

Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки Миколаївської облдержадміністрації

Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: Математики

Секція: Математичне моделювання

## Математичне моделювання процесів теплообміну в підземній ділянці геотермального джерела енергії

*Роботу виконав:*

Белоруський Олексій Андрійович,  
учень 11 класу Миколаївського  
муніципального колегіуму імені  
Володимира Дмитровича Чайки  
Миколаївської міської ради

*Науковий керівник:*

Гайша Олександр Олександрович,  
Завідувач кафедри вищої математики  
Національного університету  
кораблебудування, кандидат технічних  
наук, доцент

*Педагогічний керівник:*

Остапчук Леонід Володимирович,  
Заслужений вчитель України, вчитель  
математики Миколаївського  
муніципального колегіуму імені  
В.Д.Чайки Миколаївської міської ради  
Миколаївської області

## ТЕЗИ

науково-дослідної роботи «Математичне моделювання процесів теплообміну в підземній ділянці геотермального джерела енергії» Белоруського Олексія

Андрійовича, Миколаївське територіальне відділення МАН

Миколаївський муніципальний колегіум ім. В.Д. Чайки, 11 клас, м. Миколаїв

Науковий керівник: к.т.н., доц., Гайша Олександр Олександрович

У роботі, відповідно до мети дослідження, розроблено математичну модель процесу теплообміну у підземній ділянці геотермального джерела енергії. Тематика, безперечно, є актуальною, як і усі дослідження, пов'язані з альтернативною енергетикою.

У роботі розглянуто теплообмін при ламінарному режимі течії води у трубах (тобто радіальні потоки бралися тільки за рахунок теплопровідності). При розрахунку теплопровідності використані умови першого роду (що в першому наближенні допустиме, зважаючи на термостатованість підземних порід). В результаті створення моделі отримане нелінійне стаціонарне рівняння теплопровідності, яке розв'язувалося чисельним методом сіток. На основі створеної моделі розрахована середня інтегральна (по перерізу) температура та потужність, яку дає труба, як функція довжини труби. Встановлено, що ламінарний режим течії не є достатньо ефективним і краще використовувати турбулентний.

Робота має суто прикладний характер, адже створена математична модель запрограмована у середовищі Mathcad і її можна використовувати при проектуванні підземних частин геотермальних джерел енергії. При цьому важливими параметрами, що мають оптимізуватися є довжина цієї підземної частини, діаметр труби (або площа перерізу при некруглому профілі) та швидкість прокачування води. Також у моделі можна міняти й параметри теплоносія, якщо таке передбачено технічним завданням проекту.

## ЗМІСТ

1. Вступ.....	4 стр.
2. Розділ 1. Особливості будови, функціонування та застосування теплових насосів .....	6 стр.
3. Розділ 2. Розрахунок теплового режиму ламінарної течії.....	14 стр.
4. Висновки.....	24 стр.
5. Список використаної літератури.....	25 стр.

## ВСТУП

Розвиток та використання альтернативних та відновлювальних джерел енергії (вітрової і сонячної енергії, біопалива, тощо) є вагомим фактором для зміцнення енергетичної безпеки та зменшення негативного техногенного впливу на навколишнє природне середовище. Важливість розвитку альтернативної енергетики є очевидною, адже вона відіграє вирішальну роль у зменшенні парникових викидів, зниженні негативного впливу на довкілля, підвищує безпеку енергопостачання, і т.п.

Тому нині перед усіма вченими світу стоїть проблема знаходження та розробки нових альтернативних джерел енергії. У даній роботі буде розглянуто один з типів альтернативної енергії - тепловий насос, який бере енергію з термостатованого навколишнього середовища, а саме, з-під поверхні землі (геотермальний тепловий насос), та перетворює її у вигляд тепла, як результат значно зменшуючи витрати на опалення.

Розглянувши переваги теплових насосів, слід упевнитися, що він може забезпечувати необхідну потужність, а також створити методику розрахунку параметрів роботи теплових насосів (в даній роботі розглянемо тільки підземну частину геотермального теплового насосу, в якій відбувається теплообмін).

Отже, нехай є труба певного діаметру і певної довжини, закопана в землі, при цьому через неї прокачують воду, яку беруть з озера, ставка чи інших водних джерел. Оскільки температура землі на певній глибині залишається постійною, а температура води в холодну пору значно змінюється, то при проходженні води по трубах відбувається теплообмін між нею та землею (у першому наближенні використаємо граничні умови першого роду) – під землею вода прогрівається приблизно до  $+10\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

У даній роботі (через її обмежений обсяг) розглянемо лише ламінарний режим потоку, і визначимо, чи доцільно використовувати його, і в яких саме випадках. Отже, **метою роботи є:** створення математичної моделі процесу

теплообміну в підземній частині геотермального джерела тепла та розрахунки параметрів роботи підземної частини теплонасосу: швидкості води (при ламінарному режимі течії), діаметру та необхідної довжини труби, тощо.

Об'єкт дослідження – процес теплообміну води, що тече по підземній трубі геотермального джерела енергії, з навколишнім середовищем.

Предмет дослідження – рівняння та умови вказаного теплообміну.

Методи дослідження: методи математичного моделювання, методи теорії тепломасообміну, чисельні методи розв'язку диференціальних рівнянь, зокрема метод сіток.

Робота має прикладний характер і її доцільно використовувати при проектуванні оптимальної підземної частини джерела геотермальної енергії (визначаючи діаметр та довжину труби, швидкість прокачування води крізь неї – за допомогою реалізованого у середовищі Mathcad програмного продукту).

Науковим результатом дослідження є робоча математична модель теплообміну у підземній частині геотермального джерела енергії (при ламінарному режимі течії).

Усі положення, описані в роботі, отримані автором самостійно: постановка задачі, математична модель та її розв'язок, візуалізація та аналіз результатів.

## РОЗДІЛ 1. ОСОБЛИВОСТІ БУДОВИ, ФУНКЦІОНУВАННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ТЕПЛОВИХ НАСОСІВ

Схематично тепловий насос можна представити у вигляді робочого контуру, який складається з чотирьох основних елементів, - випарника, компресора, конденсатора та скидного клапана. До робочого контуру примикає первинний (зовнішній) контур, в якому циркулює робоча речовина (вода, антифриз чи повітря), що збирає тепло з навколишнього середовища, і вторинний - вода в системах опалення та гарячого водопостачання будівлі.

Випарник - пластинчастий теплообмінник, де з одного боку циркулює холодний рідкий холодоагент (речовина з низькою температурою кипіння, звичайно фреон), а з іншого боку на протитоку циркулює робоча речовина первинного контуру.

Первинний контур - це контур з низькопотенційною тепловою енергією (енергія, температури якої недостатньо для безпосереднього нагрівання опалювального контуру). Як джерело енергії первинного контуру може бути використане тепло ґрунту (ґрунтові зонди з антифризом), ґрунтових вод (дві свердловини: що подає і поглинає), зовнішнього повітря і т.п.

У випарнику холодоагент забирає тепло первинного контуру, закипає і випаровується. Отже, знижується температура виходу первинного контуру.

Компресор всмоктує газоподібний холодоагент, стискає його, різко підвищуючи таким чином його температуру. Гарячий газоподібний холодоагент виштовхується в конденсатор.

Конденсатор - із влаштування такої ж теплообмінник, як і випарник, де з боку робочого контуру циркулює гарячий холодоагент, а з боку вторинного контура - вода або антифриз.

Гарячий холодоагент, вступаючи в тепловий контакт з теплоносієм системи опалення або водою з системи гарячого водопостачання (ГВП), конденсується, передаючи своє тепло системі опалення чи ГВП. При цьому

рідкий фреон стікає на дно конденсатора, звідки за рахунок перепаду тиску продавлюється через скидний клапан у випарник. Температура його при цьому різко знижується. Після цього робочий цикл починається спочатку. Основна відмінність теплового насоса від інших генераторів теплової енергії, наприклад, електричних, газових або дизельних котлів, полягає в тому, що при виробництві тепла 75% енергії береться з навколишнього середовища, а інші 25% - це електрична енергія, необхідна для роботи компресора теплового насоса.

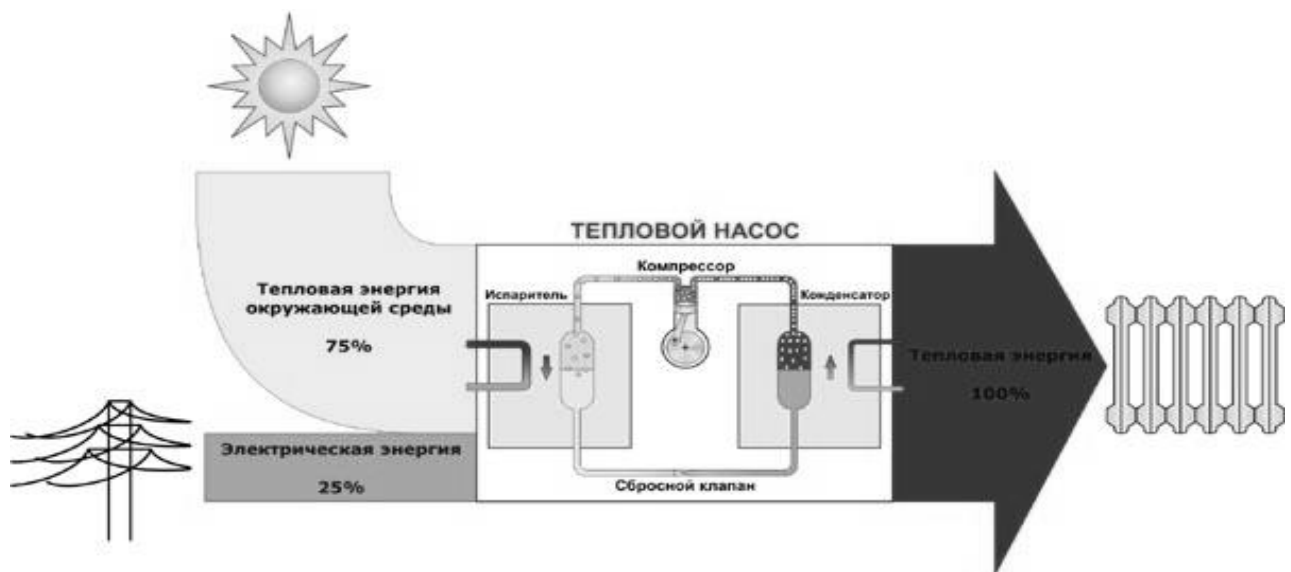


Рис. 1.1. Схема роботи теплового насосу.

Тепловий насос «викачує» сонячну енергію, накопичену за теплу пору року в навколишньому середовищі. Тобто для виробництва 4 кВт теплової енергії необхідно витратити всього лише 1 кВт електричної енергії - у наявності істотна економія на оплаті електроенергії.

Співвідношення вироблюваної теплової енергії і споживаної електричної енергії називається коефіцієнтом трансформації (або ККД теплового насоса), і є показником ефективності його роботи. Чим менше різниця температур між природним джерелом теплової енергії і подачею опалювального контуру, тим коефіцієнт трансформації більше. Це фактично означає, що 60-75% потреб будівлі в тепlopостачанні тепловий насос

забезпечує безкоштовно, і тепло обійдеться в середньому в 4,5 рази дешевше, ніж при використанні електричних обігрівачів.

Геотермальний тепловий насос за принципом роботи схожий на звичайний кондиціонер реверсивного типу (здатні опалювати і охолоджувати), але має розширені функції. На відміну від кондиціонерів, геотермальний тепловий насос адаптований для роботи за будь-яких погодних умовах і мінусових температурах. Головна проблема кондиціонерів - зменшення ефективності та зупинка кондиціонерів при мінусових температурах, коли опалення особливо важливо - вирішена в геотермальних теплових насосах.

Принцип роботи теплового насосу відображений в циклі Карно, опублікованому в 1824 р. в його дисертації, і вивчається в шкільному курсі фізики. Практичну теплонасосну систему запропонував лорд Кельвін у 1852 р. під назвою "помножувач тепла". Принципова схема приведена на рис.1.2.



Рис. 1.2. Принципова схема теплового насосу.

Відповідно до зображеного принципу дії, тепловий насос бере теплову енергію з одного міста, переносить (перекачує) її, та віддає у інше місце. Наприклад, у звичайному холодильнику тепло відбирається морозильною камерою з холодильника та викидається у кухню. При цьому продукти в морозилці охолоджуються, а задня стінка холодильника стає гарячою.



Принцип опалення геотермальним тепловим насосом заснований на зборі тепла з природи, що оточує будівлю, і викид зібраного тепла в систему опалення (або гарячого водопостачання) будівлі. При опаленні геотермальним теплонасосами, просто кажучи, блок закопується в ґрунт або занурюється у водойму поряд з будівлею. При цьому, незалежно від температури повітря у дворі, блок залишається вільним від льоду, ефективність теплопередачі залишається високою.

Для збору тепла незамерзаюча рідина тече по трубі, розташованій у ґрунті або водоймі біля будівлі, до теплового насосу. Тепловий насос, подібно до холодильника, відбирає тепло і, відповідно, охолоджує рідину приблизно на 5°C. Відібрані тепловим насосом градуси передаються системі опалення або на підігрів гарячої води. Рідина знову тече по трубі у ґрунті або воді, відновлює свою температуру і надходить до теплового насосу.

Теплова енергія є в будь-якого предмета з температурою вище мінус двісті сімдесят три градуси Цельсія - так званий "абсолютний нуль". Тобто тепловий насос може відібрати тепло у будь-якого предмету - землі, водойми, льоду, підземної скелі, підземної скали, і т.д.

У кліматичних умовах України для опалення будинку енергія береться з ґрунту (або водойми) та віддається до системи опалення будинку. Якщо ж будинок, наприклад влітку, потрібно охолоджувати (кондиціонувати), то відбувається зворотний процес - тепло забирається з будинку та скидається у землю (водойма). Той самий тепловий насос може працювати взимку на опалення, а влітку на охолодження будинку. Очевидно, що тепловий насос одночасно може виконувати впливають функції - гріти воду для гарячого водопостачання, кондиціонувати, гріти басейн, охолоджувати наприклад льодовий каток, підігрівати дахи і доріжки від льоду.

Тобто єдиний пристрій може виконати всі функції по тепло- та холодопостачанню будівлі.

Обмін теплом з навколишнім середовищем геотермальні теплові насоси здійснюють наступними основними способами.

Насос з відкритим циклом - з підземного потоку (підземної скали) забирається підземна вода, що подається в розміщений усередині будинку тепловий насос, вода віддає / забирає тепло у теплового насоса, і повертається в підземний потік на відстані від місця забору. Плюсом такого способу є можливість одночасно отримати воду для водопостачання будинку. Відкриті системи є дуже ефективними, оскільки температура підземної води є відносно високою і цілий рік стабільною. Використання води з свердловини не завдає шкоди ґрунтових вод, не змінює рівень ґрунтових вод у водному обрії, оскільки відкриту систему можна розглядати як сполучені судини, де вода, забирають з одного колодязя, прямує назад під землю через другий колодязь, не змінюючи загальний рівень води. Коректно, відповідно до нормативів споруджені свердловини забезпечують безпечну для навколишньої природи стабільну роботу системи опалення.

Насос з закритим циклом і водорозташовані теплообмінником - спеціальна рідина (теплоносій) прокачується по колекторам (трубок), що знаходяться у водоймі, і віддає / забирає тепло у води. Будинки доцільно опалювати теплової енергії відкритого водоймища в тому випадку, якщо будинок знаходиться від водойми ближче 100 метрів, і глибина водойми, а також берегова лінія відповідають умовам, необхідним для прокладання колектора. Плюсом такого способу є його відносна дешевизна. Розподіляються по поверхні озера колектори (трубки) перед заповненням теплоносієм і зануренням їх на дно.

Насос з закритим циклом і горизонтальним теплообмінником, розміщеним в землі - трубки (колектори), в яких прокачується теплоносій, розміщені горизонтально на глибині не менше метра від поверхні землі. Такий теплообмінник зазвичай називають поверхневим колектором. Основною небезпекою є необачність при проведенні землекопних робіт у зоні знаходження поверхневого колектора. Для сучасно житлового будинку з опалювальної площею в 200 м<sup>2</sup> під основу колектора потрібно близько 500 м<sup>2</sup> поверхні ґрунту. Під час прокладання колектора поблизу дерев трубу

колектора не слід укладати ближче, ніж 1,5 метра від крони. Правильно вибраний за розмірами і правильно укладений ґрунтовий колектор не впливає негативно ні на ріст рослин, ні на екологічні умови.

Насос з закритим циклом і вертикальним теплообмінником - трубки, в яких прокачується теплоносій, розміщені вертикально в землі і йдуть у глибину землі до 200 метрів (зазвичай 50-100 метрів). Такий теплообмінник зазвичай називають зондом. Як відомо, на глибині 15-20 метрів від поверхні земля має стабільну температуру 10-12 градусів Цельсія незалежно від пори року. Зі збільшенням глибини температура землі підвищується. Цей спосіб забезпечує найвищу ефективність роботи теплонасосу, мала витрата електроенергії і дешеве тепло - на 1 кВт електроенергії отримують до 5 кВт теплової енергії, але вимагає великих початкових капіталовкладень.

Суттєва проблема повітряних теплонасосів полягає в тому, що розміщений в квартирі теплообмінник при температурі на вулиці біля плюс 5 градусів Цельсія починає покриватися кригою через замерзаючого конденсату, різко знижується теплопередача, ефективність теплонасосу зменшується. При подальшому зниженні температури зовнішнього повітря ефективність теплонасосу стає близькою до нуля, повітряний тепловий насос переходить на звичайне електроопалення, що різко збільшує витрати електроенергії, або повністю припиняється.

Кількість компресорів в теплонасосі - один або два. Теплонасоси з двома компресорами значно дорожче однокомпресорних, але більш надійні, мають більший моторесурс. Крім того, при виході з ладу одного з компресорів, можливо частково опалюватися одним компресором до завершення ремонту.

Один з найголовніших показників теплового насоса - його ефективність, або його теплова потужність, електроспоживання та ККД - COP. У різних моделей і виробників ефективність може відрізнятись в півтора-два рази.

Розглянемо конструкцію зовнішнього колектора теплонасосу. В якості зовнішнього колектора більшість виробників передбачає поліетиленову трубу діаметром 25 - 40 міліметрів з циркуляцією незамерзаючої рідиною - водним розчином гліколя. Існують також геотермальні теплонасоси з мідною трубою діаметром 6 - 10 міліметрів і циркуляцією фреону.

Поліетиленова труба в залежності від діаметру має товщину стінки 2 - 2,4 міліметра. Так, наприклад, труба діаметром 40 міліметрів має товщину стінки 2,3 - 2,4 міліметра. Така товщина забезпечує високу надійність і міцність труби - людина вагою 110 кілограм трубу не здавлює.

В якості гліколя зазвичай використовують нетоксичний пропіленгліколь, що застосовується в харчовій промисловості. Неприпустимо використання замість пропіленгліколя етиленгліколей (автомобільний тосол), який трохи дешевше, але отруйний при попаданні в навколишнє природу або всередину людини.

Геотермальні теплонасоси з поліетиленовою трубою і водним розчином є конструктивно складнішими, але більш ефективними і надійними, ніж з мідною трубою. Теплонасоси з мідною трубою і фреоном конструктивно простіше, але значна (часто багатокілометрова) довжина мідної трубки з фреоном під тиском потенційно більш небезпечна, ніж поліетиленова. Витік фреону найбільш часта причина неполадок теплонасосів. Також малий діаметр мідної трубки призводить до великого гідравлічного опору, вимагає великих витрат енергії на прокачування. Тому геотермальні теплонасоси великої потужності з мідною трубою і фреоном не випускаються.

Великим плюсом деяких систем геотермального теплонасосу є можливість прямого використання влітку підземного холоду для охолодження / кондиціонування будівлі. Наприклад, в системах з відкритим циклом підземна вода, що має температуру близько 10 градусів Цельсія, звичайним насосом влітку подається в будівлю і поширюється по активних конвекторах (фанкойлах), які кондиціонують будівлю, після чого

повертається під землю. При цьому компресор теплонасосу не включається, електроенергія витрачається лише на прокачування води. На витрачений один кіловат електроенергії можна отримати до 30 кіловат холоду, що в 10 разів ефективніше кондиціонера. Такий спосіб кондиціонування називають "вільним" або "пасивним". Таке охолодження особливо ефективно при відкритому способі або способі з вертикальним теплообмінником.

## РОЗДІЛ 2. РОЗРАХУНОК ТЕПЛОВОГО РЕЖИМУ ЛАМІНАРНОЇ ТЕЧІЇ

Згідно методу Пуазейля оцінимо розподіл швидкості по перерізу труби  $v(r)$ . Рух рідини вважатимемо ламінарним. Щоб це обґрунтувати знайдемо число Рейнольдса:

$$Re = \frac{v_{cp} d}{\vartheta}$$

де,  $v_{cp}$  - осереднена по перерізу труби швидкість

$d$  - характерний розмір, в нашому випадку – діаметр труби

$\vartheta$  – кінетична в'язкість води,  $\vartheta = \frac{\eta}{\rho}$

$\eta$  – динамічна в'язкість води  $\eta = 0,01 \text{ Па} \cdot \text{с}$

$$\vartheta = \frac{0,01 \text{ Па} \cdot \text{с}}{1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = 10^{-5} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$$

Режим течії ламінарний при  $Re \leq 1000$  (турбулентний при  $Re \geq 2300$ , 1000-2300 - перехідний).

Якщо труба матиме діаметр  $d = 0,1$  м,  $v_{cp} = 0,1$  м/с, то  $Re = \frac{0,1 \cdot 0,1}{10^{-5}} = 10^3$

- ламінарний. Діаметр  $d$  не може бути дуже великим через складну технологію прокладки великих труб (тим більше глибоко в землю). Середня швидкість має підбиратися за двома факторами: щоб вода встигала нагрітися в землі, а з іншого боку щоб забезпечувати необхідну потужність. Конкретне значення швидкості в подальшому слід оптимізувати.

Отже, якщо течія ламінарна, то розподіл швидкості по радіусу задаватимемо у вигляді:

$$v(r) = \frac{v_{\max}}{R^2} (R^2 - r^2),$$

де  $R$  - внутрішній радіус труби.

Зв'язок  $v_{cp}$  і  $v_{\max}$ :

$$v_{cp} = \frac{1}{S_{nep}} \iint_{S_{nep}} v(r) dS = \frac{1}{S_{nep}} \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) \cdot r dr d\alpha$$

$S_{nep}$  – площа перерізу труби  $S_{nep} = \pi R^2$ , тобто інтегруємо по всьому перерізу. Зручно це зробити в полярних координатах. У них  $dS = r dr d\alpha$ :

$$\begin{aligned} v_{cp} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v(r) r dr \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \frac{v_{max}}{R^2} (R^2 - r^2) r dr \cdot 2\pi = \frac{2v_{max}}{R^4} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \\ &= \frac{2v_{max}}{R^4} \left[ R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right] \Big|_0^R = \frac{2v_{max}}{R^4} \left[ R^2 \frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4} \right] = \frac{2v_{max}}{R^4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{v_{max}}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином знаючи  $v_{cp}$  легко знайти  $v_{max}$ , а отже і весь розподіл  $v(r)$ . При ламінарному режимі картина течії в трубі матиме вигляд як на рис. 2.1.

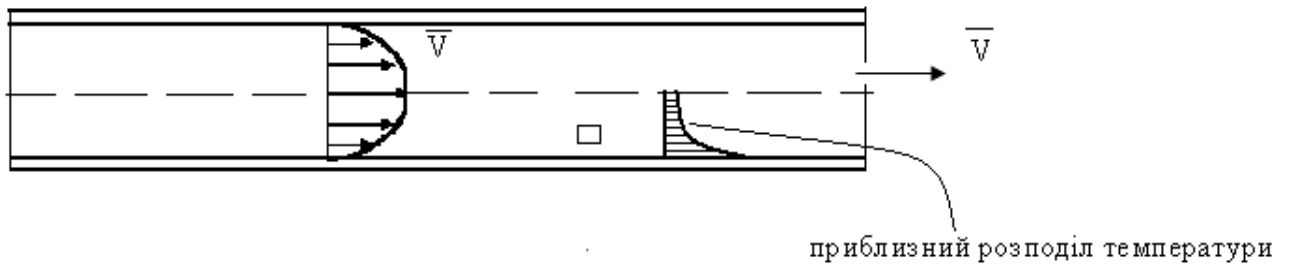


Рис. 2.1 Радіальний розподіл швидкості течії теплоносія при ламінарному режимі та температури; показано виділений елемент.

Виділимо у потоці води малий елемент висотою  $dz$ , товщиною  $dr$ , показаний на рис. 2.2.

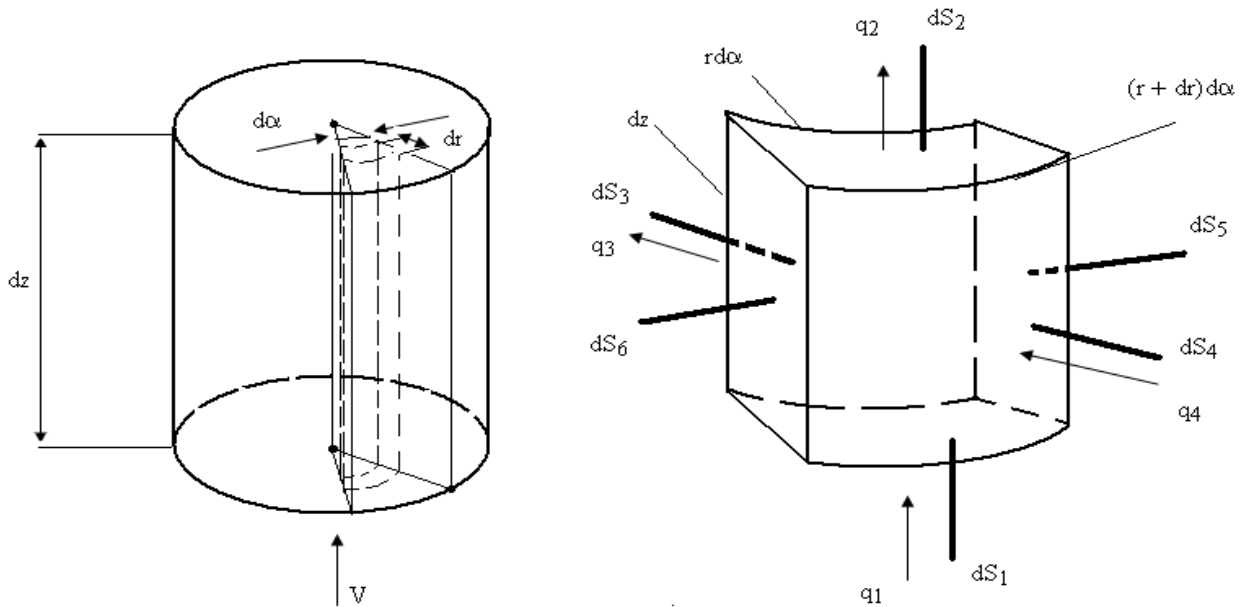


Рис. 2.2 Схема розташування виділеного елемента у геометрії труби та теплові потоки через нього.

На рис.2.2 введено наступні позначення:

$q_i$  - теплові потоки;

$m_i$  - потоки маси (які враховуватимемо в подальшій роботі тільки при турбулентності).

За час  $dt$  елемент сприймає теплоту:

$$dQ = c_g dm dT,$$

де  $dT$  - шукана величина (температура даного малого елемента);

$$dm = \rho dV = \rho dz \left[ d\alpha \frac{(r+dr)^2}{2} - d\alpha \frac{r^2}{2} \right] = \rho \frac{dz}{2} d\alpha [r^2 + 2rdr + dr^2 - r^2] = \rho \frac{dz}{2} d\alpha 2rdr = \rho r dr dz d\alpha.$$

З іншого боку  $dQ$  можна виразити за допомогою потоків типу тепла  $q_i$ :

$$dQ = q_4 S_4 dt - q_3 S_3 dt + q_1 S_1 dt - q_2 S_2 dt;$$

де  $dS_1 = dS_2 = r dr d\alpha$ ;

$dS_3 = dz r d\alpha$ ;

$dS_4 = dz((r+dr)d\alpha) = dz(r d\alpha + dr d\alpha) = dz r d\alpha$ ;



$$dS_5 = dS_6 = drdz.$$

Потоки через  $dS_5$  та  $dS_6$  рівні нулю через аксіальну симетрію задачі.

Потоки, що показані на рис. 2.2, можна розписати наступним чином:

$$q_1 = q_1' + q_1'', \text{ де}$$

$q_1'$  - кондуктивний потік обумовлений теплопровідністю по осі  $z$ , його знайдемо за законом теплопровідності Фур'є:

$$q_1' = -gradT = -\lambda \frac{dT}{dz};$$

$q_1''$  - конвективний потік, обумовлений переміщенням маси зі швидкістю  $v(r)$  по вісі  $z$ :

$$q_1'' = \frac{dQ''}{dS_1 dt} = \frac{c_\rho dm_1 T(r, z)}{dS_1 dt} = \frac{c_\rho \rho dS_1 v(r) dt T(r, z)}{S_1 dt} = c_\rho \rho v(r) T(r, z).$$

Аналогічно  $q_2 = q_2' + q_2''$ , де  $q_2'' = c_\rho \rho v(r) \left[ T(r, z) + \frac{dT}{dz} dz \right]$ , а

$$q_2' = -\lambda \left[ \frac{dT}{dz} + \frac{d^2 T}{dz^2} dz \right].$$

У радіальному напрямі переносу маси немає, так як розглядається ламінарна течія, отже потоки  $q_3$  і  $q_4$  чисто кондуктивні, обумовлені теплопровідністю (не конвенцією):

$$q_3 = -\lambda \frac{dT}{dr};$$

$$q_4 = -\lambda \left[ \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} dr \right].$$

Складемо рівняння теплового балансу для виділеного елемента

$$\begin{aligned}
& dQ = dQ \\
& c_{\rho} \rho r dr dz d\alpha \frac{dT}{dt} = -\lambda \left[ \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} dr \right] r dz d\alpha + \lambda \frac{dT}{dr} r dz d\alpha + \\
& + \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + c_{\rho} \rho v(r) T + \lambda \left[ \frac{dT}{dz} + \frac{d^2 T}{dz^2} dz \right] - c_{\rho} \rho v(r) \left[ T + \frac{dT}{dz} \right] \right] r dr d\alpha \\
& c_{\rho} \rho dr dz \frac{dT}{dt} = -\lambda \left[ \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2} dr \right] dz + \lambda \frac{dT}{dr} dz + \\
& + \left[ -\lambda \frac{dT}{dz} + c_{\rho} \rho v(r) T + \lambda \left[ \frac{dT}{dz} + \frac{d^2 T}{dz^2} dz \right] - c_{\rho} \rho v(r) \left[ T + \frac{dT}{dz} dz \right] \right] dr \\
& c_{\rho} \rho dr dz \frac{dT}{dt} = -\lambda \frac{dT}{dr} dz - \lambda \frac{d^2 T}{dr^2} dr dz + \lambda \frac{dT}{dr} dz - \lambda \frac{dT}{dz} dr + c_{\rho} \rho v(r) T dr + \\
& + \lambda \frac{dT}{dz} dr + \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} dz dr - c_{\rho} \rho v(r) T dr - c_{\rho} \rho v(r) \frac{dT}{dz} dz dr \\
& c_{\rho} \rho \frac{dT}{dt} = -\lambda \frac{d^2 T}{dr^2} + \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} - c_{\rho} \rho v(r) \frac{dT}{dz}
\end{aligned}$$

Отримали нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, отже вирішувати його слід чисельним методом.

На початку роботи системи (коли вода вперше пускається в трубу) процес теплообміну буде нестационарним і  $T$  залежить ще і від часу. Але коли система вийде на постійний робочий режим (стаціонарний), температура у кожній конкретній точці труби не буде мінятися, тому для стаціонарного режиму ( $\frac{dT}{dt} = 0$ ):

$$-\lambda \frac{d^2 T}{dr^2} + \lambda \frac{d^2 T}{dz^2} - c_{\rho} \rho v(r) \frac{dT}{dz} = 0$$

Отримали двовимірну (так, як  $T = T(z, r)$ ), стаціонарну (так як  $T$  не залежить від часу  $t$ ) задачу теплопровідності.

Шуканою є середня температура на виході  $\bar{T}(z = l) = ?$

Для вирішення рівняння слід задати граничні умови:

1) По-перше на вході труби відома температура всього перерізу і рівна  $T_1$  - температурі відпрацьованої води:

$$T(0, r) = T_1.$$

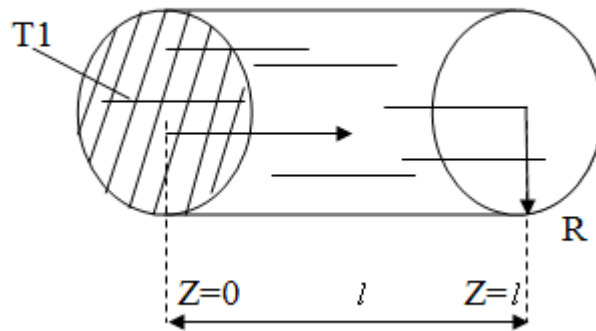


Рис. 2.3 Граничні умови I роду для задачі теплопровідності.

2) Також слід задати умови на боковій поверхні труби, тобто безпосередньо там, де відбувається теплообмін.

Традиційно використовують 4 типи граничних умов при теплообміні: 1, 2, 3, та 4 роду. Використаємо найпростіші умови першого роду, тобто задамо температуру стінок і вважатимемо її усюди однаковою і рівною температурі навколишнього середовища (землі):

$$T(z, R) = T_c.$$

В перспективі можна розглядати більш складні (але більш точні) варіанти граничних умов. Наприклад,  $T_c = T_c(z)$  - якщо труба вертикальна, то зі збільшення глибини  $z$  температура змінюється. Також можна використати граничні умови 2, 3, і 4 роду для більш точної оцінки параметрів системи.

Для чисельного розв'язку застосуємо метод Ейлера у двовимірній інтерпретації (його часто називають метод сіток).

$h = \Delta z$ ,  $k = \Delta r$  - кроки по  $z$  та  $r$  відповідно.

$$\frac{dT}{dz} \approx \frac{T_{i+1} - T_i}{h} - \text{перша похідна від температури.}$$

де  $i$ -індекс по вісі  $z$ ;  $h$  - крок по  $z$ ;

$$\frac{d^2 T}{dz^2} \approx \frac{\frac{dT_{i+1}}{dz} - \frac{dT_i}{dz}}{h} = \frac{\frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{h}}{h} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{d^2 T}{dr^2} \approx \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2}$$

де  $k$  - крок по вісі  $r$ ;  $h$  - індекс по вісі  $r$ ;

Перепишемо граничні умови з використанням індексів:

По вісі  $z$ :

$$T_{0,j} = T_1.$$

По вісі  $r$ :

$$T_{i,M-1} = T_c, T_{-1,j} = T_1.$$

де  $T_{-1,j}$  - законтурні умовні допоміжні точки, необхідні так як схема розрахунку чотирьохточкова (див. рис. 2.4) тобто для початку розрахунків треба знати  $T_{i-1,j}$ .

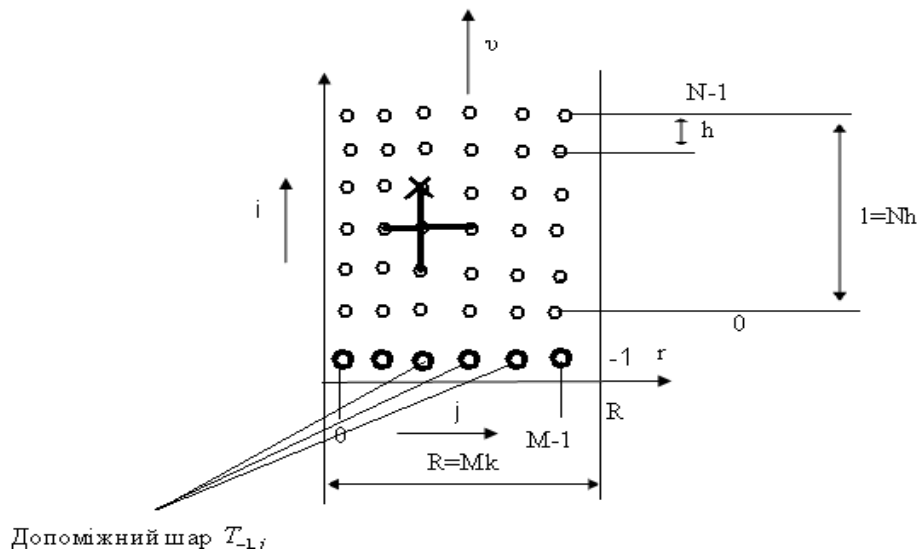


Рис.2.4 Чотирьох точкова схема розрахунку методом сіток.

$$-\lambda \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2} + \lambda \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} - c_6 \rho v_j \frac{T_{i+1} - T_i}{h} = 0$$

$M$  - кількість точок розбиття по вісі  $r$ ,  $k = \frac{R}{M}$ ;

$N$  - кількість точок розбиття по довжині труби  $z$ ,  $h = \frac{l}{N}$ .

Розрахунок будемо робити по кругових шарах товщиною  $dz = h$ :

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h^2} = \frac{c_v \rho v_j}{\lambda} \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2}$$

$$T_{i+1,j} = 2T_{i,j} - T_{i-1,j} + h^2 \left[ \frac{c_v \rho v_j}{\lambda} \frac{T_{i+1} - T_i}{h} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{k^2} \right]$$

Отримали явну формулу для температури наступного кругового ряду.

Відмітимо, що на вісі труби потік відсутній, тому  $T_{i+1,0} = T_{i+1,1}$ .

Розрахунки по наведеній формулі виконані у комп'ютерній формі і показані на рис.2.5. Даний графік показує як змінюється температура води від бокової частини труби до центру (тобто радіальна залежність) для 10 перерізів труби, розташованих на відстані 1,5 один від одного.

Розглянувши графік візуально, можна сказати, що найбільш інтенсивний теплообмін відбувається на першій (достатньо короткій ділянці труби). Дійсно, перші кілька графіків сильно різняться один від одного, отже вода прогрівається добре. Останні графіки дуже мало відрізняються один від одного, тобто ця ділянка труби не є ефективною. Це пояснюється тим, що при вході вода мала деяку низьку температуру і під час проходження через трубу теплообмін визначається градієнтом температури, тому він найбільший поки різниця температур висока.

Залежність температури від радіуса для 10 перерізів по довжині 15-метрової труби (перерізи рівновіддалені один від одного на 1,5 м) показана на рис. 2.5.

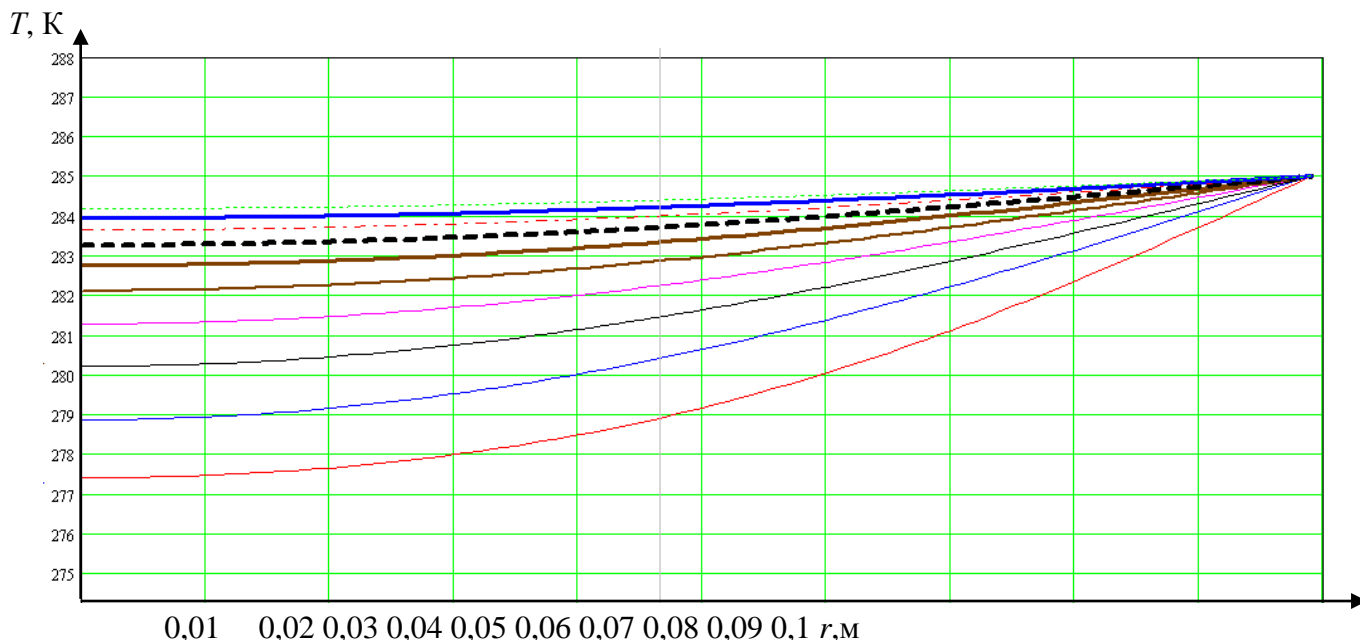


Рис. 2.5 – Радіальні залежності температури у 10 рівновіддалених перерізах труби, відстань між якими 1,5 м.

З практичної точки зору важливо чисельно оцінити енергію, яку отримує теплоносій при протіканні в трубі, як функцію довжини труби. При збільшенні довжини збільшується площа поверхні, при цьому воді віддається більше теплоти від землі, що і зображено на графіку (чим довша труба тим більша температура на виході). Характер зростання середньої інтегральної температури по довжині труби показано на рис. 2.6.

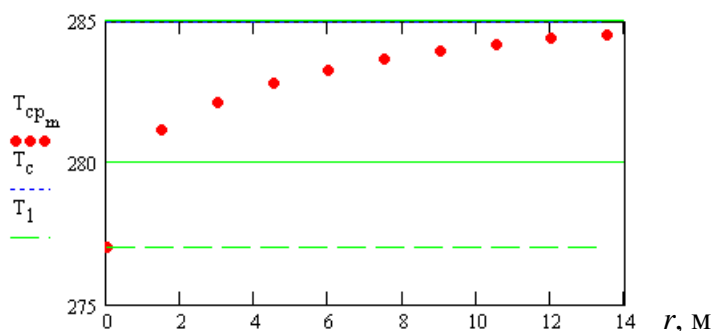


Рис. 2.6 – Середньоінтегральна (по перерізу) температура теплоносія по довжині 15-метрової труби.

Графік показує що при збільшенні довжини труби температура зростає все повільніше (конкретний вид залежності планується встановити у подальших дослідженнях за допомогою одного з критеріїв порівняння статистичних розподілів типу хі-квадрат), і різниця між 10 та 15 метровою

трубою має малу різницю, близьку до всього кількох відсотків. Оцінімо ще потужність яку вода отримує від землі – рис. 2.7.

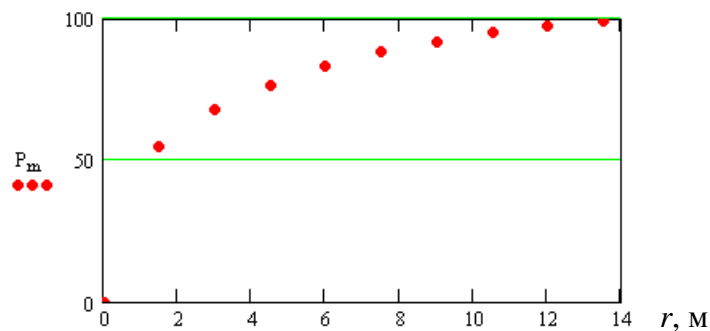


Рис. 2.7 Потужність, яку дає труба в залежності від її довжини.

Даний рисунок показує, що, по-перше, труба при ламінарній течії дає не дуже високу потужність 100 Вт. По-друге, при використанні ламінарних режимів виконувати довгі труби не має сенсу, так як їх потужність зростає по закону, близькому до асимптотичного наближення до граничного значення.

Як висновок, можна сказати, що ламінарний режим течії не є достатньо ефективним і дозволяє лише підживлювати певні запаси енергії. У якості обігріву слід вживати труби з турбулентними течіями, розрахунок яких планується у подальшій роботі.

## ВИСНОВКИ

В роботі розглянуто перспективне альтернативне джерело енергії - тепловий насос. Докладно розглянутий принцип роботи насосу і виконаний розрахунок його підземної частини, а саме процесів теплообміну між теплоносієм та землею. В роботі, яка є початковим етапом дослідження, розглянуто теплообмін при ламінарному режимі течії води у трубах (тобто радіальні потоки бралися тільки за рахунок теплопровідності). При розрахунку теплопровідності використані умови першого роду (що в першому наближенні допустиме, зважаючи на термостатованість підземних порід). В результаті створення моделі отримане нелінійне стаціонарне рівняння теплопровідності, яке розв'язувалося методом сіток.

На основі створеної моделі розрахована середня інтегральна (по перерізу) температура та потужність, яку дає труба, як функція довжини труби. Встановлено, що ламінарний режим течії не є достатньо ефективним і слід використовувати турбулентний (при якому можна використовувати великі швидкості, і, дуже важливо, що теплообмін забезпечуватиметься також інтенсивним конвективним теплоперенесенням). Розрахунки турбулентного режиму та при граничних умовах інших видів плануються в подальшій роботі.



## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. В. Мааке, Г.-Ю. Эккерт, Ж.-Л. Кошпен. Учебник по холодильной технике: Пер. с франц. — М.: Изд-во Московского Ун-а, 1998. — 1142 с., ил.
2. Рей Д., Макмайл Д. Тепловые насосы: Пер. С англ. — М.: Энергоиздат, 1982. — 224 с., ил.
3. Эль Садин Хасан. Выбор оптимальных параметров системы теплохолодоснабжения жилого дома // Холодильная техника. — 2003. — № 3. — с.18-21.
4. Овчаренко В.А. Овчаренко А.В. Використання теплових насосів // Холод М+Т. — 2006. — № 2. — с. 34-36.
5. Пять шагов на пути к избавлению от метановой зависимости // Отопление Водоснабжение Вентиляция + кондиционеры. — 2006. — № 1. — с. 30-41.
6. Бондарь Е.С., Калугин П.В. Энергосберегающие системы кондиционирования воздуха с аккумуляцией холода // С.О.К. — 2006. — №3. — с. 44-48.