Міністерство освіти і науки України
Інститут модернізації змісту освіти
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

Умови та вказівки до розв'язань задач

1 тур

20 січня 2019 року

*"Він учився на помилках,
але його обійшли ті, хто вчився по книгах."
Владислав Катажинський*

7 клас

1. Чи існує пара правильних нескоротних дробів, різниця яких дорівнює їх добутку і знаменник одного з яких дорівнює 2019? Якщо існує, то знайдіть принаймні дві пари таких дробів.

Відповідь: $\frac{1}{2018}$, $\frac{1}{2019}$ та $\frac{1}{2019}$, $\frac{1}{2020}$.

Розв'язання. Основою розв'язання є простий факт, що $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}$.

2. З точки O проти руху годинникової стрілки проведені n променів OA_1, OA_2, …, OA_n, при цьому $\angle A_1OA_n<180^\circ$ Для якого найменшого n могло таке статися, що серед кутів $\angle A_iOA_j$, $1\le i<j\le n$ буде пара кутів величиною 60°, пара кутів величиною 45° та пара кутів величиною 30°.

(Рубльов Богдан)

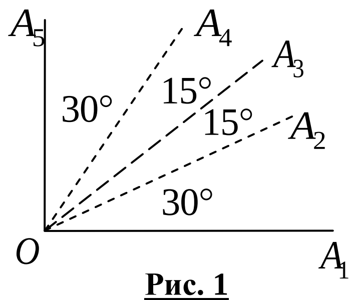

Рис. 1

Відповідь: $n=5$.

Розв'язання. Спочатку покажемо, що $n=5$ умову задовольняє (рис. 1). Припустимо, що такого можна досягти, провівши, наприклад, 4 промені (рис. 2). Тоді усього між променями утворюється 6 різних кутів. Таким чином, якби умова задовольнялася, то серед цих 6 кутів був би весь перелічений набір. Але найбільший кут $\angle A_1OA_4$ якщо дорівнює 60°, то другого такого кута вже не може бути. А якщо $\angle A_1OA_4<60^\circ$, то там не існуватиме кутів, що дорівнюють 60°. Якщо ж $\angle A_1OA_4>60^\circ$, то просто не вистачить різних кутів, щоб були три пари заданих кутів.

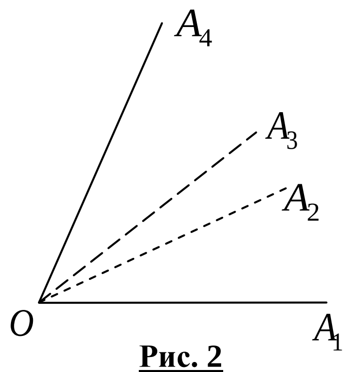

Рис. 2

3. Знайдіть середнє арифметичне усіх п'ятицифрових чисел, що мають такі властивості:

- число має вигляд $\overline{ab0cd}$, тобто третя цифра дорівнює нулю;
- усі цифри різні;
- число $\overline{ab0cd}$, а також число $\overline{dc0ba}$ діляться націло на 7.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: 55055.

Розв'язання. Перепишемо умову задачі таким чином: оскільки 1001 ділиться націло на 7, то

$$\overline{ab0cd}=1000\cdot\overline{ab}+\overline{cd}=1001\cdot\overline{ab}+(\overline{cd}-\overline{ab})\,\vdots\,7\ \Rightarrow\ (\overline{cd}-\overline{ab})\,\vdots\,7$$

$$\Rightarrow\ 10(c-a)+(d-b)\,\vdots\,7\ \Rightarrow\ 3(c-a)+(d-b)\,\vdots\,7.$$

Аналогічно $3(d-b)+(a-c)\,\vdots\,7$. Таким чином $3x+y=7k$ та $3y+x=7l$ $\Rightarrow$ $9x+3y=21k$ $\Rightarrow$ $8x=7(3k-l)$ $\Rightarrow$ $x\,\vdots\,7$, аналогічно $y\,\vdots\,7$. Таким є дві пари цифр, серед яких немає нулів, різниця між якими кратна 7. Таких пар дві $(8,1)$ та $(9,\,2)$, зрозуміло, що пару $(7,\,0)$ не розглядаємо, бо там є цифра 0, яка вже присутня в числі. Тепер бачимо, що таких чисел усього чотири: 12089, 21098, 98021 та 89012 і їхнє середнє арифметичне дорівнює 55055.

4. Задана біла дошка 6×2019. Андрій та Арсеній грають в таку гру: вони по черзі (розпочинає Андрій), перефарбовують одну білу клітинку 1×1 в чорний колір, при цьому не можна фарбувати в чорний колір клітинку, якщо після цього буде існувати квадрат 3×3, в якому стане дві чорні клітини. Програє той, хто не може зробити свій хід. Хто перемагає при правильній грі обох?

(Ніколаєв Арсеній)

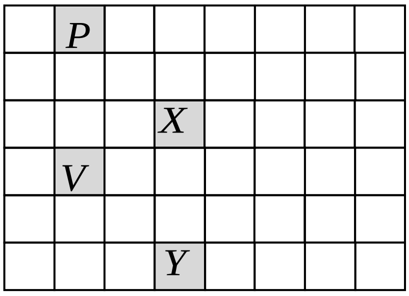

Рис. 3

Відповідь: Перемагає Арсеній.

Розв'язання. Покажемо, що існує стратегія, при якій Арсеній завжди може зробити хід, якщо свій хід зробив Андрій. Розіб'ємо усі клітини на *дружні пари*, дві клітини 1×1 утворюють дружню пару, якщо вони розташовані в одному стовпчику і між ними розташовані рівно два інших квадрати 1×1. Тоді після ходу Андрія Арсеній ходить в клітину, що утворює дружню пару з клітиною, яку востаннє перефарбував Андрій.

Покажемо, що Арсеній завжди може зробити своє перефарбування. Якщо Андрій зафарбував деяку клітину P, то клітина V, що утворює дружню пару з P – біла. Крім того, якщо припустити, що клітинку V не можна зафарбувати, бо існує інша чорна клітинка Y в деякому квадраті 3×3, що дотикається до нижньої чи верхньої сторони заданого прямокутника, який містить клітину V, то аналогічний квадрат 3×3, що також дотикається до нижньої чи верхньої сторони заданого прямокутника, має містити дві чорні клітини, одна з яких P, а друга – клітина X, що утворює дружню пару з клітиною Y (рис. 3). Твердження доведене.

3.1. Натуральні числа a, b, c, d задовольняють умову $a<b<c<d$. Чи може найменше спільне кратне чисел a та b бути більшим від найменшого спільного кратного чисел c та d.

Відповідь: так, може.

Розв'язання. Виберемо, наприклад, в якості менших чисел $a=8,\ b=9$, тоді $[a;b]=72$. Зробимо так, щоб, наприклад, $[c;d]=50$. Для цього достатньо їх вибрати так: $c=10,\ d=25$.

4.1. У виразі $\pm1\pm2\pm3\pm\ldots\pm2018$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками?

Відповідь: усі непарні значення від 1 до $1+2+3+\ldots+2018=\frac{1}{2}\cdot2018\cdot2019=1009\cdot2019$.

Розв'язання. Зрозуміло, що це число не може приймати значення 0, оскільки там 1009 непарних чисел. Покажемо, що це значення може бути будь-яким непарним числом від 1 до $1+2+3+\ldots+2018$. Дійсно, для цього беремо довільне число. Знаходимо зліва направо перші два сусідні значення, у одного знак "$-$", у іншого – знак "+". Міняємо ці знаки і значення зменшиться на 2. Для першого кроку з виразу "$+1+2+3+\ldots+2018$" зробимо вираз "$-1+2+3+\ldots+2018$", який на 2 менший. Далі за алгоритмом отримуємо послідовно усі числа, що менші на 2. Коли отримаємо вираз "$+1-2-3-\ldots-2018$", тобто алгоритм не працює, отримуємо останній найменший вираз "$-1-2-3-\ldots-2018$".

8 клас

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y=(k+n)x+(k-n)$, де $k,\ n$ – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

Відповідь: існує.

Розв'язання. Розглянемо значення $x=1$, тоді відповідні ординати точок, що лежать на усіх можливих прямих мають значення $y=(k+n)+(k-n)=2k$ – парне. Таким чином, через точку, наприклад, $(1;1)$ не пройде жодна така пряма.

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N-(2d-1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

(Мороз Микола)

Відповідь: Катя.
Розв'язання. Спочатку покажемо, що після кожного ходу на дошці записується натуральне число, що менше записаного. Те, що воно менше і ціле – очевидно. А те, що воно додатне – випливає з таких простих умов: $N=dD \Rightarrow M=N-(2d-1)=dD-2d+1=d(D-2)+1\geq 1$, оскільки при $d<N$ маємо, що $D\geq 2$. Таким чином за скінченну кількість кроків на дошці буде записаною 1.
Далі просто побачимо, що після кожного ходу змінюється парність записаного числа. Після ходу Каті, яка розпочинає на дошці записуються парні числа, а після ходу Миколи – непарні. З вище проголошеного, саме після ходу Миколи на дошці буде записаною 1, тому він і програє.

3. У трикутнику ABC відомо, що $2AC=AB$ та $\angle A=2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL, і позначили точку M – середину сторони AB. Виявилося, що $CL=ML$. Доведіть, що $\angle B=30°$.

(Хілько Данило)

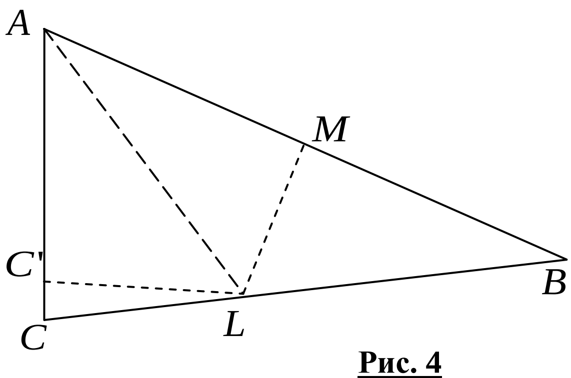

Рис. 4

Розв'язання. Оскільки AL – бісектриса, то $\angle CAL=\angle LAB=\angle CBA$ (рис. 4). Тоді ΔALB є рівнобедреним, відтак LM є його медіаною і висотою. Тобто $\angle LMA=90°$. Розглянемо трикутники AML і ALC. Нехай тепер C' – проекція точки L на пряму AC. Тоді прямокутні трикутники AML і $AC'L$ рівні за гіпотенузою і кутом. Тоді $LC'=LM=LC$. Але в такому разі $C=C'$, оскільки проекцію можна побудувати єдиним способом. Тоді ΔABC – прямокутний трикутник з умовою $2AC=AB$, з якої випливає, що $\angle ABC=30°$.

4. Знайдіть натуральне число n, для якого справджується рівність:

$$n^2=2\cdot(20^4+19^4+39^4).$$

Відповідь: 2282.
Розв'язання. Розглянемо вираз

$$x^4+y^4+(x+y)^4=2x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+2y^4,$$

тому

$$2(x^4+y^4+(x+y)^4)=4(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)=(2(x^2+xy+y^2))^2.$$

Звідси для $x=20,\ y=19$ маємо, що

$$n^2=(2(x^2+xy+y^2))^2 \text{ або } n=2(20^2+20\cdot 19+19^2)=2282.$$

5. В клітинках таблиці 3×3 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 3 рівних числа.

Факторіалом натурального числа n називається добуток $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 1. У будь-якому квадраті 2×2 можна вибрати діагональ, на якій стоятимуть два рівних числа.

Доведення. Розглянемо найбільше число у квадраті 2×2 і позначимо його через X. нехай його сусіди по сторонах в цьому квадраті 2×2 позначені як A та B. Зрозуміло, що вони розташовані по діагоналі і якщо $A=B$, то твердження доведене. Припустимо, що $A>B$. Тоді за умовою $A+X=k!>B+X=m!>1$, тобто $k>m$. При цьому зрозуміло, що $m>1,\ k>2$. Але тоді

$$2(B+X)=2m!>2X\geq A+X=k!\geq k\cdot m!>2m!,$$

і одержана суперечність завершує доведення.

Лема доведена.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Рис. 5

Методом від супротивного, нехай в таблиці записані числа $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ (рис. 5). Застосуємо лему для квадрата з числами a, b, d, e і матимемо, що $b=d$ або $a=e$. У першому випадку застосуємо послідовно лему к квадратів з числами d, e, g, h, а далі до квадрату з числами b, c, e, f. Отримаємо, що $b=d=h$ або $b=d=f$, або $g=e=c$.

У другому випадку застосуємо послідовно лему до квадратів з числами e, f, h, i, а далі до квадрату з числами b, c, e, f. Знову отримаємо, що $a=e=i$ або $a=e=c$, або $h=f=b$. В усіх випадках маємо три рівних числа.

4.1. Яке найменше значення може примати вираз $x^6+x^4y^2+x^2y^4+y^6$, якщо добуток дійсних чисел x, y дорівнює 1?

Відповідь: 4.

Розв'язання. Без обмеження загальності можемо вважати, що числа x, y додатні. Тоді розкладемо заданий вираз на множники $(x^4+y^4)(x^2+y^2)$. При цьому з умови $(x^2-y^2)^2=x^4-2x^2y^2+y^4\geq0$ випливає, що $x^4+y^4\geq2x^2y^2=2$, аналогічно $x^2+y^2\geq2xy=2$. Таким чином найменше можливе значення виразу може бути 4, а це значення досягається при $x=y=1$.

5.1. Задача 4.1 за 7 клас.

9 клас

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y=kx^2+(k-n)x+(k+n)$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

Відповідь: існує.

Розв'язання. Розглянемо значення $x=1$, тоді відповідні ординати точок, що лежать на усіх можливих прямих мають значення $y=k+(k-n)+(k+n)=3k$ – кратне трьом. Таким чином, через точку, наприклад, $(1;1)$ не пройде жодна така парабола.

2. В прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умові: $BC=\sqrt{2}AC$. Доведіть, що медіани AN та CM взаємно перпендикулярні.

(Хілько Данило)

Розв'язання. Оскільки AB – гіпотенуза, то $\angle MCB=\angle MBC$ (рис. 6). З іншого боку, $AC^2=CN\cdot CB$, оскільки $BC=\sqrt{2}AC$ та $CN=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC$. Тоді $\Delta ACN\sim\Delta ABC$. Звідси $\angle CAN=\angle ABC$. Отже, $\angle AKC=\angle ACK+\angle NAC=\angle ACK+\angle KCB=90°$, що й треба було довести.

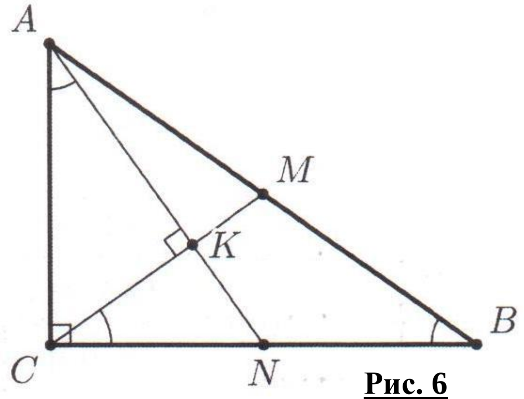

Рис. 6

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані три числа 2^{100}, 3^{100} та 5^{100}, так що утворилося багатоцифрове число N. Арсеній стверджує, що може змінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правий він?

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: ні.

Розв'язання. Нехай Арсеній все ж таки зміг поміняти останню цифру в числі N, записаному на смужці так, що вийшло число 13^k, для деякого натурального k. Очевидно, що він мав поміняти останню цифру числа, бо зараз вона 5. Оскільки $2^{100}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, $3^{100}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$ та $5^{100}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, їх суми цифр мають такі саме порівняння. Заміна останньої цифри 5 на цифру l означає, що ми за модулем 3 відняли 2 (або додали 1) та додали l. Таким чином утворене число, позначимо його через M, дорівнює $l\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 3)$. Оскільки $13^k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$, то дописати могли одну з цифр: $1,\ 4$ або 7. Останньою цифрою числа 13^k може бути $1,\ 3,\ 7$ або 9. Таким чином залишається розглянути два варіанти.

1 варіант. 13^k закінчується на 1, це буває у випадку $k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$, тоді розглянемо конгруенції за модулем 8: $M=13^k=13^{4j}=169^{2j}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)$. Зазначимо при цьому, що $M=N-4$. $N\equiv 5^{100}=25^{50}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 8)\ \Rightarrow\ M=N-4\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 8)$ – суперечність.

2 варіант. 13^k закінчується на 7, це буває у випадку $k\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$, тоді розглянемо конгруенції за модулем 8: $M=13^k=13^{4j+3}=169^{2j}\cdot 13\equiv 5\ (\mathrm{mod}\ 8)$. Для цього варіанту останньої цифри $M=N+2\ \Rightarrow\ M\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 8)$ – суперечність.

Одержані суперечності завершують доведення.

4. Для додатних чисел $x,\ y,\ z$ доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}\geq 2\cdot\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Розв'язання. Скористаємося декілька разів нерівностями між середніми:

$$\left(x^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{x^4}\right)\geq 2\cdot\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)=$$

$$=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}\right)\geq 2\cdot\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}\right),$$

що й треба було довести.

a_1	a_2	a_3	a_4
a_5	a_6	a_7	a_8
a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Рис. 7

5. В клітинках таблиці 4×4 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 4 рівних числа.

(Ніколаєв Арсеній)

***Розв'язання*.** Спочатку доведемо таку лему.

Лема. У будь-якому квадраті 2×2 можна вибрати діагональ, на якій стоятимуть два рівних числа.

Доведення. Розглянемо найбільше число у квадраті 2×2 і позначимо його через X . нехай його сусіди по сторонах в цьому квадраті 2×2 позначені як A та B. Зрозуміло, що вони розташовані по діагоналі і якщо $A=B$, то твердження доведене. Припустимо, що $A>B$. Тоді за умовою $A+X=k!>B+X=m!>1$, тобто $k>m$. При цьому зрозуміло, що $m>1, k>2$.

a_1	x	a_3	a_4
x	a_6	a_7	a_8
a_9	x	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Рис. 8

Але тоді

$$2(B+X)=2m!>2X\geq A+X=k!\geq k\cdot m!>2m!,$$

і одержана суперечність завершує доведення.
Лема доведена.

Методом від супротивного, нехай в таблиці записані числа a_1, a_2, …, a_{16}, для яких твердження задачі не справджується (рис. 7).
Застосуємо лему для квадрату с числами a_1, a_2, a_5, a_6. Без обмеження загальності вважатимемо, що $a_2=a_5$. Застосуємо лему для квадратів с числами a_2, a_3, a_6, a_7 та a_5, a_6, a_9, a_{10}.

a_1	x	a_3	a_4
x	a_6	a_7	a_8
y	x	y	a_{12}
a_{13}	y	a_{15}	a_{16}

Рис. 9

I випадок. $a_2=a_7$ або $a_5=a_{10}$. Ці випадки аналогічні тому вважатимемо, що $a_2=a_5=a_{10}=x$ (рис. 8). З леми для квадрату a_9, $a_{10}=x$, a_{13}, a_{14}, якщо $a_{13}=x$, то маємо чотири рівних числа і одержали суперечність з припущенням, що завершує доведення. Тому $a_9=a_{14}$. Аналогічно із застосуванні леми до квадрату, $a_{10}=x$, a_{11}, a_{14}, a_{15} матимемо, що $a_9=a_{14}=a_{11}=y$ (рис. 9). Залишається застосувати лему до квадрату a_6, a_7 $a_{10}=x$, $a_{11}=y$ і отримаємо, що таблиця містить або чотири числа x, або чотири числа . одержана суперечність завершує доведення цього випадку.

a_1	a_2	t	a_4
a_5	t	a_7	a_8
t	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Рис. 10

II випадок. $a_3=a_6=a_9=t$ (рис. 10). За припущенням, числа t немає серед інших значень, тому з леми має справджуватися рівність: $a_4=a_7=a_{10}=a_{13}$, яка приводить до суперечності з припущенням та завершує доведення.

4.1. Для додатних чисел x, y, z, a, b, c, що задовольняють умову: $x+y+z=a+b+c$, доведіть нерівність:

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>2.$$

(Мисак Данило)

Розв'язання. Зробимо такі оцінки

$$\frac{x}{a+b}+\frac{y}{b+c}+\frac{z}{c+a}+\frac{a}{x+z}+\frac{b}{x+y}+\frac{c}{y+z}>$$

$$\frac{x}{a+b+c}+\frac{y}{a+b+c}+\frac{z}{a+b+c}+\frac{a}{x+y+z}+\frac{b}{x+y+z}+\frac{c}{x+y+z}=$$

$$=\frac{x+y+z}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{x+y+z}=2.$$

5.1. У виразі $\pm 1 \pm 2 \pm 2^2 \pm 2^3 \pm \ldots \pm 2^{2019}$ Андрій обирає один із знаків перед кожним числом. Скільки різних додатних значень може при цьому вийти як результат обчислення значення з обраними знаками?

Відповідь: 2^{2018}.
Розв'язання. Скористаємося відомою нерівністю:

$$2^n=2+2+2^2+\ldots+2^{n-1}>1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}.$$

Звідси випливає, що при буж-якій розстановці знаків вийдуть різні числа. Дійсно, якщо маємо два таких вирази, то достатньо знайти найбільшу степінь 2, в якій відрізняються їхні знаки та прибрати однакові числа з більшими степенями. Тоді матимемо, що вирази, що лишилися – різних знаків. Усього додатні значення визначаються додатним знаком при 2^{2019}. Інші знаки можуть бути обрані довільними, при цьому усі значення будуть додатними та попарно різними. Тобто їх усього 2^{2018}.

10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\cos 2x+3}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\cos 2x+1}$.

Відповідь: $x=0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння таким чином: $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\cos 2x+3}{\cos 2x+1}$. Розглянемо такі дві функції: $f(t)=\frac{t+2}{t+1}$, $t\ge 0$ та $g(y)=\frac{y+3}{y+1}$, $y\in(-1;1]$. Якщо $t\ge 0$, то можна записати, що $f(t)=\frac{t+2}{t+1}<2 \Leftrightarrow t+2<2t+2 \Leftrightarrow t>0$. При цьому $f(t)=\frac{t+2}{t+1}=2$ лише при $t=0$.

Якщо $y\in(-1;1]$, то можна записати, що $g(y)=\frac{y+3}{y+1}>2 \Leftrightarrow y+3>2y+2 \Leftrightarrow y<1$. При цьому $g(y)=\frac{y+3}{y+1}=2$ лише при $y=1$.

Таким чином задана рівність можлива лише за умови $f(\sqrt{x})=2=g(\cos 2x)$, що в свою чергу можливо лише за умови, що $\sqrt{x}=0$ та $\cos 2x=1$. Звідки очевидно, що відповіддю є лише $x=0$.

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N, і записують на дошці замість числа N число $N-(4d-1)$, якщо воно натуральне. Програє той, хто не зможе зробити хід за правилами. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

(Мороз М., Рубльов Б.)

Відповідь: Микола.

Розв'язання. Очевидно, що після кожного ходу на дошці записується натуральне число, що менше записаного. Далі просто побачимо, що після кожного ходу змінюється парність записаного числа. Після ходу Каті, яка розпочинає на дошці записуються парні числа, а після ходу Миколи – непарні. Хід не можна зробити лише за умови, що на дошці записане одне з чисел 1, 2 чи 3. Бо для усіх інших чисел завжди можна використати дільник $d=1$ і замість числа N записати $N-(4d-1)=N-3$. Зауважимо, що Микола ходить, коли на дошці записане парне число. Тому він може програти лише за умови, що йому доведеться ходити при числі 2. Тобто Катя мала сходити так, щоб на дошці утворилося число 2. Подивимося при якому останньому ході Каті це можливе. Нехай вона вибрала дільник d числа $N=dD$, тоді має справджуватися рівність:

$$dD-(4d-1)=d(D-4)+1=2 \Rightarrow d(D-4)=1 \Rightarrow d=1 \text{ та } D=5 \Rightarrow N=dD=5.$$

Таким чином якщо після ходу Миколи на з'явиться число 5, то вона програє. Подивимося за яких умов може з'явитися число 5. З аналогічних міркувань можемо записати таку рівність:

$$d(D-4)+1=5 \Rightarrow d(D-4)=4.$$

Можливі три варіанти, за яких після ходу Миколи буде записане число 5 і він програє. Але легко побачити, що він може зробити хід таким чином, щоб число 5 не з'явитися.

1) $d=1$ та $D=8 \Rightarrow N=dD=8$. Замість вибору $d=1$ Миколи вибирає $d=2$ і записує на дошку число $N-(4d-1)=8-7=1$.

2) $d=2$ та $D=6 \Rightarrow N=dD=12$. Замість вибору $d=2$ Миколи вибирає $d=3$ і записує на дошку число $N-(4d-1)=12-11=1$.

3) $d=4$ та $D=5 \Rightarrow N=dD=20$. Замість вибору $d=4$ Миколи вибирає $d=5$ і записує на дошку число $N-(4d-1)=20-19=1$.

Таким чином перемагає Микола. Якщо після ходу Каті на дошці виникає число 8, 12 чи 20, то Микола записує на дошку число 1. Інакше, він робить абсолютно довільні припустимі ходи. За таких умов після його ходів не може на дошці з'явитися число 5.

3. Назвемо прямокутний трикутник ABC *особливим*, якщо довжини його сторін AB, BC та CA цілі числа, та на кожній з цих сторін є деяка точка X (відмінна від вершин ΔABC), для якої довжини відрізків AX, BX та CX – цілі числа. Знайдіть принаймні один особливий трикутник.

(Рожкова Марія)

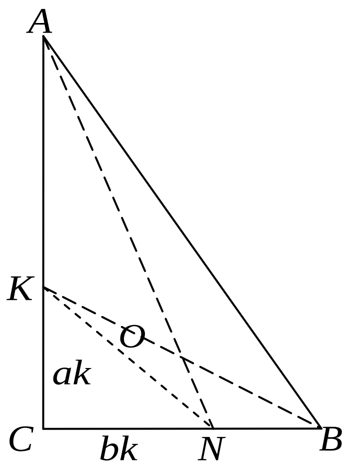

Рис. 11

***Відповідь*:** наприклад, $AC=48$, $BC=36$, $AB=60$.

***Розв'язання*.** Нехай у ΔABC прямий кут при вершині C. Тоді для довільного трикутника, у якого гіпотенуза – парне число, шуканою точкою є середина гіпотенузи (рис. 11).

Нехай тепер $BC=an$, $AC=bn$, $AB=cn$, $n\in N$ та $a^2+b^2=c^2$. Нехай $K\in AC$, $N\in BC$, $CN=bk$, $CK=ak$, $k\in N$. Таким чином достатньо, щоб цілими були відстані $AN=b\sqrt{n^2+k^2}$

та $BK = a\sqrt{n^2+k^2}$. Таким чином достатньо, щоб $n^2+k^2=m^2$ для деякого $m \in N$ та $bk < an$ і $ak < bn$.

Підберемо такі дані: $a=3$, $b=4$, $c=5$, $k=5$, $n=12$, $m=13$, звідки $an=36$, $bn=48$, $ak=15$, $bk=20$. Маємо такі відрізки:

$$AC=48,\ CK=15,\ BC=36,\ CN=20,\ AB=60.$$

4. Нехай m та n – натуральні числа, причому жодне з них не кратне 6. Прямокутник $m\times n$ виклали квадратами 2×2 та 3×3. Доведіть, що цей прямокутник можна викласти квадратами принаймні одного з видів 2×2 або 3×3.

(Туркевич Едвард)

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок, коли одне з чисел не ділиться на два, а інше – не ділиться на три. Нехай, не обмежуючи загальності, m – не ділиться на 2, а n – не ділиться на 3, пр. цьому m – ширина, n – висота прямокутника.

Зафарбуємо у темний колір рядки прямокутника $m\times n$ з номерами $3k$ та $3k+2$, $k\in N$ (рис. 12). Зафарбованих рядків у нас непарна кількість, а саме $2[\frac{1}{3}n]+1$, тому всього зафарбованих клітинок – непарна кількість, бо в рядку m – непарна кількість зафарбованих клітин. Оскільки кожен квадрат 2×2 та 3×3 покриває парну кількість зафарбованих клітинок, то у цьому випадку викладання прямокутник квадратами 2×2 та 3×3 неможливе.

Залишається лише розглянути випадки, коли m та n одночасно кратні 2, або 3. Але тоді потрібне розрізання на квадрати 2×2 у першому випадку, або квадрати 3×3 у другому випадку очевидні.

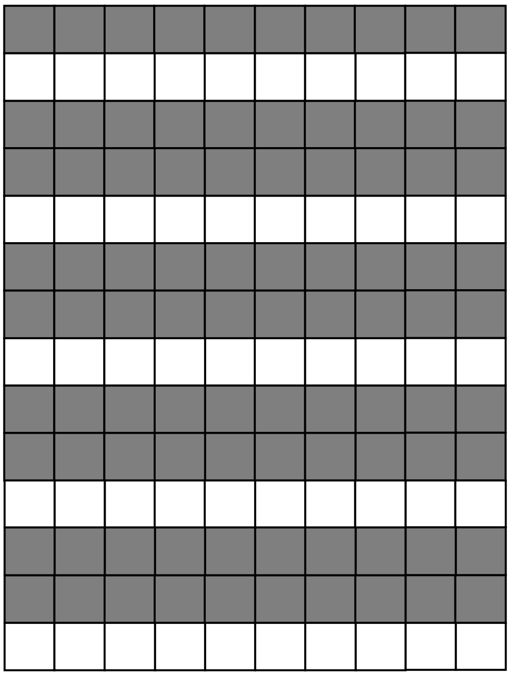

Рис. 12

5. Знайдіть усі додатні чисел x, y, z, що задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)\le (z+1)^2,\\ (\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{y}+1)\le (\frac{1}{z}+1)^2.\end{cases}$$

(Кукуш Олександр)

Відповідь: $(t,\ t,\ t)$ для довільного $t>0$.

Розв'язання. Для зручності розглянемо змінні $a=x+1>1$, $b=y+1>1$ та $c=z+1>1$. Тоді перша нерівність набуває вигляду $ab\le c^2$. Другу нерівність перетворимо таким чином, з використанням першої:

$$\frac{ab}{(a-1)(b-1)} \le \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{c-1}\right)^2 \le \left(1+\frac{1}{\sqrt{ab}-1}\right)^2 = \frac{ab}{(\sqrt{ab}-1)^2} \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{ab}-1)^2 \le (a-1)(b-1) \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\le 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\le 0 \Leftrightarrow a=b,$$

При цьому рівність можлива лише якщо усі переходи робляться по знаку дорівнює. Тому має справджуватися рівність: $ab=c^2 \Leftrightarrow a=b=c \Leftrightarrow x=y=z$.

Альтернативне розв'язання. Зробимо таку заміну: $x=\mathrm{tg}^2\alpha$, $y=\mathrm{tg}^2\beta$, $\alpha, \beta\in(0, \frac{\pi}{2})$. Нехай трійка $(x,\ y,\ z)$ задовольняє умови, тоді

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos^2\alpha\cos^2\beta} \le (z+1)^2, \\ \dfrac{1}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} \le \left(\dfrac{1}{z}+1\right)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \ge \dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta} - 1, \\ \dfrac{1}{z} \ge \dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta} - 1, \end{cases} \Rightarrow 1 \ge \left(\dfrac{1}{\cos\alpha\cos\beta} - 1\right)\left(\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} \ge \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta} \Rightarrow$$

$$\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) \ge 1 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow x = y.$$

З системи нерівностей маємо, що

$$\begin{cases} (x+1)^2 \le (z+1)^2, \\ (\tfrac{1}{x}+1)^2 \le (\tfrac{1}{z}+1)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le z, \\ \tfrac{1}{x} \le \tfrac{1}{z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le z, \\ z \le x, \end{cases} \Rightarrow x = z,$$

що й дає шуканий розв'язок.

4.1. Скількома різними способами можна покрити квадрат 4×4, що складається з 16 квадратиків 1×1, п'ятьма прямокутниками 3×1 так, щоб рівно один квадратик 1×1 лишився непокритим?

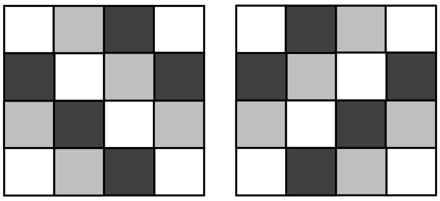

Рис. 13

Відповідь: 16.

Розв'язання. Пофарбуємо квадратики 1×1 двома способами, як це показане на рис. 13. Оскільки при будь-якому розташуванні квадрату 3×1 він покриває по одному квадратику кожного кольору, то не покритим може лишитися лише білий квадратик (бо їх у кожному випадку по 6, а сірих та чорних по 5). Однакові позиції білі квадратики займають лише у кутах квадрату 4×4. Тому є 4 варіанти з непокритим квадратиком. Зрозуміло, що кількість покриттів для кожного випадку однакова. Неважко порахувати, що усього є чотири варіанти (рис. 14). Знизу відрізається горизонтальний прямокутник 3×1, і маємо три варіанти, якщо він не відрізається – маємо ще один варіант. Загалом – 16 варіантів.

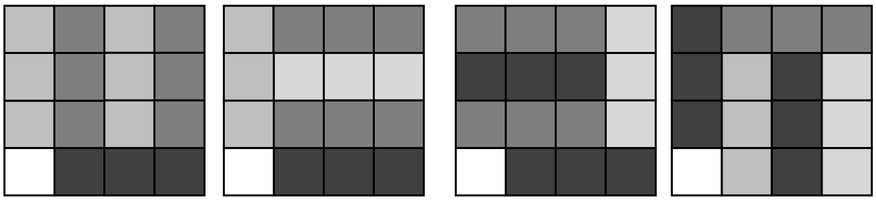

Рис. 14

5.1. Для додатних чисел x, y, z, t доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4} + \frac{y^8+1}{y^4} + \frac{z^8+1}{z^4} + \frac{t^8+1}{t^4} \ge 2\cdot\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}\right).$$

Розв'язання. Перепишемо нерівність таким чином:

$$(x^4+\tfrac{1}{z^4}+z^4+\tfrac{1}{y^4}) + (y^4+\tfrac{1}{t^4}+t^4+\tfrac{1}{z^4}) + (z^4+\tfrac{1}{x^4}+x^4+\tfrac{1}{t^4}) + (t^4+\tfrac{1}{y^4}+y^4+\tfrac{1}{x^4}) \ge$$

$$\ge 4\cdot(\tfrac{x}{y}+\tfrac{y}{z}+\tfrac{z}{t}+\tfrac{t}{x}).$$

Для кожної дужки зробимо такі перетворення:

$$(x^4+\tfrac{1}{z^4}) + (z^4+\tfrac{1}{y^4}) \ge 2\sqrt{x^4\cdot\tfrac{1}{z^4}} + 2\sqrt{z^4\cdot\tfrac{1}{y^4}} = \tfrac{2x^2}{z^2} + \tfrac{2z^2}{y^2} \ge 4\sqrt{\tfrac{x^2}{z^2}\cdot\tfrac{z^2}{y^2}} = \tfrac{4x}{y},$$

звідки й випливатиме те, що й треба було довести.

11 клас

1. Знайдіть усі розв'язки рівняння $\frac{2\cos 2x}{6-3\cos 3x}=\frac{\cos 2x+1}{\cos 3x+2}$, якщо $-\pi \le x \le \pi$.

Відповідь: $x=0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння таким чином: $\frac{2\cos 2x}{\cos 2x+1}=\frac{6-3\cos 3x}{\cos 3x+2}$. Розглянемо такі дві функції: $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ та $g(x)=\frac{6-3x}{x+2}$, $x\in(-1;\,1]$. Якщо $x\in(-1;\,1)$, то можна записати, що

$$f(x)=\tfrac{2x}{x+1}<1 \Leftrightarrow 2x<x+1 \Leftrightarrow x<1,\; g(x)=\tfrac{6-3x}{x+2}>1 \Leftrightarrow 6-3x>x+2 \Leftrightarrow x<1.$$

Таким чином задана рівність можлива лише за умови $\cos 2x=\cos 3x=1$. Те ж саме можна отримати, якщо побудувати ескізи графіків відповідних функцій.
Щодо останнього рівняння, то має одночасно виконуватися рівність:
$2x=2\pi k$, та $3x=2\pi l\;\; k,l\in Z \;\Rightarrow$ з першого рівняння маємо, що $x\in\{-\pi,\,0,\,\pi\}$, а з другого розуміємо, що відповіддю є лише $x=0$.

2. У гострокутному трикутнику ABC, у якому $AB<AC$, точка M – середина сторони BC, K – середина ламаної BAC. Доведіть, що $\sqrt{2}KM>AB$.

(Науменко Георгій)

Розв'язання. Нехай N – середина сторони AC. За умовою точка K – середина ламаної BAC, значить (рис. 15):

$$\tfrac{1}{2}(AB+AC)=KC=KN+NC=KN+\tfrac{1}{2}AC \Rightarrow KN=\tfrac{1}{2}AB=NM.$$

З теореми косинусів для ΔKNM маємо, що:

$$KM^2=KN^2+NM^2-2\cdot KN\cdot NM\cdot\cos\angle KNM \Rightarrow$$
$$KM^2=2KN^2(1-\cos\angle KNM)=\tfrac{1}{2}AB^2(1+\cos\angle CNM).$$

З того, що ΔABC гострокутний, то $\angle CNM=\angle CAB<90^\circ \Rightarrow KM^2>\frac{1}{2}AB^2$, що й треба було довести.

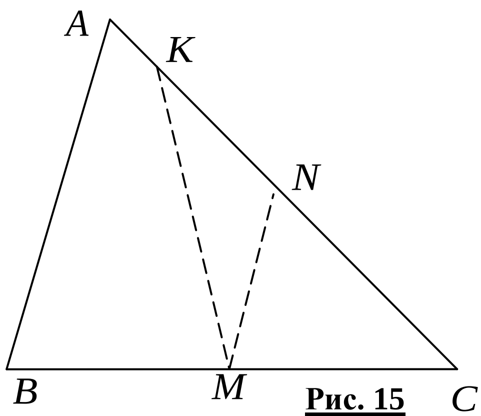

Рис. 15

3. Розглянемо таблицю $m\times n$, $m,n\ge 2$ (m рядків, що занумеровані числами $1,2,\dots,m$ та n стовпчиків, що занумеровані числами $1,2,\dots,n$), яка заповнена натуральними числами. Нехай b_i – НСК (найменше спільне кратне) усіх чисел, що стоять в i-му рядку, $1\le i\le m$, і визначимо число B – НСД (найбільший спільний дільник) чисел $(b_1,b_2,\dots,b_m)$. Також нехай c_j є НСД усіх чисел, що стоять в j-му стовпчику, $1\le j\le n$, та визначимо число C – НСК чисел $(c_1,c_2,\dots,c_n)$. Чи можна стверджувати, що обов'язково або B ділиться націло на C, або навпаки, C ділиться націло на B?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: B ділиться націло на C.
Розв'язання. Розглянемо довільне просте число p, і степені з якими це число входить у розкладі на прості множники усіх чисел таблиці. Замінимо усі числа таблиці цим показником. Нехай тепер

таблиця $m\times n$ заповнена числами $\alpha_{i,\ j}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Тепер β_i – це найбільше з чисел відповідного рядка, та B – найменше з чисел β_i. Аналогічно, γ_j – це найменше з чисел відповідного стовпчика та Γ – найбільше з чисел γ_j. Таким чином, числа B та Γ розташовані в цій таблиці. Якщо вони розташовані в одному рядку чи стовпчику, то $\mathrm{B}\ge\Gamma$ за побудовою. Якщо в різних, то знайдемо число Δ, що розташовано на перетині стовпчика числа Γ та рядка числа B. Тоді за побудовою $\Gamma\le\Delta\le\mathrm{B}$. Це означає, що степінь числа p в розкладі числа B не менша за аналогічний степінь в числі C. Оскільки p – довільне число, то $C\mid B$.

4. Задача 5 за 10 клас.

5. Чи існує зв’язна фігура F, що складається з клітин 1×1, яка задовольняє такі умови:

- вона складається з s клітин 1×1 і не є прямокутником;
- будь-який прямокутник завбільшки $k\times s$, де $k\ge s$ можна розрізати на фігурки, що співпадають з F?

Фігура, що складається з клітин 1×1, називається *зв'язною*, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: так, існує.

Розв’язання. Розглянемо фігуру *куточок*, що складається з трьох клітин 1×1. На них легко можна розрізати прямокутники 3×2 як і 2×3, а також 9×5 (рис. 16). Нехай тепер кожний квадратик 1×1 це прямокутник 2×3. Тоді куточок став новою фігуркою, яку ми й вважатимемо як F (рис. 17), тоді $S=18$.

Назвемо прямокутник $m\times n$ *гарним*, якщо його можна розрізати на фігурки F. Очевидно, що якщо якійсь прямокутник можна розрізати га гарні прямокутники, то й він гарний. З наведених розрізаних прямокутників 3×2, 2×3 та 9×5 можна завдяки різній орієнтації 2×3 можна отримати, що гарними є прямокутники 18×15, 6×6 та 4×9.

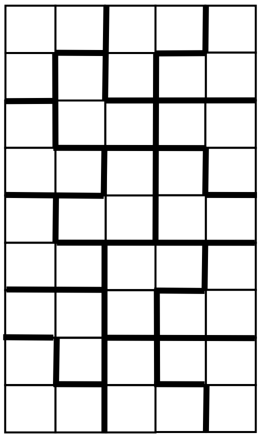

Рис. 16

Проведемо доведення ММІ. Для $k\times18$ маємо такі випадки.
$k=18$, ріжемо 18×18 на шість квадратів 6×6.
$k=19$, спочатку від 19×18 відрізаємо 18×15, той, що залишився 4×18 розрізаємо на два 4×9.
$k=20$, ріжемо на десять прямокутників 9×4.
$k=21$, спочатку від 21×18 відрізаємо 18×15, той, що залишився 6×18 розрізаємо на три квадрати 6×6.
Нехай тепер гарними є усі прямокутники $k\times18$ для $k\ge21$. Розглянемо прямокутник $(k+1)\times18$. Розрізаємо його на $(k-3)\times18$ та 4×18. Кожний з них є гарним за припущенням індукції або за очевидним розрізанням на інші гарні прямокутники.
Твердження доведене.

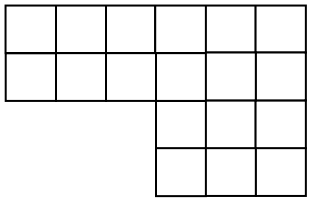

Рис. 17

4.1. Для додатних чисел x, y, z, добуток яких дорівнює 1, доведіть нерівність:

$$\frac{x^6+2}{x^3}+\frac{y^6+2}{y^3}+\frac{z^6+2}{z^3}\ge3\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right).$$

Розв’язання. Перепишемо ліву частину таким чином:

$$x^3+y^3+z^3+2(\tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3}).$$

З нерівності між середніми

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\geq 3\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{(xyz)^3}}=3.$$

Тепер завершимо доведення:

$$x^3+y^3+z^3+2(\tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3})\geq x^3+y^3+z^3+\tfrac{1}{x^3}+\tfrac{1}{y^3}+\tfrac{1}{z^3}+3=$$
$$=(x^3+\tfrac{1}{y^3}+1)+(y^3+\tfrac{1}{z^3}+1)+(z^3+\tfrac{1}{x^3}+1)\geq 3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{x^3}{y^3}}+3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{y^3}{z^3}}+3\cdot\sqrt[3]{\tfrac{z^3}{x^3}},$$

що й треба було довести.

5.1. *Полігоном* назвемо зв'язну по стороні фігуру, що складається з квадратиків 1×1. Відомо, що прямокутник, відмінний від квадрату, можна розрізати на 8 попарно різних полігонів. Полігони вважаються однаковими, якщо їх можна сумістити шляхом зсувів та перевертань. Яку найменшу площу може мати цей прямокутник?

Відповідь: 26.

Розв'язання. Порахуємо кількість різних полігонів мінімальної площі. Площі 1 такий полігон рівно 1, площі 2 такий полігон також 1, площі 3 таких полігонів 2. Таким чином мінімальна площа площі 2 такий полігон також 8 полігонів може складати $1\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+4\cdot 4=25$. Але тоді це має бути прямокутник 25×1 (бо квадрат 5×5 заборонений за умовою). Для такого прямокутника очевидно, що він може бути розрізаний лише на прямокутники $k\times 1$ і матиме площу щонайменше $1+2+\ldots+8=36>25$. Таким чином найменша можлива площа – 26. Приклад розрізання прямокутника 13×2 на рис. 18.

Рис. 18