворуч відносно променя $C_iC_i^{'}$, але праворуч відносно променя $C_{i+1}C_{i+1}^{'}$. Тоді, зрозуміло, $M \in \Delta_a$, де за сторону *a* береться відрізок $C_{i+1}C_{i+1}^{'}$. Оскільки $\sum_b S(\Delta_b) \geq S(F)$, то серед сторін *F* існує така сторона b з кінцями A і *B*, що для сторони *b′* з кінцями *A′* і *B′* справджується нерівність $S(\Delta_b) + S(\Delta_b^{'}) \geq \frac{S}{n}$. Якщо $AA^{'} \cap BB^{'} = N$, то, вважаючи без обмеження загальності, що $NB > NB'$, матимемо:

$$S_b \geq S(ABA^{'}) = S(ABN) + S(NBA^{'}) \geq S(ABN) + S(NB^{'}A^{'}) = S(\Delta_b) + S(\Delta_b^{'}) \geq \frac{S}{n}.$$

Лему доведено.

Нехай m – кількість сторін многокутника *P*. Доводжувану нерівність запишемо в більш зручному вигляді $\sum_{i=1}^{m} S_i \geq 2S$ (відповідність між позначеннями є цілком зрозумілою). Припустимо супротивне, тобто нехай $\sum_{i=1}^{m} \frac{S_i}{S} < 2$. Тоді, очевидно, існують такі раціональні числа $q_1,\ldots,q_m$, що $\sum_{i=1}^{m} q_i = 2S$, причому $q_i > \frac{S_i}{S}$, $i = \overline{1,m}$. Зведемо раціональні числа $q_1,\ldots,q_m$ до спільного знаменника *n:* $q_i = \frac{k_i}{n}$, $i = \overline{1,m}$. Тоді $\sum_{i=1}^{m} k_i = 2n$.

Для кожного *i* розіб'ємо *i*-ту сторону многокутника *P* на k_i рівних частин і отримаємо 2*n*-кутник площі *S*, до якого застосуємо доведену лему (те, що деякі його кути мають величину 180°, нам, як нескладно бачити, не заважатиме). Якщо трикутник *T*, для якого $S(T) \geq \frac{S}{n}$, має основу на стороні з номером *i*, то $k_i S(T) \geq k_i \frac{S}{n} = q_i S > S_i$. Утім, це неможливо в силу означення площі S_i [24; 66 – 77].

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено теоретичне узагальнення й нове вирішення наукового завдання, яке виявляється у висвітленні змісту освітньої та науково-педагогічної діяльності В.М. Лейфури, обґрунтуванні та систематизації його науково-педагогічних поглядів, визначенні місця доробку вченого в українській педагогічній науці та практиці.

Реалізовані мета і завдання дослідження дають можливість зробити наступні висновки й запропонувати рекомендації, що мають теоретичне й практичне значення.

1. На основі системного аналізу наукової літератури узагальнено науково-теоретичні дослідження педагогічної спадщини В.М. Лейфури.

Проведений системний аналіз наукових праць за темою дослідження вказує на те, що науково-педагогічна спадщина В.М. Лейфури ще не була до цього часу предметом спеціального дослідження.

2. У роботі вперше визначено етапи життєвого й творчого шляху вченого. Розкрито зміст і визначено основні напрями освітньо-педагогічної діяльності вченого, зокрема: дослідження проблем вищої школи; організація методичної роботи; підготовка науково-педагогічних кадрів; робота з обдарованими школярами; підготовка команди України до Міжнародних математичних олімпіад; підвищення теоретичного і методичного рівня викладання педагогічних дисциплін.

3. На основі дослідження біографічних, соціально-педагогічних, та історико-хронологічних факторів розроблено наукову періодизацію педагогічної діяльності вченого. Виявлено і охарактеризовано три періоди цієї діяльності:

1-й – педагогічний (1965 – 1973 рр.) – це навчання на фізико-математичному факультеті Миколаївського державного інституту ім. В.Г. Белінського, робота вчителя у сільській школі;

2-й – науковий (1973 – 1979 рр.) – це навчання в аспірантурі Київського педагогічного інституту, робота викладача у МДІ ім.

В.Г. Бєлінського, захист дисертації на здобуття вченого ступеня кандидата фізико-математичних наук;

3-й – освітньо-управлінський з 1980 р.– (1980 – 2001 рр.) керував кафедрою математичного аналізу МДІ ім. В.Г.Бєлінського, (1997 – 1998 р.) керівник держбюджетної теми МО України «Державні стандарти освіти з математики для вузів І та ІІ рівня акредитації та класів загальноосвітніх шкіл економічного профілю», (2001 – 2011 рр.) керівник кафедри прикладної та вищої математики МДГУ ім. Петра Могили комплексу «Києво-Могилянської академії», (2003 – 2006 рр.) науковий керівник команди України на Міжнародних математичних олімпіадах.

4. Проаналізовано та узагальнено внесок вченого у розвиток національної освіти, його заслугу у здобутті винагород командою України на Міжнародних математичних олімпіадах. У 1996 – 1999 рр. (чотири роки поспіль) він залучався МО України до відбірково-тренувальних зборів з метою підготовки національної команди школярів України до участі в Міжнародних математичних олімпіадах, а в 2003 – 2006 рр. Валентин Миколайович призначався Міністерством освіти і науки України науковим керівником команди України.

ДОДАТКИ

Додаток А

Почесна грамота від Кабінету Міністрів України

Додаток Б

Подяка від президента України Л. Кучми

Додаток В

Відзнаки «Відмінника освіти»

Відзнака за внесок у захист дитинства та материнства

Додаток Д

МІНІСТЕРСТВО
ОСВІТИ
УКРАЇНИ

Почесна грамота

Нагороджується

ЛЕЙФУРА ВАЛЕНТИН МИКОЛАЙОВИЧ,

вчитель Муніципального колегіуму м.Миколаєва, за плідну роботу з обдарованою молоддю та підготовку переможця Міжнародної учнівської олімпіади 2001 року з математики.

Міністр *В.Г.Кремень*

№ 69609

Наказ № 656
від 26.09.2001 р.

м.Київ

Почесна грамота за роботу з обдарованою молоддю (2001 р.)

Додаток Е

Подяка від Кабінету Міністрів України за вагомий внесок у розвиток освіти

Додаток Ж

Посвідчення № 2887

Лейфурі
Валентину
Миколайовичу

Указом
Президента України
від «9» квітня 2002 р.
№ 318

ПРИСВОЄНО
ПОЧЕСНЕ ЗВАННЯ

«Заслужений вчитель
України»

Президент
України

Л. Кучма

М.П.

АБ №100919

Почесне звання «Заслужений вчитель України»

Додаток 3


2002

ГОРОЖАНИН ГОДА

СВИДЕТЕЛЬСТВО

ЭТИМ УДОСТОВЕРЯЕТСЯ, ЧТО

ЛЕЙФУРА
Валентин Николаевич

ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРТНОГО ОПРОСА ЛИДЕРОВ ОБЩЕСТВЕННОГО МНЕНИЯ ГОРОДА НИКОЛАЕВА ПРИЗНАН

«ГОРОЖАНИНОМ ГОДА-2002»

В НОМИНАЦИИ

«СРЕДНЯЯ ШКОЛА»

НИКОЛАЕВСКИЙ ГОРОДСКОЙ ГОЛОВА В.Д.ЧАЙКА

ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА В.А.КАРНАУХ

Визнання «Громадянином року» в номінації «Середня школа»

Додаток К

МАТЕМАТИЧНИЙ ТУРНІР
НА КУБОК ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМ. В.Н.КАРАЗІНА

Головне управління освіти і науки Харківської обласної державної адміністрації

Харківський національний університет ім.В.Н.Каразіна

Механіко-математичний факультет
Центр довузівської освіти
Малий університет

Державний університетський ліцей

Фізико-математичний ліцей №27

ПОДЯКА

Харківський національний університет ім. В.Н.Каразіна і оргкомітет математичного турніру на кубок Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна висловлюють подяку

Лейфурі Валентину Миколайовичу

за підготовку завдань для турніру та особистий внесок в розвиток математичної освіти в Україні.

Сподіваємось на подальше плідне співробітництво.

Ректор Харківського національного університету ім. В.Н.Каразіна

В.С. Бакіров

Голова оргкомітету

В.О. Золотарьов

ХАРКІВ, 17 ЛЮТОГО 2003 РОКУ

Подяка за підготовку завдань для турніру

Додаток Л

Об'єднання
гуманістів України

ВСЕУКРАЇНСЬКА ГРОМАДСЬКА ОРГАНІЗАЦІЯ

ДИПЛОМ ДОБРОТИ

ВРУЧЕНИЙ

Валентину Миколайовичу
ЛЕЙФУРІ

добрій людині,
викладачу математики,
кандидату фізико-математичних наук
наставникові найкращих юних математиків світу

Диплом Доброти вручено
за багаторічну сумлінну та безкорисну роботу
з виховання та особистої опіки
юних талановитих математиків

18 ГРУДНЯ 2003 РОКУ

КИЇВ

Диплом Доброти

Додаток М

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ПОЧЕСНА ГРАМОТА

НАГОРОДЖУЄТЬСЯ

Лейфура Валентин Миколайович,

завідуючий кафедрою Миколаївського державного гуманітарного
університету імені Петра Могили
комплексу "Києво-Могилянська академія",
за вагомий внесок у розвиток національної освіти
та підготовку призерів міжнародних інтелектуальних змагань

Міністр С.М.Ніколаєнко

№100063

Наказ № 251-к
від 22.03.2005

м. Київ

Нагорода за вагомий внесок у розвиток національної освіти

Додаток Н

Знак «Петро Могила»

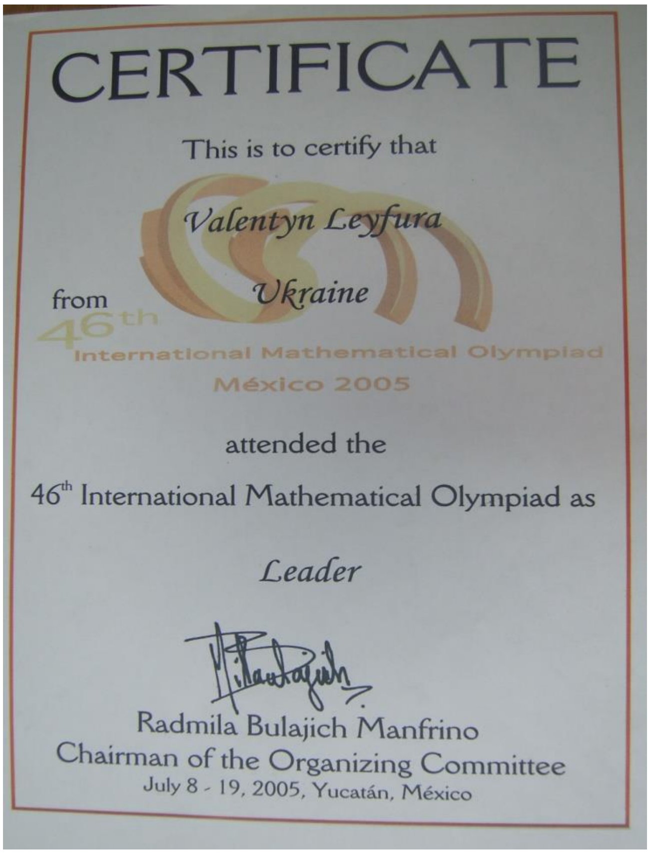
Знак «Софія Русова»

Додаток П

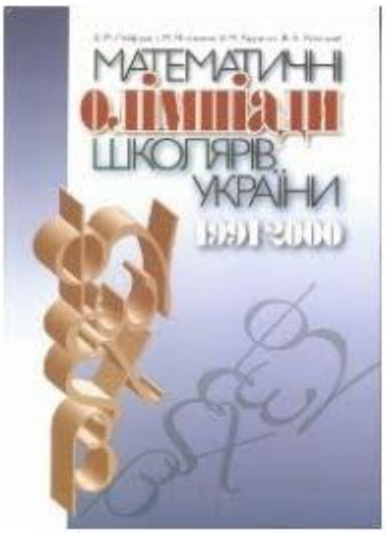
Участь у 44 – ММО

Участь у 45 – ММО

Додаток Р

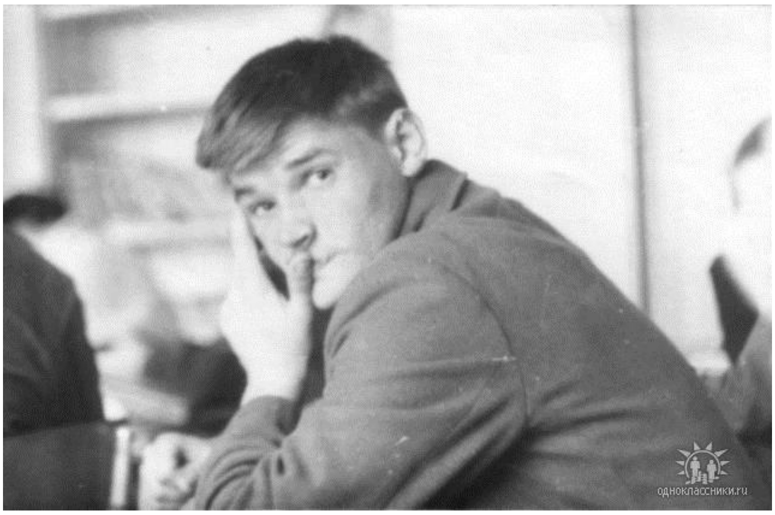


Участь у 46 – ММО



Методичні надбання професора В.М. Лейфури

Додаток С



Навчання в Республіканській школі-інтернаті фізико-математичного профілю

Професор В.М. Лейфура з командою України на 47-ММО

Додаток Т

В. М. Лейфура в залі робочих засідань журі на ММО-2006р.

Науковий керівник, професор В.М. Лейфура відстоює результати перевірки робіт українських школярів

Додаток Ф

Профессор В.М. Лейфура з академіком М.Й. Ядренком

Серед освітян міста на конкурсі «Вчитель року 2004»

Додаток X

З улюбленою кафедрою математичного аналізу
МДУ ім. В.О.Сухомлинського

З керівником команди Росії в Токіо у 2003 р.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Валентин Миколайович Лейфура – керівник Всеукраїнської команди юних математиків./ Г.М. Палій // Матеріали щорічних магістерських читань «Педагогічна освіта як умова сталого розвитку суспільства». — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2012 — С. 85 — 88.

2. Випускники та студенти Миколаївського державного університету – гордість України. — Миколаїв: МДУ, 2003. — 136 с.

3. Відбірково-тренувальні збори кандидатів до команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2003 року / В.О. Борисова, В.М. Лейфура, І.М. Мітельман //У світі математики. — ТВіНС, 2004. — Т. 10, вип. 1. — С. 46 — 55.

4. Відбірково-тренувальні збори з формування команди України на Міжнародну математичну олімпіаду 2006 року / В.М. Лейфура [та ін.]. // У світі математики. — ТВіНС, 2006. — Т. 12, вип. 3. — С. 73 — 84.

5. Вітаємо В.М. Лейфуру з ювілеєм / Редакційна рада та редакційна колегія журналу. Члени журі Всеукраїнськихолімпіад та турнірів юних математиків // У світі математики. — ТВіНС, 2007. — Т. 13, вип. 3. — С. 92 — 94

6. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язування / Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. — Л .: Євросвіт, 1999. — 128 с.

7. Змагання юних математиків України 2003 рік / В.О. Борисова [та ін.]. — Х.: Основа, 2004. — 192 с.

8. Змагання юних математиків України 2004 рік / В.О. Борисова [та ін.]. — Х.: Основа, 2005. — 128 с.

9. Змагання юних математиків України. 2005 рік : навч. видання / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.А. Ясінський. — Х. : Основа, 2006. — 112 с.

10. Змагання юних математиків України. 2006 рік : навч.-метод. посіб. / В.М. Лейфура [та ін.]. — Л.: Каменяр, 2007. — 111 с.

11. Його звали композитором математики // Освіта України. — 2011. — N 15/16. — С. 14.

12. Лейфура В.М. Задачі з параметрами : Навч. посібник для студ. фіз.- мат. фак. пед. ін-тів / В.М. Лейфура, А.І. Воробйова; Інститут змісту і методів навчання, Миколаївський державний педагогічний інститут. — К.: [б.в.], 1996. — 112 с.

13. Лейфура В.М. Задачі з цілими числами / В.М. Лейфура . — Х.: Основа, 2003. — 144с .

14. Лейфура В.М. Математика : Підручник для студ. екон. спец. вищ. навч. закл. I-II рівнів акредитації / В.М. Лейфура [та ін.] ; ред. В.М. Лейфура. — К.: Техніка, 2003. — 639 с.

15. Лейфура В.М. Математичні задачі евристичного характеру / В.М. Лейфура. — К.: Вища школа, 1992. — 91с.

16. Математичні олімпіади школярів України. 2001 – 2006 рр. / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський — Л.: Каменяр, 2008. — 348 с.

17. Миколаївський державний університет імені В.О. Сухомлинського: віхи історії(1913-2008) / Укл.:В.Д. Будак, Л.В. Старовойт, О.П. Хаєцький, С.В. Підопригода. — М.:ТОВ "Фірма Іліон", 2009. — 184 с.

18. Робота В.М. Лейфури з обдарованими учнями./ Г.М. Палій // Актуальні проблеми підготовки майбутнього фахівця: Збірник науково-методичних праць. — Випуск 2. / За ред. А.К. Солодкої, Т.В. Шиян. — Миколаїв: МНУ ім. В.О. Сухомлинського, 2012.

19. Світлій пам'яті професора В.М. Лейфури // Южная правда : общественно-политическая газета Николаевской области. — 2011. — N 22 (26 февраля). — С. 4.

20. Своим двором введенный во дворянство. / Е. Наточа // Вечерний Николаев : николаевская городская газета. — 2009. — N 68 (25 Июнь). — С. 5.

21. Україна і Міжнародні математичні олімпіади / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський //У світі математики. — ТВіНС, 2002. — Т. 8, вип. 2. — С. 75 — 77.

22. Українські математичні олімпіади / В.А. Вишенський [та ін.]. — К.: Вища школа, 1993. — 415с.

23. 44-та Міжнародна математична олімпіада / В.М. Лейфура // У світі математики. — ТВіНС, 2003. — Т. 9, вип. 4. — С. 58 — 72.

24. 45-та Міжнародна математична олімпіада / В.М. Лейфура // У світі математики. — ТВіНС, 2004. —Т. 10, вип. 4. — С. 62 — 77.

25. 46-та Міжнародна математична олімпіада / В.М. Лейфура // У світі математики. — ТВіНС, 2005. — Т. 11, вип. 4. — С. 46 — 60.

26. 47-ма Міжнародна математична олімпіада / В.М. Лейфура // У світі математики. — ТВіНС, 2007. — Т. 13, вип. 1. — С. 64 — 78.

27. Школа професора Лейфури [Електронний ресурс] // Миколаївський державний гуманітарний університет [сайт]. — Електрон. дані. — Режим доступу: http://ldufk.edu.ua/ index.php/index.html (16.05.2009). — Назва з екрана.