Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки Миколаївської облдержадміністрації

Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: математика

Секція: математика

Геометричні інтерпретації чисел Фібоначчі і Трібоначчі

Роботу виконав:
Шпилька Владислав Сергійович, учень 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки Миколаївської міської ради

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна, кандидат фіз-мат наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики ЧНУ ім. Петра Могили

Науковий керівник:
Майборода Валерій Антонович
Вчитель-методист, вчитель математики Миколаївського муніципального колегіуму імені В.Д.Чайки Миколаївської міської ради Миколаївської області

Педагогічний керівник:
Крисинська Ірина Володимирівна, Заслужений вчитель України, вчитель математики Миколаївського муніципального колегіуму імені В.Д.Чайки Миколаївської міської ради Миколаївської області

Миколаїв 2019

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Тези

науково-дослідницької роботи

Геометричні інтерпретації чисел Фібоначчі і Трібоначчі

Шпилька Владислав Сергійович, учень 10 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки.

Науковий керівник: Крисинська Ірина Володимирівна, вчитель Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Вперше послідовність чисел відомих тепер, як числа Фібоначчі зустрічаються у книзі Леонардо із Пізу (Л. Фібоначчі) «Liber abacci». На винятковість цієї послідовності математики звернули увагу відразу. Протягом століть вчені знаходили різноманітні властивості цієї послідовності.

В роботі використовуючи апарат векторної алгебри ми довели нові властивості чисел Фібоначчі. Розглядаючи два довільних, послідовних числа Фібоначчі починаючі з $m+2n-1$ ми побудували послідовність упорядкованих пар (A_n, $n\geq0$), таку що $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$, $m\geq0$, $n\geq1$ і встановили її властивості. В роботі розглянуто послідовності впорядкованих трійок чисел Фібоначчі та Трибоначчі (B_n) $n\geq1$ та (C_n) $n\geq1$, для члені яких $B_n (F_{m+3n-2}; F_{m+3n-1}; F_{m+3n})$, $C_n (t_{m+3n-2}; t_{m+3n-1}; t_{m+3n})$ доведено декілька властивостей та запропоновано їх геометричну інтерпретацію.

У подальшому планується дослідження сум чисел Трибоначчі та продовження дослідження наступної гіпотези: мішаний добуток n векторів, координати яких задані спеціальним впорядкуванням, завжди стале число.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вперше задача, розв’язок якої приводить до знаменитої послідовності 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, була опублікована в 1202 р. у книзі Леонардо із Пізу (Л. Фібоначчі) «Liber abacci».

Під послідовністю чисел Фібоначчі ми розуміємо числову послідовність ($F_{n,}$ $n \geq 1$), яка задається рекурентно

$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Зразу зауважимо, що початкові умови: $F_1 = F_2 = 1$, в залежності від методик дослідження послідовності (F_n); та її області визначення ($n \geq 0$), або (n є Z) можуть змінюватись, наприклад: $F_0 = 0$; $F_1 = 1$, тоді $F_n = F_{n-1} + F_{n-2,}$ $n \geq 2$

(F_n): 0, 1, 2, 3, 5, …

Якщо ж визначити $F_n = F_{n+2} - F_{n+1,}$ то одержимо послідовність чисел Фібоначчі задану на множині цілих чисел:

…-21, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5…

Майже зразу математики звернули увагу на цю числову послідовність – послідовність чисел Фібоначчі. Було відкрито і доведено ряд властивостей чисел цієї послідовності. XX ст. також було результативним. Так наприклад, у 1962 р. Дж. Кон (J. H. E. Cohn) довів, що єдиними точними квадратами серед чисел Фібоначчі є числа цієї послідовності з індексами 0, 1, 2, 12:

$F_0 = 0^2 = 0$; $F_1 = 1^2 = 1$; $F_2 = 1^2 = 1$; $F_{12} = 12^2 = 144$

Друга половина XX ст. і до нашого часу характерна інтенсивним розвитком прикладних напрямків математичних дисциплін, результати яких широко використовуються в інформаційних технологіях, біології, генетиці, економіці, психології, екології, тощо.

До останніх відкритів слід віднести встановлення зв`язку чисел Фібоначчі з випадковими подіями – блукання на площині.

Детальну інформацію з цієї теми, можна отримані у роботах [1,3,5,6].

Робота автором, над властивостями чисел Фібоначчі була розпочата в 9 класі і була представлена на заключному етапі конкурсу захисту робіт МАН України 2018 році. В даній роботі отримано нові властивості, над послідовностями чисел Трібоначчі та запропонована відповідна геометрична інтерпретація даних властивостей.

У подальшому планується продовжити дослідження запропонованої автором гіпотези, що мішаний добуток *n* векторів, координати яких задані спеціальним впорядкуванням, завжди стале число. Також планується розпочати дослідження сум чисел Трибоначчі.

Тема роботи. Геометричні інтерпретації чисел Фібоначчі і Трібоначчі.

Мета роботи. Використовуючи апарат векторної алгебри довести нові властивості чисел Фібоначчі, Трібоначчі та запропонувати їх геометричну інтерпретацію.

Об`єкт дослідження: Послідовності, що будуються на спеціальному впорядкуванню чисел Фібоначчі.

Математичний апарат: Векторна алгебра

ЧАСТИНА І. ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ, ТРІБОНАЧЧІ ТА ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.

1.1. Означення чисел Фібоначчі та їх найпростіші властивості.

Означення: Члени числової послідовності (F_n, $n \geq 1$, $n \in N$), яка задається рекурентно

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F_1 = F_2 = 1$ називаються числами Фібоначчі.(1.1.1)

Розглянемо деякі властивості чисел Фібоначчі, які використовуються в роботі.

Властивість 1. Сума членів послідовності Фібоначчі з непарними індексами дорівнює F_{2n} : $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Доведення. З означення випливає що:

$F_1=F_2$

$F_3=F_4-F_2$

$F_5=F_6-F_4$

. . . . .

$F_{2n-1}=F_{2n}-F_{2n-2}$

Якщо ми додамо ці тотожності то отримаємо:

$F_1+F_3+F_5+\ldots+F_{2n-1}= F_2+F_4-F_2+F_6-F_4+\ldots+F_{2n}-F_{2n-2}= F_{2n}$

Властивість 2. Сума членів послідовності Фібоначчі з непарними індексами дорівнює $F_{2n+1} - 1$:

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Доведення . З означення випливає що:

$F_2=F_3-F_1$

$F_4=F_5-F_3$

$F_6=F_7-F_5$

. . . . .

$F_{2n}=F_{2n+1}-F_{2n-1}$

Якщо ми додамо ці тотожності то отримаємо:

$F_2+F_4+F_6+\ldots+F_{2n}=F_3-F_1+F_5-F_3+F_7-F_5+\ldots+F_{2n+1}-F_{2n-1}=F_{2n+1}-F_1=F_{2n+1}-1$

Властивість 3. Для будь-якого n та m виконується наступна рівність : :

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$$

Доведення. Для доведення формули ведемо індукцію по m. При m=1 ця формула має вигляд $F_{n+1}=F_{n-1}F_1+F_nF_2$, щоє очевидно. При m=2 формула $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$, також вірна, тому що $F_{n+2}=F_{n-1}F_2+F_nF_3=F_{n-1}+2F_n=F_{n-1}+F_n+F_n=F_{n+1}+F_n$.

Основа індукції доведена. Індуктивний перехід доведемо наступним чином: нехай формула $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$ вірна при m=k і при m=k+1, тоді доведемо що вона вірна і при m=k+2.

Нехай: $F_{n+k}=F_{n-1}F_k+F_nF_{k+1}$, $F_{n+k+1}=F_{n-1}F_{k+1}+F_nF_{k+2}$

Якщо ми додамо останні дві тотожності, то отримаємо:

$F_{n+k+2}=F_{n-1}F_{k+2}+F_nF_{k+3}$

Властивість 4. Для будь-якого n виконується наступна рівність :

$$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$$

Доведення

Для доведення формули ведемо індукцію по n. Для n=2, $F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$ Приймає вигляд: $F_2^2=F_1F_3+(-1)^2$, що є очевидним.

Нехай формула доведена для n. Додамо до обох частин – F_nF_{n+1}. Ми отримаємо:

$F_n^2+F_nF_{n+1}=F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+1}+(-1)^{n+1}$

$F_n(F_n+F_{n+1})=F_{n+1}(F_{n-1}+F_n)+(-1)^{n+1}$

$F_nF_{n+2}=F_n^2+(-1)^{n+1}$

$F_n^2=F_nF_{n+2}+(-1)^{n+2}$

Цей індуктивний перехід доведений, отже формула доведена для будь-якого n

Властивість 5 Для будь-якого n виконується наступна рівність :

$F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}=(-1)^n$

Доведення

$F_nF_{n+3}–F_{n+1}F_{n+2}=F_n(F_nF_2+F_{n+1}F_3)–F_{n+1}(F_n+F_{n+1})=F_n^2+2F_nF_{n+1}–F_{n+1}F_n–F_{n+1}^2=F_n^2+F_nF_{n+1}–F_{n+1}^2=F_{n-1}F_{n+1}+F_nF_{n+1}–F_{n+1}^2+(-1)^n=F_{n+1}(F_{n-1}+F_n–F_{n+1})+(-1)^n= =(-1)^n$ [3].

1.2. Означення чисел Трібоначчі та їх властивості.

Означення: Члени числової послідовності (t_n, $n\geq 1$), яка задається рекурентно

$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, . (1.2.1)

називаються числами Трібоначчі

Деякі властивості чисел Трібоначчі:

Для доведення властивостей чисел Трібоначчі введемо вектор:

$\omega_n = (t_{n+2}, t_{n+1}, t_n)$ і матрицю $\boldsymbol{A}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так як:

$$\begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} + t_n + t_{n-1} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_n \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

то $\omega_n = A\omega_{n-1}$, отже $\omega_n = A^n\omega_0$. Для звичайних чисел Фібоначчі елементами степені аналогічної матриці є самі числа Фібоначчі. Степінь введеня матриці А має трохи складніший вид. Надалі ми будемо розглядати числа Трібоначчі і с від'ємними $t_2 = t_1 + t_0 + t_{-1}$, то $t_{-1} = 1$, к то $\omega_{-1} = (0,0,1)^T$.

Лемма 1. Справедлива формула:

$$A^n = \begin{pmatrix} t_{n+2} & t_n + t_{n+1} & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_{n-1} + t_n & t_n \\ t_n & t_{n-2} + t_{n-1} & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Так як $A = (\omega_1 \ \ \omega_0 + \omega_{-1} \ \ \omega_0)$, то

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A^{n-1}\,(w_1 \quad w_0 + w_{-1} \quad w_0) =$$

$$= (A^{n-1}\,w_1 \quad A^{n-1}\,w_0 + A^{n-1}\,w_{-1} \quad A^{n-1}\,w_0) =$$

$$= (w_n \quad w_{n-1} + w_{n-2} \quad w_{n-1})$$

Що й потрібно було довести.

Так як |A| = 1, то $|A^n|=1$. Із отриманої в лемі 1 формули для степені матриці A випливає тотожність, яка є аналогом тотожності Кассіні для чисел Фібоначчі.

Властивість 1. Справедлива тотожність:

$$t_n^3 - 2t_{n-1}t_nt_{n+1} + t_{n-2}t_{n+1}^2 + t_{n-1}^2t_{n+1} - t_{n-2}t_nt_{n+2} = 1 \quad (1.2.2)$$

Властивість 2. Справедлива тотожність:

$$t_{n+m} = t_{n+1}t_{m+1} + t_nt_m + t_nt_{m-1} + t_{n-1}t_m$$

Так як:

$A^{n+m-2} = A^{n-1} \cdot A^{m-1}$, то

$$\begin{pmatrix} t_{n+m} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} & t_{n-1} + t_n & t_n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{m+1} & * & * \\ t_m & * & * \\ t_{m-1} & * & * \end{pmatrix}$$

$$t_{n+m} = t_{n+1}t_{m+1} + t_nt_m + t_nt_{m-1} + t_{n-1}t_m \quad (1.2.3)$$

що й потрібно було довести [6].

1.3. Елементи векторної алгебри.

1.3.1. Поняття матриці і визначника, означення, основні властивості.

Означення: Матриця — математичний об'єкт, записаний у вигляді прямокутної таблиці чисел, над матрицями визначають операції: додавання, віднімання, множення матриць та множення матриці на скаляр. Як правило, матриці представляються двовимірними (прямокутними) таблицями.

Матрицею розміру **m** × **n** (*m*-на-*n*, або *mn*-матрицею) називається множина з **m**×**n** елементів $\mathbf{a_{ij}}$, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з **m** рядків і **n** стовпців, а **m** і **n** — її розмірністю:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

де $\mathbf{a_{ij}}$ – елемент матриці; **i**– номер рядка; **j** – номер стовпця.

- Горизонтальні лінії в матриці звуть **рядками**, вертикальні — **стовпцями**.
- Елемент матриці *A*, що знаходиться на перетині *i*-го рядка з *j*-им стовпчиком, називають *i*,*j*-им елементом або (*i*,*j*)-им елементом *A*.

Записують це як $\mathbf{a}_{ij}$ чи a[i,j], або, в нотації мови програмування C, A[i][j].

Часто пишуть A:=a$(\mathbf{a}_{ij})_{n \times m}$ для означення матриці A розмірності n x m, де кожен елемент матриці A[i,j] позначають як a_{ij} для всіх $1 \le i \le n$ та

$1 \le j \le m$.

Означення: Квадратною матрицею порядку **n** називається матриця, яка має **n** рядків та **n** стовпчиків.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Означення: Визначник або детермінант — це число; вираз складений за певним законом з n^2 елементів квадратної матриці. Одна з найважливіших характеристик квадратних матриць. Якщо елементами матриці є числа, то визначник — також число.

1. Визначник 2×2 матриці

Щоб знайти визначник 2*2 матриці, множимоелементи головноїдіагоналі тавіднімаємодобутокелементівпобічної діагоналі$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ad-bc.

2. Визначник 3×3 матриці

Щоб знайти визначник 3×3 матриці, будуємо шість добутків таким чином:

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.

Властивості:

1. Якщо помножити якийсь рядок (стовпець) на константу ***a*** то визначник також помножиться на***a.***
2. Якщо у матриці поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то знак визначника зміниться на протилежний.

3. У матриці з двома однаковими/пропорційними рядками (стовпцями) або з нульовим рядком, визначник дорівнює нулю.

4. Всі властивості визначників, що стосуються рядків, так само справедливі і для стовпців.

1.3. 2 Матрична форма мішаного та векторного добутку векторів.

Векторний добуток:

Векторний добуток (також називається *зовнішній добуток*) має сенс лише для трьох або більше вимірних просторів. Векторний добуток відрізняється від скалярного добутку в першу чергу тим, що результатом векторного добутку двох векторів є вектор. Векторний добуток, позначається як **a** × **b**, і є вектором, що перпендикулярний обом векторам **a** і **b** і позначається як

|**[a**,**b]** |= |**a** ||**b** |sin(**a** ,**b**);

який також символічно записується у вигляді 3*3 детермінанту:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Модуль векторного добутку **a**і**b**є площа паралелограма, що має сторони **a** і **b**.

1. Мішаний добуток:

Мішаний добуток не є новою операцією над векторами, а є комбінацією існуючих двох операцій множення до трьох векторів. Мішаний добуток іноді позначається як (**a,b,c**) і визначається наступним чином:

(a,b,c)=**a·[a**,**b]**

Він має три основних застосування. По перше, значення вищенаведеного добутку дорівнює об'єму паралелепіпеда, сторони якого задані цими трьома векторами. Подруге, мішаний добуток дорівнюватиме нулю, тоді і тільки тоді коли всі три вектори лінійно незалежні, що можна легко довести, розглянувши ситуацію, що для того, щоб три вектори утворювали нульовий об'єм вони мають всі три лежати в одній площині. Потретє, мішаний добуток буде додатнім лише коли три вектори **a**, **b** і **c** утворюють праворучну трійку векторів.

Якщо три вектори представити у вигляді рядків (або стовбців, але в тому ж порядку), мішаний добуток є визначником матриці 3-на-3, що містить три вектори в рядках:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Властивості векторів:

1. Ортогональність:

Вектори є ортогональними тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

2. Колінеарність:

Вектори є колінеарними тоді і тільки тоді, коли їхній векторний добуток дорівнює нулю.

3. Рівність векторів:

Нехай $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — два вектори площини (або простору). Кажуть, що вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{CD}$, і записують $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, якщо: 1)довжина відрізка AB дорівнює довжині відрізка CD; 2)промені AB і CD однаково напрямлені.

4. Властивості додавання векторів:

1.) властивість нульового вектора: **a**+0=**a**; 2.) асоціативність додавання: (**a**+**b**)+**c**=**a**+(**b**+**c**); 3.) комутативність додавання: **a**+**b**=**b**+**a**;

5. Властивості множення вектора на число:

1.) комутативність: $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$;

2.) асоціативність: $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;

3.) дистрибутивність відносно додавання векторів: $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$; 4.) дистрибутивність відносно додавання чисел: $(\mu+\lambda)\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{a}$; [2].

ЧАСТИНА II. НОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ТА ТРІБОНАЧЧІ.

2.1. ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ЗВ`ЯЗАНИХ З ЇХ ВПОРЯДКУВАННЯМИ.

2.1.1. Постановка задачі. Для випадку двухвимірного простору.

Розглянемо послідовність чисел Фібоначчі. (1.1.1)

Побудуємо нову послідовність упорядкованих пар (A_n, n≥1, n є N), таку що $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$, m≥0, n≥1, n є N.

Означення:

Впорядковані пари (F_{m+2n-1}; F_{m+2n}) будемо називати точками простору R^2 та позначати : $A_1, A_2, ..., A_n$, . $A_n = (F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$, $m - const$

При розв'язанні задачі турніру XX Всукраїнського турніру юних математиків [4] необхідно було довести :

1. Доведіть, що для кожного m≥0 площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює 0,5.
2. Доведіть, що для кожного m≥0 площа чотирикутника $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ є трапеція площа якої дорівнює 2,5.
3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2 ...A_n$, n ≥3, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, … , $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору число m≥0, та знайдіть цю площу.

Доведення яких ми представили в нашій роботі в минулому році [7]

Для зручності, узагальнюючи ці задачі ми сформулюємо наступні властивості чисел Фібоначчі та доведемо їх:

<u>Властивість 1.</u> Будь-які три послідовні точки із послідовності (A_n) не колінеарні.

Властивість 2. Трикутник із вершинами у трьох послідовних точках послідовності *(A_n)* має одну і ту ж площу (не залежить від вибору першої із трьох точок, тобто від індексу m) і дорівнює ½.

Властивість 3. Будь-які чотири послідовні точки послідовності (A_n) такі, що: $A_mA_{m+3} || A_{m+1}A_{m+2}$ *і* $A_mA_{m+1} \nparallel A_{m+4}A_{m+3}$

Властивість 4. Площа трапеції $A_mA_{m+1}A_{m+2}A_{m+3}$ не залежить від першої точки (індекса m).

Властивість 5. Площа n-кутника $A_1A_2 \dots A_n$ не залежить від вибору 1-ої точки (індекса *m*).

2.1.2. Постановка задачі. Для випадку тривимірного простору.

В процесі роботи над розв'язанням властивостей 1-5 ми висунули гіпотезу, щодо розширення властивостей з використанням чисел Трибоначчі та переносу міркувань у трьохвимірний простір R^3

Будемо також розглядати послідовність *(B_n)* n≥1, n є N. Члени якої впорядковані трійки $B_n(F_{m+3n-2}; F_{m+3n-1}; F_{m+3n})$, які є точками простору R^3.

Властивість 6. Будь-які чотири послідовних точки послідовності (B_n) лежать в одній площині.

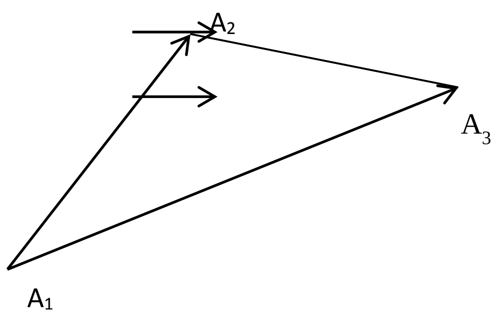
Будемо також розглядати послідовність *(C_n)* n≥1, n є N. Члени якої впорядковані трійки $C_n(t_{m+3n-2}; t_{m+3n-1}; t_{m+3n})$, які є точками простору R^3.

Властивість 7. Піраміда із вершинами у чотирьох послідовних точках послідовності *(C_n)* має один і той же об'єм (не залежить від вибору першої із чотирьох точок, тобто від індексу m) і дорівнює ⅓

2.2. Доведення властивостей та геометрична інтерпретація властивостей

2.2.1. Колінеарність точок послідовності (*A*n) Площі трикутників із вершинами у трьох послідовних точках послідовності (A_n).

Властивість 1. Будь-які три послідовні точки із послідовності (A_n) не колінеарні.



Доведення

$A_1A_2((F_{m+3}-F_{m+1});(F_{m+4}-F_{m+2}))$

$A_1A_3((F_{m+5}-F_{m+1});(F_{m+6}-F_{m+2}))$

Розглянемо векторний добуток векторів A_1A_2і A_1A_3та за правилом трикутника порахуємо визначник третього третього порядку:

$$\Delta=[\overrightarrow{A_1A_2};\overrightarrow{A_1A_3}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{m+3}-F_{m+1} & F_{m+4}-F_{m+2} & 0 \\ F_{m+5}-F_{m+1} & F_{m+6}-F_{m+2} & 0 \end{vmatrix}=(F_{m+3}-F_{m+1})(F_{m+6}-F_{m+2})\mathbf{k}-$$

$$-(F_{m+5}-F_{m+1})(F_{m+4}-F_{m+2})\mathbf{k}$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\Delta=\mathbf{k}(F_{m+3}F_{m+6}-F_{m+1}F_{m+6}-F_{m+3}F_{m+2}+F_{m+1}F_{m+2}-F_{m+5}F_{m+4}+F_{m+1}F_{m+4}+F_{m+5}F_{m+2}-$$
$$-F_{m+1}F_{m+2})$$

Використаємо властивість $F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2}=(-1)^n$:

$$\Delta=\mathbf{k}(-(-1)^{m+3}-(-1)^{m+1}-F_{m+1}F_{m+6}+F_{m+5}F_{m+2})$$

Застосуємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$\Delta=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}-(F_mF_5+F_{m+1}F_6)F_{m+1}+F_mF_4+F_{m+1}F_5)(F_m+F_{m+1}))=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}--$$
$$(5F_m+8F_{m+1})F_{m+1}+(3F_m+5F_{m+1})(F_m+F_{m+1}))$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\Delta=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}-5F_mF_{m+1}-8F_{m+1}^2+3F_m^2+3F_mF_{m+1}+5F_{m+1}F_m+5F_{m+1}^2)=$$

$$=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}+3F_m^2+3F_mF_{m+1}-3F_{m+1}^2)$$

Застосуємо властивість $F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$:

$$\Delta=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}+3F_{m-1}F_{m+1}+3F_mF_{m+1}-3F_{m+1}^2-3(-1)^m)$$

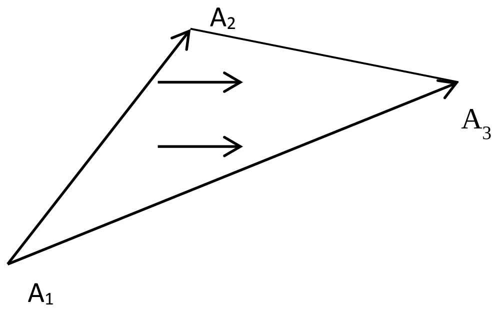
Винесемо за дужки $3F_{m+1}$, отримаємо:

$\Delta=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}+3F_{m+1}(F_{m-1}+F_m-F_{m+1})-3(-1)^m)=(-2(-1)^{m+1}-3(-1)^m)\mathbf{k}$

Так як $[\overrightarrow{A_1A_2};\ \overrightarrow{A_1A_3}]\neq 0$, то $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ не колінеарні, отже A_1, A_2, A_3–не колінеарні.

Властивість2. Трикутник із вершинами у трьох послідовних точках послідовності (A_n) має одну і ту ж площу (не залежить від вибору першої із трьох точок, тобто від індексу m) і дорівнює ½.

Розв'язання



$A_1A_2((F_{m+3}-F_{m+1});(F_{m+4}-F_{m+2}))$

$A_1A_3((F_{m+5}-F_{m+1});(F_{m+6}-F_{m+2}))$

Розглянемо векторний добуток вукторів A_1A_2 і A_1A_3:

$$[\overrightarrow{A_1A_2};\ \overrightarrow{A_1A_3}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{m+3}-F_{m+1} & F_{m+4}-F_{m+2} & 0 \\ F_{m+5}-F_{m+1} & F_{m+6}-F_{m+2} & 0 \end{vmatrix}=$$

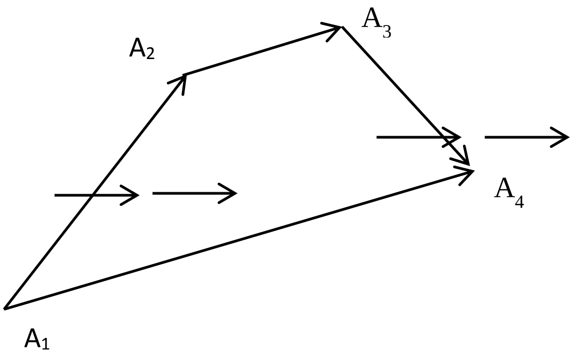
$=\mathbf{k}(-2(-1)^{m+1}-3(-1)^m)$ (за доведеним в властивості 1)

$|[\overrightarrow{A_1A_2};\ \overrightarrow{A_1A_3}]|=|-2(-1)^{m+1}-3(-1)^m|=1$

Отже $S_{A_1A_2A_3}=|[\overrightarrow{A_1A_2};\ \overrightarrow{A_1A_3}]|/2=|-2(-1)^{m+1}-3(-1)^m|/2=½$.

2.2.2. Властивості чотирикутника з вершинами в чотирьох послідовних точках послідовності (An).

Властивість 3. Будь-які чотири послідовні точки послідовності (A_n) є вершинами деякої трапеції.



Доведення

Розглянемо вектори побудовані на точках A_1A_4, A_2A_3 та A_1A_2, A_3A_4.

1.) Доведемо колінеарність векторів:

$\overrightarrow{A_1A_4}((F_{m+7}-F_{m+1});(F_{m+8}-F_{m+2}))$

$\overrightarrow{A_2A_3}((F_{m+5}-F_{m+3});(F_{m+6}-F_{m+4}))$

Для цього потрібно довести тотожність:

$$\frac{F_{m+5}-F_{m+3}}{F_{m+7}-F_{m+1}}=\frac{F_{m+6}-F_{m+4}}{F_{m+8}-F_{m+2}}$$

Замінимо $F_{m+5}-F_{m+3}$ на F_{m+4}, а$F_{m+6}-F_{m+4}$на F_{m+5}, та зведемо обидві частини до спільного знаменника:

$$\frac{F_{m+4}(F_{m+8}-F_{m+2})-(F_{m+7}-F_{m+1})F_{m+5}}{(F_{m+8}-F_{m+2})(F_{m+7}-F_{m+1})}=0$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\frac{F_{m+4}F_{m+8}-F_{m+4}F_{m+2}-F_{m+7}F_{m+5}+F_{m+1}F_{m+5}}{(F_{m+8}-F_{m+2})(F_{m+7}-F_{m+1})}=0$$

Розглянемо чисельник дробу, так як знаменник не дорівнює нулю. Застосуємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$(F_mF_3+F_{m+1}F_4)(F_mF_7+F_{m+1}F_8)-(F_m+F_{m+1})(F_mF_3+F_{m+1}F_4)-$$
$$-(F_mF_4+F_{m+1}F_5)(F_mF_6+F_{m+1}F_7)+(F_mF_4+F_{m+1}F_5)F_{m+1}=0$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$26F_m^2+42F_{m+1}F_m+39F_{m+1}F_m+63F_{m+1}^2-2F_m^2-3F_{m+1}F_m-2F_{m+1}F_m-3F_{m+1}^2-$$
$$-24F_m^2-65F_{m+1}^2-40F_{m+1}F_m-39F_{m+1}F_m+3F_mF_{m+1}+5F_{m+1}^2=0$$

$0=0$

Тотожність доведена, отже $A_1A_4\|A_2A_3$

2.) Доведемо що вектор$\overrightarrow{A_1A_2}$і $\overrightarrow{A_3A_4}$, не колінеарні:

$\overrightarrow{A_1A_2}((F_{m+3}-F_{m+1});(F_{m+4}-F_{m+2}))$

$\overrightarrow{A_3A_4}((F_{m+7}-F_{m+5});(F_{m+8}-F_{m+6}))$

Розглянемо наступний вираз:

$$\frac{F_{m+3}-F_{m+1}}{F_{m+7}-F_{m+5}}=\frac{F_{m+4}-F_{m+2}}{F_{m+8}-F_{m+6}}$$

Замінимо$F_{m+3}-F_{m+1}$ на F_{m+2}, $F_{m+4}-F_{m+2}$на F_{m+3}, $F_{m+7}-F_{m+5}$ наF_{m+6},$F_{m+8}-F_{m+6}$ на F_{m+7}.

$$\frac{F_{m+2}}{F_{m+6}}=\frac{F_{m+3}}{F_{m+7}}$$

Зведемо обидві частини до спільного знаменника:

$$\frac{F_{m+2}F_{m+7}-F_{m+3}F_{m+6}}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

Використаємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$\frac{(F_m+F_{m+1})(F_mF_6+F_{m+1}F_7)-(F_mF_2+F_{m+1}F_3)(F_mF_5+F_{m+1}F_6)}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\frac{8F_m^2+13F_{m+1}F_m+8F_{m+1}F_m+13F_{m+1}^2-5F_m^2-8F_{m+1}F_m-10F_{m+1}F_m-16F_{m+1}^2}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

$$\frac{3F_m^2+3F_{m+1}F_m-3F_{m+1}^2}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

Застосуємо властивість $F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$:

$$\frac{3F_{m+1}F_{m-1}+3F_{m+1}F_m-3F_{m+1}^2-3(-1)^m}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

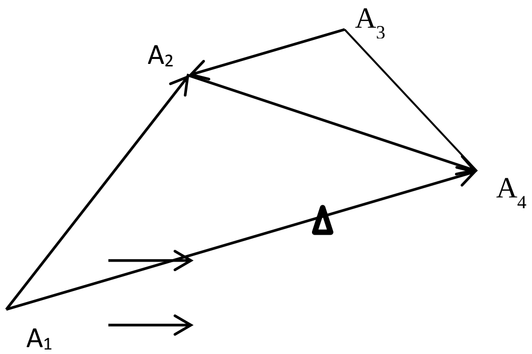
Винесемо за дужки $3F_{m+1}$, отримаємо:

$$\frac{3F_{m+1}(F_{m-1}+F_m-F_{m+1})-3(-1)^m}{F_{m+6}F_{m+7}}=0$$

$$\frac{-3(-1)^m}{F_{m+6}F_{m+7}}\neq 0$$

Ми отримали суперечність, отже $A_1A_2 \nparallel A_3A_4$

Властивість4. Площа трапеції $A_kA_{k+1}A_{k+2}A_{k+3}$ не залежить від першої точки (індекса m).



Розв'язання

$S_{A_2A_3A_4}$=0,5 (за властивістю 2)

Розглянемо $A_1A_2A_4$:

$A_1A_2((F_{m+3}-F_{m+1});(F_{m+4}-F_{m+2}))$

$A_1A_4((F_{m+8}-F_{m+1});(F_{m+7}-F_{m+2}))$

Розглянемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$ та за правилом трикутника порахуємо визначник третього третього порядку:

$\Delta=[\overrightarrow{A_1A_2};\overrightarrow{A_1A_4}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{m+3}-F_{m+1} & F_{m+4}-F_{m+2} & 0 \\ F_{m+7}-F_{m+1} & F_{m+8}-F_{m+2} & 0 \end{vmatrix}=(F_{m+3}-F_{m+1})(F_{m+8}-F_{m+2})\mathbf{k}-(F_{m+7}- -F_{m+1})(F_{m+4}-F_{m+2})\mathbf{k}$

Замінимо $F_{m+3}-F_{m+1}$ на F_{m+2}, $F_{m+4}-F_{m+2}$ на F_{m+3}:

$\Delta=\mathbf{k}(F_{m+2}(F_{m+8}-F_{m+2})-F_{m+3}(F_{m+7}-F_{m+1}))$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$\Delta=\mathbf{k}(F_{m+8}F_{m+2}-F_{m+2}{}^2-F_{m+3}F_{m+7}+F_{m+3}F_{m+1})$

Застосуємо властивість $F_n{}^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$:

$\Delta=\mathbf{k}(F_{m+8}F_{m+2} - F_{m+3}F_{m+1}- F_{m+3}F_{m+7} + F_{m+3}F_{m+1}-(-1)^{m+1}) = =\mathbf{k}(F_{m+8}F_{m+2}-F_{m+3}F_{m+7}-(-1)^{m+1})$

Застосуємо властивість

$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$\Delta=\mathbf{k}((F_m+F_{m+1})(F_mF_7+F_{m+1}F_8)-(F_mF_2+F_{m+1}F_3)(F_mF_6+F_{m+1}F_7)-(-1)^{m+1})=$

$=\mathbf{k}((F_m+F_{m+1})(13F_m+21F_{m+1})-(F_m+2F_{m+1})(8F_m+13F_{m+1}) -(-1)^{m+1})$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$\Delta=\mathbf{k}(13F_m{}^2+34F_mF_{m+1}+21F_{m+1}{}^2-8F_m{}^2-29F_mF_{m+1}-26F_{m+1}{}^2-(-1)^{m+1})=\mathbf{k}(5F_m{}^2+$

$+5F_mF_{m+1}-5F_{m+1}{}^2-(-1)^{m+1})=\mathbf{k}(-(-1)^{m+1}+5F_{m-1}F_{m+1}+5F_mF_{m+1} -5F_{m+1}{}^2-5(-1)^m)$

Винесемо за дужки $5F_{m+1}$, отримаємо:

$\Delta= \mathbf{k}(-(-1)^{m+1}+5F_{m+1}(F_{m-1}+F_m-F_{m+1})-5(-1)^m)=(-(-1)^{m+1}-5(-1)^m)\mathbf{k}$

$|[\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{A_1A_4}]|=|-(-1)^{m+1}-5(-1)^m |=4$

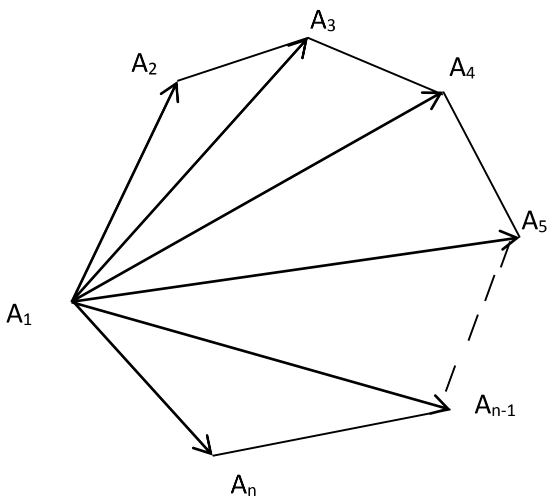
Отже $S_{A_1A_2A_4}=|[\overrightarrow{A_1A_2}; \overrightarrow{A_1A_4}]|/2=|-(-1)^{m+1}-5(-1)^m |/2=2$

Отже $S_{A_1A_2A_3A_4} = S_{A_1A_2A_4} + S_{A_2A_3A_4} = 2{,}5$

2.2.3. Властивості *n*-кутника $A_1A_2 \ldots A_n$ з вершинами в *n*-послідовних точках послідовності (An).

Властивість5

Площа n-кутника $A_1A_2 \ldots A_n$ не залежить від вибору 1-ої точки (індекса m).



Доведення

$\overrightarrow{A_1A_{n-1}}((F_{m+2n-3}-F_{m+1});(F_{m+2n-2}-F_{m+2}))$

$\overrightarrow{A_1A_n}((F_{m+2n-1}-F_{m+1});(F_{m+2n}-F_{m+2}))$

Розглянемо векторний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_{n-1}}$ і $\overrightarrow{A_1A_n}$ та за правилом трикутника порахуємо визначник третього третього порядку:

$$\Delta = [\overrightarrow{A_1A_{n-1}}; \overrightarrow{A_1A_n}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_{m+2n-1}-F_{m+1} & F_{m+2n-2}-F_{m+2} & 0 \\ F_{m+2n-1}-F_{m+1} & F_{m+2n}-F_{m+2} & 0 \end{vmatrix} = (F_{m+2n-3} - F_{m+1})(F_{m+2n} -$$

$$- F_{m+2})\mathbf{k} - (F_{m+2n-1} - F_{m+1})(F_{m+2n-2} - F_{m+2})\mathbf{k}$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\Delta = \mathbf{k}(F_{m+2n-3}F_{m+2n} - F_{m+2n-3}F_{m+2} + F_{m+1}F_{m+2} - F_{m+1}F_{m+2n} - F_{m+2n-1}F_{m+2n-2} +$$

$$+ F_{m+2n-1}F_{m+2} + F_{m+1}F_{m+2n-2} - F_{m+1}F_{m+2})$$

Використаємо властивість $F_nF_{n+3} - F_{n+1}F_{n+2} = (-1)^n$та винесемо спільний множник за дужки:

$$\Delta = \mathbf{k}(F_{m+2}(F_{m+2n-1} - F_{m+2n-3}) - F_{m+1}(F_{m+2n} - F_{m+2n-2}) + (-1)^{m+2n-3})$$

Замінимо$F_{m+2n-1}-F_{m+2n-3}$ на F_{m+2n-2} , $F_{m+2n}-F_{m+2n-2}$на F_{m+2n-1}:

$$\Delta = \mathbf{k}(F_{m+2}F_{m+2n-2} - F_{m+1}F_{m+2n-1} + (-1)^{m+2n-3})$$

Застосуємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$\Delta=\mathbf{k}((F_m+F_{m+1})(F_mF_{2n-3}+F_{m+1}F_{2n-2})-F_{m+1}(F_mF_{2n-2}+F_{m+1}F_{2n-1})+(-1)^{m+2n-3})$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$\Delta=\mathbf{k}(F_m^2F_{2n-3}+F_mF_{m+1}F_{2n-2}+F_mF_{m+1}F_{2n-3}+F_{m+1}^2F_{2n-2}-F_mF_{m+1}F_{2n-2}-F_{m+1}^2F_{2n-1}+$ $+(-1)^{m+2n-3})=\mathbf{k}(F_m^2F_{2n-3}+F_mF_{m+1}F_{2n-3}-F_{m+1}^2\,(F_{2n-1}-F_{2n-2})+(-1)^{m+2n-3})$

ЗамінимоF_{m+2n-1}-F_{m+2n-2} на F_{m+2n-3}та винесемо його за дужки:

$\Delta=\mathbf{k}(F_{2n-3}(F_m^2+F_mF_{m+1}-F_{m+1}^2)+(-1)^{m+2n-3})$

Застосуємо властивість $F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$:

$\Delta=\mathbf{k}(F_{2n-3}(F_{m-1}F_{m+1}+F_mF_{m+1}-F_{m+1}^2+(-1)^m)+(-1)^{m+2n-3})=\mathbf{k}(F_{2n-3}(F_{m+1}\,(F_{m-1}+F_m-F_{m+1})+(-1)^m)+(-1)^{m+2n-3})=\mathbf{k}\,(F_{2n-3}(-1)^m+(-1)^{m+2n-3})=\mathbf{k}(-1)^m\,(F_{2n-3}+(-1)^{2n-3})=$

$=(-1)^m\,(F_{2n-3}-1)\,\mathbf{k}$

Отже $S_{A_1A_{n-1}A_n}=|[\overrightarrow{A_1A_{n-1}};\ \overrightarrow{A_1A_n}]|/2=|(-1)^m\,(F_{2n-3}-1)|/2=\frac{F_{2n-3}-1}{2}$

Тоді за адитивною властивістю площ:

$S_{A_1A_2\dots A_n}=S_{A_1A_2A_3}+S_{A_1A_4A_5}+\dots+S_{A_1A_{n-1}A_n}$

$$S_{A_1\dots A_{n-1}A_n}=\frac{F_3-1}{2}+\frac{F_5-1}{2}+\ \dots\ +\frac{F_{2n-3}-1}{2}=\frac{F_3+F_5+F_7+F_9+F_{11}+\dots+F_{2n-3}-n+2}{2}=$$

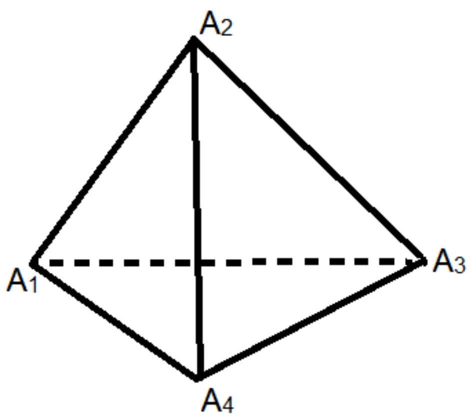
$$=\frac{F_1+F_3+F_5+F_7+F_9+F_{11}+\dots+F_{2n-3}-n+1}{2}$$

Застосуємо властивість $F_1+F_3+\dots+F_{2n-1}=F_{2n}$, тоді:

$$S_{A_1\dots A_{n-1}A_n}=\frac{F_{2n-2}-n+1}{2}$$

2.2.4. Компланарність точок послідовності (B_n)

Компланарними називають ті точки (або інші об'єкти), які лежать на (належать) однієї площині



Властивість 6. Будь-які чотири послідовних точки послідовності (B_n)лежать в одній площині.

Доведення

Розглянемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, ; $\overrightarrow{A_1A_3}$; $\overrightarrow{A_1A_4}$, та за правилом трикутника підрахуємо отриманий визначник третього порядку:

$$\Delta=(\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_1A_3},\ \overrightarrow{A_1A_4})=\begin{vmatrix} F_{m+4}-F_{m+1} & F_{m+5}-F_{m+2} & F_{m+6}-F_{m+3} \\ F_{m+7}-F_{m+1} & F_{m+8}-F_{m+2} & F_{m+9}-F_{m+3} \\ F_{m+10}-F_{m+1} & F_{m+11}-F_{m+2} & F_{m+12}-F_{m+3} \end{vmatrix} = (F_{m+4} -$$
$$F_{m+1})(F_{m+8} - F_{m+2})(F_{m+12} - F_{m+3}) + (F_{m+5} - F_{m+2})(F_{m+9} - F_{m+3})(F_{m+10} - F_{m+1}) +$$
$$+ (F_{m+7} - F_{m+1})(F_{m+11} - F_{m+2})(F_{m+6} - F_{m+3}) - (F_{m+10} - F_{m+1})(F_{m+8} -$$
$$- F_{m+2})(F_{m+6} - F_{m+3}) - (F_{m+7} - F_{m+1})(F_{m+5} - F_{m+2})(F_{m+12} - F_{m+3}) - - (F_{m+4} -$$
$$F_{m+1})(F_{m+11} - F_{m+2})(F_{m+9} - F_{m+3})$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\Delta= (F_{m+4}F_{m+8} - F_{m+4}F_{m+2} - F_{m+8}F_{m+1} - F_{m+7}F_{m+5} + F_{m+7}F_{m+2} +$$
$$+ F_{m+1}F_{m+5})(F_{m+12} - F_{m+3}) + (F_{m+5}F_{m+10} - F_{m+5}F_{m+1} - F_{m+2}F_{m+10} - F_{m+11}F_{m+4} +$$
$$+ F_{m+11}F_{m+1} + F_{m+2}F_{m+4})(F_{m+9} - F_{m+3}) + (F_{m+7}F_{m+11} - F_{m+7}F_{m+2} - F_{m+1}F_{m+11} -$$
$$- F_{m+8}F_{m+10} + F_{m+8}F_{m+1} + F_{m+2}F_{m+10})(F_{m+6} - F_{m+3})$$

Винесемо спільні множники за дужки:

$$\Delta= (F_{m+8}(F_{m+4} - F_{m+1}) + F_{m+2}(F_{m+7} - F_{m+4}) - F_{m+5}(F_{m+7} - F_{m+1}))(F_{m+12} -$$
$$- F_{m+3}) + (F_{m+10}(F_{m+5} - F_{m+2}) - F_{m+11}(F_{m+4} - F_{m+1}) + F_{m+4}F_{m+2} -$$
$$-F_{m+5}F_{m+1}))(F_{m+9} - F_{m+3}) + (F_{m+2}(F_{m+10} - F_{m+7}) - F_{m+1}(F_{m+11} - F_{m+8}) +$$
$$+ F_{m+7}F_{m+11} - F_{m+8}F_{m+10}))(F_{m+6} - F_{m+3})$$

Застосуємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$\Delta= ((F_mF_7 + F_{m+1}F_8)(F_mF_3 + F_{m+1}F_4 - F_{m+1}) + (F_m+ F_{m+1})(F_mF_6 + F_{m+1}F_7 -{}_mF_3 -$$
$$- F_{m+1}F_4) - (F_mF_4 + F_{m+1}F_5)(F_mF_6 + F_{m+1}F_7 - F_{m+1}))(F_mF_{11} + F_{m+1}F_{12} - F_mF_2 -$$
$$- F_{m+1}F_3) +((F_mF_9 + F_{m+1}F_{10})(F_mF_4 + F_{m+1}F_5 -F_m- F_{m+1}) -(F_mF_{10} +F_{m+1}F_{11}) (F_m F_3 +$$
$$+ F_{m+1}F_4 - F_{m+1}) + (F_mF_3 + F_{m+1}F_4)(F_m+ F_{m+1}) - (F_mF_4 + F_{m+1}F_5)F_{m+1})(F_mF_8 +$$
$$+ F_{m+1}F_9 - F_mF_2 - F_{m+1}F_3) + ((F_m+ F_{m+1})(F_mF_9 + F_{m+1}F_{10} - F_mF_6 - F_{m+1}F_7) -$$
$$- F_{m+1} (F_mF_{10}+ F_{m+1}F_{11}- F_mF_7 - F_{m+1}F_8)+(F_mF_6+ F_{m+1}F_7)(F_mF_{10}+ F_{m+1}F_{11}) - (F_mF_7 +$$
$$+ F_{m+1}F_8)(F_mF_9 + F_{m+1}F_{10}))(F_mF_5 + F_{m+1}F_6 - F_mF_2 - F_{m+1}F_3) =$$
$$=((13F_m+ 21F_{m+1})(2F_m+ 3F_{m+1} - F_{m+1}) + (F_m+ F_{m+1})(8F_m+ 13F_{m+1} - 2F_m- 3F_{m+1})-$$
$$- (3F_m+ 5F_{m+1})(8F_m+ 13F_{m+1} - F_{m+1}))(89F_m+ 144F_{m+1} - F_m- 2F_{m+1}) + ((34F_m+$$

$+ 55F_{m+1})(3F_m + 5F_{m+1} - F_m - F_{m+1}) - (55F_m + 89F_{m+1})(2F_m + 3F_{m+1} - F_{m+1}) + (2F_m +$
$+ 3F_{m+1})(F_m + F_{m+1}) - (3F_m + 5F_{m+1})F_{m+1})(21 F_m + 34F_{m+1} - F_m - 2F_{m+1}) + ((F_m +$
$+ F_{m+1})(34F_m + 55F_{m+1} - 8F_m - 13F_{m+1}) - F_{m+1} (55F_m + 89F_{m+1} - 13F_m -$
$- 21F_{m+1})+(8F_m + 13F_{m+1})(55F_m + 89F_{m+1}) - (13F_m + 21F_{m+1})(34F_m +$
$+ 55F_{m+1}))(5F_m + 8F_{m+1} - F_m - 2F_{m+1}) = ((13F_m + 21F_{m+1})(2F_m + 2F_{m+1}) + (F_m +$
$+ F_{m+1})(6F_m + 10F_{m+1}) - (3F_m + 5F_{m+1})(8F_m + 12F_{m+1}))(88F_m + 142F_{m+1}) + ((34F_m +$
$+55F_{m+1})(2F_m + 4F_{m+1}) - (55F_m + 89F_{m+1})(2F_m + 2F_{m+1}) + (2F_m + 3F_{m+1})(F_m + F_{m+1}) -$
$- (3F_m + 5F_{m+1})F_{m+1})(20 F_m + 32F_{m+1}) + ((F_m + F_{m+1})(26F_m + 42F_{m+1}) - F_{m+1} (42F_m +$
$+68F_{m+1}) +(8F_m + 13F_{m+1})(55F_m + 89F_{m+1}) - (13F_m + 21F_{m+1})(34F_m + 55F_{m+1}))(4F_m +$
$+ 6F_{m+1})$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$\Delta=(26F_m^2 + 26F_mF_{m+1} + 42F_mF_{m+1} + 42F_{m+1}^2 + 6F_m^2 + 10F_mF_{m+1} + 6F_mF_{m+1} +$
$+10F_{m+1}^2 - 24F_m^2 - 36F_mF_{m+1} - 40F_mF_{m+1} - 60F_{m+1}^2)(88F_m + 142F_{m+1}) + (68F_m^2 +$
$+110F_mF_{m+1} + 136F_mF_{m+1} + 220F_{m+1}^2 -110F_m^2 - 110F_mF_{m+1} - 178F_mF_{m+1} - 78F_{m+1}^2 +$
$+ 2F_m^2 +2F_mF_{m+1} + 3F_mF_{m+1} + 3F_{m+1}^2 - 3F_mF_{m+1} -5F_{m+1}^2)(20F_m + 32F_{m+1}) + 26F_m^2 +$
$+ 42F_mF_{m+1} + 26F_mF_{m+1} + 42F_{m+1}^2 - 42F_mF_{m+1} - 68F_{m+1}^2 + 440F_m^2 + 712F_mF_{m+1} +$
$+ 715F_mF_{m+1} + 1157F_{m+1}^2 - 442F_m^2 - 715F_mF_{m+1} - 714F_mF_{m+1} - 1155F_{m+1}^2)(20F_m +$
$+ 32F_{m+1}) = (8F_m^2 + 8F_mF_{m+1} - 8F_{m+1}^2)(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40F_m^2 - 40F_mF_{m+1} +$
$+ 8F_m^2)(20F_m + 32F_{m+1}) + (24F_m^2 + 24F_mF_{m+1} - 24F_m^2)(4F_m + 6F_{m+1})$

Винесемо спільний множник за дужки та застосуємо властивість

$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$:

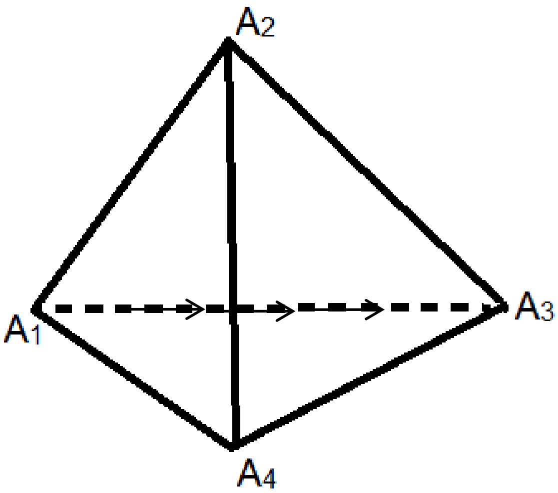
$\Delta= (8(F_{m-1}F_{m+1} + F_mF_{m+1} - F_{m+1}^2+(-1)^m))(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40(F_m^2 + F_mF_{m+1} -$
$-F_{m+1}^2 + (-1)^m))(20F_m + 32F_{m+1}) + (24(F_m^2 + F_mF_{m+1} - F_{m+1}^2+(-1)^m))(4F_m + 6F_{m+1}) =$
$= (8(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m - F_{m+1})+(-1)^m))(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m -$
$-F_{m+1})+(-1)^m))(20F_m + 32F_{m+1}) +(24(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m - F_{m+1})+(-1)^m)) (4F_m + 6F_{m+1})$

Розкриємо дужки, отримаємо:

$\Delta= (-1)^m(704F_m + 1136F_{m+1} - 800F_m -1280F_{m+1} + 96F_m + 144F_{m+1})=0$

Так як, мішаний добуток дорівнює нулю, точки $A_1A_2A_3A_4$лежать на одній площині.

2.2.5. Об'єм піраміди з вершинами в чотирьох послідовних точках послідовності (C_n)



Властивість 7

Розглянемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, ; $\overrightarrow{A_1A_3}$; $\overrightarrow{A_1A_4}$, та за правилом трикутника підрахуємо отриманий визначник третього порядку:

$$\Delta=(A_1A_2,A_1A_3,A_1A_4)=\begin{vmatrix} t_{m+4}-t_{m+1} & t_{m+5}-t_{m+2} & t_{m+6}-t_{m+3} \\ t_{m+7}-t_{m+1} & t_{m+8}-t_{m+2} & t_{m+9}-t_{m+3} \\ t_{m+10}-t_{m+1} & t_{m+11}-t_{m+2} & t_{m+12}-t_{m+3} \end{vmatrix} = (t_{m+4} -$$

$$t_{m+1})(t_{m+8} - t_{m+2})(t_{m+12} - t_{m+3}) + (t_{m+5} - t_{m+2})(t_{m+9} - t_{m+3})(t_{m+10} - t_{m+1}) +$$

$$+ (t_{m+7} - t_{m+1})(t_{m+11} - t_{m+2})(t_{m+6} - t_{m+3}) - (t_{m+10} - t_{m+1})(t_{m+8} - t_{m+2})(t_{m+6} -$$

$$- t_{m+3}) - (t_{m+7} - t_{m+1})(t_{m+5} - t_{m+2})(t_{m+12} - t_{m+3}) - (t_{m+4} - t_{m+1})(t_{m+11} -$$

$$- t_{m+2})(t_{m+9} - t_{m+3})$$

Винесемо спільні множники за дужки:

$$\Delta = (t_{m+8} - t_{m+2})((t_{m+4} - t_{m+1})(t_{m+12} - t_{m+3}) - (t_{m+10} - t_{m+1})(t_{m+6} -$$

$$- t_{m+3})) + (t_{m+5} - t_{m+2})((t_{m+9} - t_{m+3})(t_{m+10} - t_{m+1}) - (t_{m+7} - t_{m+1})(t_{m+12} -$$

$$-t_{m+3})) + (t_{m+11} - t_{m+2})((t_{m+7} - t_{m+1})(t_{m+6} - t_{m+3}) - (t_{m+4} - t_{m+1})(t_{m+9} - t_{m+3}))$$

Використаємо властивість (1.2.3):

$$t_{n+m} = t_{n+1}t_{m+1} + t_n t_m + t_n t_{m-1} + t_{n-1}t_m \quad , \text{ отримаємо}$$

$$\Delta = (t_{m+1} t_9 + t_m t_8 + t_m t_7 + t_{m-1} t_8 - t_{m-1} - t_m - t_{m+2})((t_{m+1} t_5 + t_m t_4 + t_m t_3 +$$

$$+t_{m-1} t_4 - t_{m+1})(t_{m+1} t_{13} + t_m t_{12} + t_m t_{11} + t_{m-1} t_{12} - t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - t_m t_2 - -t_{m-1}$$

$$t_3) - (t_{m+1} t_{11} + t_m t_{10} + t_m t_9 + t_{m-1} t_{10} - t_{m+1})(t_{m+1} t_7 + t_m t_6 + t_m t_5 + +t_{m-1} t_6 -$$

$$t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - t_m t_2 - t_{m-1} t_3)) + (t_{m+1} t_6 + t_m t_5 + t_m t_4 + t_{m-1} t_5 - -t_{m-1} - t_m -$$

$$t_{m+2})((t_{m+1} t_{10} + t_m t_9 + t_m t_8 + t_{m-1} t_9 - t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - t_m t_2 - -t_{m-1} t_3)(t_{m+1} t_{11} + t_m$$

$$t_{10} + t_m t_9 + t_{m-1} t_{10} - t_{m+1}) - (t_{m+1} t_8 + t_m t_7 + t_m t_6 + +t_{m-1} t_7 - t_{m+1})(t_{m+1} t_{13} + t_m$$

$$t_{12} + t_m t_{11} + t_{m-1} t_{12} - t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - t_m t_2 - -t_{m-1} t_3)) + (t_{m+1} t_{12} + t_m t_{11} + t_m$$

$$t_{10} + t_{m-1} t_{11} - t_{m-1} - t_m - t_{m+2})((t_{m+1} t_8 + +t_m t_7 + t_m t_6 + t_{m-1} t_7 - t_{m+1})(t_{m+1} t_7 + t_m$$

$t_6 + t_m t_5 + t_{m-1} t_6 - t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - -t_m t_2 - t_{m-1} t_3) - (t_{m+1} t_5 + t_m t_4 + t_m t_3 + t_{m-1} t_4 - t_{m+1})(t_{m+1} t_{10} + t_m t_9 + +t_m t_8 + t_{m-1} t_9 - t_{m+1} t_4 - t_m t_3 - t_m t_2 - t_{m-1} t_3))$

Записавши числа, розкривши дужки і звівши подібні доданки отримаємо:

$\Delta=-2(t_{m+1}^3 - 2 t_{m+1}^2 t_m - t_{m+1}^2 t_{m-1} - 2 t_{m+1} t_m t_{m-1} + t_{m+1} t_{m-1}^2 + 2 t_m^2 t_{m-1} + 2 t_m^3 + + 2 t_{m+1}^3 + 2 t_m t_{m-1}^2 + t_{m-1}^3)$

Розглянемо тотожність $t_n^3 - 2t_{n-1}t_n t_{n+1} + t_{n-2}t_{n+1}^2 + t_{n-1}^2 t_{n+1} - - t_{n-2}t_n t_{n+2} = 1$

З властивості (1.2.2) випливає, що

$t_{m+1}^3 = 1 + 2t_m t_{m+1} t_{m+2} - t_{m-1} t_{m+2}^2 - t_m^2 t_{m+3} + t_{m-1} t_{m+1} t_{m+3}$

Запишемо замість t_{m+2} вираз $t_{m-1} + t_m + t_{m+1}$, а замість t_{m+3}, вираз $t_m + t_{m+1} + + t_{m+2} = t_{m-1} + 2t_m + 2 t_{m+1}$, отримаємо:

$t_{m+1}^3 = 1 + 2t_m t_{m+1}(t_{m-1} + t_m + t_{m+1}) - t_{m-1} (t_{m-1} + t_m + t_{m+1})^2 - t_m^2(t_{m-1} + 2t_m + 2t_{m+1}) + t_{m-1} t_{m+1}(t_{m-1} + 2t_m + 2 t_{m+1})$

Розкривши дужки і звівши подібні доданки отримаємо:

$t_{m+1}^3 = 1+2t_{m+1} t_m t_{m-1} + 2 t_{m+1}^2 t_m - t_{m-1}^3 - 2t_m^2 t_{m-1} + t_{m+1}^2 t_{m-1} - 2t_{m-1}^2 t_m - - t_{m-1}^2 t_{m+1} - 2 t_m^3$

Отже ми отримуємо, що:

$\Delta=-2(1+2t_{m+1} t_m t_{m-1} + 2 t_{m+1}^2 t_m - t_{m-1}^3 - 2t_m^2 t_{m-1} + t_{m+1}^2 t_{m-1} - 2t_{m-1}^2 t_m - - t_{m-1}^2 t_{m+1} - 2 t_m^3 - 2 t_{m+1}^2 t_m - t_{m+1}^2 t_{m-1} - 2 t_{m+1} t_m t_{m-1} + t_{m+1} t_{m-1}^2 + 2 t_m^2 t_{m-1} + 2 t_m^3 + +2 t_{m+1}^3 + 2 t_m t_{m-1}^2 + t_{m-1}^3)$

Отже $\Delta=-2$.

Таким чином об’єм піраміди дорівнює $\frac{|\Delta|}{6} = 1/3$.

Що і треба було довести.

ВИСНОВКИ

Ми сформували і довели ряд властивостей чисел Фібоначчі та властивість чисел Трібоначчі, зв’язаних із їх спеціальним впорядкуванням.

Робота складається з вступу, двох розділів, висновку та списку літератури.

В першому розділі було роглянуто загальновідомі властивості чисел Фібоначчі, які булі використані для доведення нових. Також було розглянуто декілька властивостей чисел Трібоначчі.

В другому розділі ми сформулювали та довели нові властивості чисел Фібоначчі, які стосуються площ фігур утворених спеціальним впорядкуванням, а також було доведено властивість чисел Трібоначчі про об’єм піраміди.

Робота містить оригінальні результати. Результати роботи розширюють знання про властивості чисел Фібоначчі і можуть бути використані при теоретичних дослідженнях. Крім того ми запропонували векторний підхід до досліджень властивостей послідовності (F_n), що також може бути використано в подальшому.

У подальшому планується продовжити дослідження запропонованої автором гіпотези, що мішаний добуток *n* векторів, координати яких задані спеціальним впорядкуванням, завжди стале число. Також планується розпочати дослідження сум чисел Трибоначчі.

Результати роботи були представлені у доповіді на засіданні кафедри математики ММК ім.В.Д. Чайки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бродський, Я. С. Мовою матриць [Текст] / Я. С.Бродський, А. К. Сліпенко. - Львів : Каменяр, 2008. - 113 с.
2. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В.,. Гайдей В. О, Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk %20LA+AG.pdf
3. Воробьев Н.Н., Числа Фибоначчи. (Популярные лекции по математике, вып. 5). М., Наука.—144с.
4. Завдання XX-го Всукраїнського турніру юних математиків, Електронний ресурс]. – Режим доступу–http://tym.in.ua/2017/06/23/list/
5. Послідовність Фібоначчі – Вікіпедія, Електронний ресурс]. – Режим доступу–https://uk.wikipedia.org/wiki/Послідовність_Фібоначчі
6. Иванов О.А., Иванова В.В. Алгебраические методы исследования свойств чисел Трибоначчи. Современные проблемы математических и естественных наук в мире / Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. № 2. Казань, 2015. 85 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу–http://izron.ru/articles /sovremennye-problemy-matematicheskikh-i-estestvennykh-nauk-v-mire-sbornik-nauchnykh-trudov-po-itogam/sektsiya-6-matematicheskaya-logika-algebra-i-teoriya-chisel-spetsialnost-01-01-06/algebraicheskie-metody-issledovaniya-svoystv-chisel-tribonachchi/
7. Шпилька В.С. Нові властивості чисел Фібоначчі. Науково-дослідницька робота Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України. - Рукопис, Миколаїв 2018—25с

ДОДАТОК

Програма пошуку мішаного добутку векторів зі спеціально заданими координатами.