

Міністерство освіти і науки України
Департамент науки і освіти Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика

Секція: прикладна математика

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ

Роботу виконав:

Новицький Володимир Сергійович,
учень 10-В класу Миколаївського
муніципального колегіуму
імені В.Д. Чайки Миколаївської
міської ради Миколаївської області

Науковий керівник:

Борисенко Максим Юрійович,
кандидат фізико-математичних наук,
вчитель-методист, вчитель
Миколаївського муніципального
колегіуму імені В.Д. Чайки
Миколаївської міської ради
Миколаївської області

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Секція «Прикладна математика»

Тези до роботи

«Чисельний розрахунок частот вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини»

Новицький Володимир Сергійович, учень 10-В класу Миколаївського муніципального колегіуму імені В.Д. Чайки Миколаївської міської ради Миколаївської області.

Науковий керівник: Борисенко Максим Юрійович, кандидат фізико-математичних наук, вчитель-методист, вчитель Миколаївського муніципального колегіуму імені В.Д. Чайки Миколаївської міської ради Миколаївської області.

При проектуванні і будівництві різних інженерних споруд, які часто представляють собою комбінацію тонких пластин, доцільно і актуально проводити дослідження їх динамічної поведінки. У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні і розробити експериментальний підходи визначення частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини.

Робота складається зі вступу, трьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел. В першому розділі зроблено огляд публікацій з даного питання, описані чисельні методи визначення частот і форм власних коливань. В другому розділі чисельно визначені частоти і форми власних коливань пластин різної форми з різних матеріалів на основі створеної програми та методу скінченних елементів, який реалізовано на ліцензійному програмному засобі FEMAP. Встановлено залежність частоти від геометрії пластини і фізико-механічних характеристик матеріалу. У третьому розділі описано методика проведення експерименту за допомогою самостійно розробленої віброустановки та представлені отримані експериментальні та чисельні результати.

Чисельно отримані результати двома різними програмами добре узгоджуються з результатами отриманими експериментально, що дає змогу зробити висновок про ефективність запропонованих підходів, а розроблену установку використовувати для демонстрації розповсюдження механічних хвиль в плоских конструкціях.

ЗМІСТ

Вступ	4
РОЗДІЛ 1	7
1.1. Огляд досліджень з розв’язування задач про вільні коливання квадратної пластини з жорстко закріпленими торцями	7
1.2. Загальні відомості про пластини	9
1.3. Диференціальне рівняння коливання жорстко закріпленої пластини	10
1.4. Основні співвідношення МСЕ коливальних систем	12
Висновки до першого розділу	14
РОЗДІЛ 2	15
2.1. Створення програми для розрахунку частот вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини	15
2.2. Уточнення коефіцієнтів форм коливань	18
2.3. Побудова форм вільних коливань жорстко закріпленої прямокутної пластини	21
2.4. Розрахунок квадратних пластин різних розмірів	25
2.5. Розрахунок квадратних пластин з різних матеріалів	29
Висновки до другого розділу	31
РОЗДІЛ 3	32
3.1. Експериментальна установка і методика експериментального визначення частот і форм власних коливань квадратної пластини	32
3.2. Експериментальне визначення частот і форм власних коливань квадратної пластини	33
Висновки до третього розділу	33
Загальні висновки	35
Список використаних джерел	36

ВСТУП

Актуальність теми. У різних галузях сучасної техніки пластини різноманітних форм є найбільш поширеними елементами тонкостінних конструкцій. При проектуванні і будівництві різних інженерних споруд необхідно проводити розрахунок несучих елементів конструкцій на випадок дії різноманітних раптово виниклих динамічних навантажень. Тому, вивчення динамічної поведінки елементів інженерних споруд з урахуванням властивостей матеріалу і впливу навколишнього середовища при динамічному навантаженні є актуальною проблемою. У зв'язку з цим є необхідним поширити чисельні і розробити експериментальні методи дослідження частот і форм власних коливань жорстко закріплених квадратних пластин.

Мета та завдання роботи. Мету та завдання дослідження можна сформулювати наступним чином:

- виділення коефіцієнтів, що характеризують геометрію, матеріал та форму коливань пластини, в формулі для розрахунку власних частот методом Релея-Рітца;
- створення програми на основі зведеної формули для розрахунку частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини;
- чисельне розв'язування задачі методом скінченних елементів (МСЕ) про визначення частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини;
- встановлення залежності динамічних характеристик пластин від геометричних розмірів та фізико-механічних характеристик матеріалу;
- розробка експериментальної установки для визначення частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини;
- порівняльний аналіз результатів досліджень динамічних характеристик пластин отриманих на основі двох чисельних і

експериментального підходів;

- порівняння чисельно отриманих форм коливань пластин з рисунками Хладні отриманих експериментально.

Об'єктом дослідження є динамічна поведінка квадратної пластини.

Предметом дослідження є спектр частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини.

Методи дослідження. Дослідження проводились на базі лабораторії механіко-математичного факультету Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського. Чисельне визначення проводилось: на основі власної розробленої програми на основі методу Релея-Рітца; методом скінченних елементів реалізованого на ліцензійному програмному засобі FEMAP з розв'язувачем NX Nastran (угода № АС 12-60-NNU-589 від 25.10.2012, ліцензія №60046828). Експериментальне визначення частот і форм вільних коливань здійснювалось методом механічного збудження пластини та спостереженням форм коливань на резонансній частоті в реальному часі з подальшою реєстрацією картин на фотокамеру.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у наступних положеннях, що виносяться на захист:

- зведено форму запису формули для розрахунку власних частот за методом Релея-Рітца, особливістю якої є розділення величин за коефіцієнтами, що відповідають за геометрію, фізико-механічні характеристики та форму коливань;
- поширено ефективний чисельний підхід до розрахунку частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини, який базується на розв'язуванні рівнянь Лагранжа II роду в дискретній формі та скінченно-елементній апроксимації методом Ланцоша;
- розроблено експериментальний підхід до визначення динамічних характеристик пластин, який дає можливість в реальному часі спостерігати коливання поверхні пластини, встановити момент виникнення резонансу, вибрати необхідний режим віброзбудження, з достатнім ступенем

достовірності дослідити спектр частот і форм власних коливань;

- проведено розв'язування задач про вільні коливання жорстко закріпленої квадратної пластини та досліджено залежність динамічних характеристик від геометричних і механічних параметрів; виявлено закономірності у розподілі частот і форм власних коливань;

- проведено порівняльний аналіз чисельно і експериментально отриманих результатів та проведено порівняння форм власних коливань.

Достовірність отриманих результатів забезпечується коректністю проведення експериментів та вимірювань; використанням апробованих чисельних методів і критерію практичної збіжності; узгодженням чисельних результатів з експериментальними; розв'язком тестової задачі.

Практичне значення одержаних результатів. Реалізовані у роботі чисельні розрахунки і експеримент можуть бути використанні для дослідження динамічних характеристик пластин різних класів. Розроблена установка може бути використана для демонстрації розповсюдження механічних хвиль в плоских конструкціях в рамках вивчення шкільного курсу фізики та дисциплін у вищих навчальних закладах (ВНЗ): «Коливання і хвилі», «Експериментальні методи в механіці деформованого твердого тіла». Реалізовані у роботі чисельний і експериментальний підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики плоских елементів інших конфігурацій, а отримані результати можуть бути використані для оцінки допущень побудованих інших теоретичних та експериментальних моделей, досліджень в науково-дослідних організаціях та конструкторських бюро, а також при аналізі поведінки конкретних конструктивних елементів.

Структура і обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів основної частини, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг роботи становить 39 сторінок, який включає в себе 6 рисунків і 13 таблиць. Окрім загального обсягу роботи наведені тези на 1 сторінку, список використаних джерел із 40 найменувань на 3 сторінках.

РОЗДІЛ 1

ОГЛЯД ДОСЛІДЖЕНЬ. ОСНОВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

1.1. Огляд досліджень з розв'язування задач про вільні коливання квадратної пластини з жорстко закріпленими торцями

Дослідженню частот і форм вільних коливань прямокутних пластин присвячено багато наукових публікацій, а дана тематика є актуальною вже понад 80 років. Однією з перших робіт, в якій проведено розрахунок основної частоти квадратної пластини, є робота С. Томотіка 1936 року [1]. Огляд старих публікацій наведено в [2], але прямокутним пластин в ній присвячено всього кілька сторінок. В роботі [3] розглянуто 21 тип можливих для прямокутної пластини граничних умов. Огляд по застосуванню методу Релея-Рітца наведено в [4]. Є декілька вагомих монографій присвячених вільним коливанням пластин російською [5, 6] і англійською мовою [7-10].

В рамках класичної теорії для визначення частот і форм вільних коливань використовується багато різноманітних методів: метод Релея-Рітца [11], метод Бубнова-Гальоркіна [12], метод колокацій [13], метод сплайн-апроксимації [14], метод збурень [15], метод рядів [16], метод сіток [17], метод початкових параметрів Б.Г.Коренева [18], метод Едмана [19], асимптотический метод В.В.Болотіна [20] та інші. Короткий виклад цих методів наводиться в роботах [11, 21, 22] та інші.

При визначенні частот і форм вільних коливань розглядаються гармонійні коливання, що дозволяє виключити час з рівнянь руху і звести задачу до визначення амплітудних значень переміщень, зусиль і напружень, тобто до аналогічної задачі статички. Таким чином, з'явилася можливість застосування апарату будівельної механіки статично навантажених систем до вирішення динамічних задач. Це і було зроблено для пластин в роботах С.А.Гершгоріна [23], А.П. Філіппова [24], В.З.Власова [25], В.І. Петрашен [26], М.П.Галіна [27], А.М.Какушадзе [28], Б.Г.Коренева [29], В.В.Болотіна [30, 31], К.А.Кістьяна [32], В.Н.Москаленко [33, 34] та ін.

Сучасна наука, також, не залишає без уваги дану проблему, так в [35] наводиться огляд робіт присвячених обчисленню частот вільних коливань прямокутної пластини, наведені результати обчислювальних експериментів, якими показано, що друга і третя частота квадратної пластинки – кратні, тобто відповідний власний підпростір – двовимірний. Наведено дві відповідні власні форми. В [36] побудовано аналітичні вирази для обчислення власних частот і форм коливань затисненої по контуру квадратної однорідної пластини. Дана оцінка похибки порівняння з відомими високоточними розрахунками. Зроблено порівняння аналітичних розрахунків з експериментальними даними, отриманими автором резонансним методом. Встановлено, що аналітичні і відповідно чисельні результати збігаються з експериментальними з похибкою менше 1%.

Одним з сучасних методів розрахунку задач динаміки за допомогою ЕОМ є МСЕ. В роботі [37] досліджується тонка квадратна пластинка з різними фізико-механічними характеристиками з вільними краями. Моделювання геометрії та чисельний розрахунок частот та форм вільних коливань пластин виконано методом скінченних елементів, який реалізовано за допомогою комп'ютерної програми FEMAP з розв'язувачем NASTRAN. Проводиться порівняльний аналіз розрахованих власних частот квадратної пластини з частотами, які отримані чисельно та експериментально іншими авторами.

Слід відмітити що окрім аналітичних і чисельних методів існують експериментальні методи дослідження вільних коливань пластин, так в [38] обговорюється експериментальний аналіз вібраційних режимів пластин. Електронна інтерферометрія спекл-шаблону (ESPI) є одним з оптичних методів неруйнівного контролю. За допомогою ESPI вимірюються і якісно порівнюються режими вібрації пластин з різними точками збудження, різним співвідношенням довжин. В результаті дослідження встановлено, що розбіжність частот визначених теоретично та експериментально знаходяться в межах 10%, а форми коливань отримані за допомогою ESPI мають високу точність.

1.2. Загальні відомості про пластини

Пластиною називається призматичне тіло, обмежене двома площинами, відстань між якими мала в порівнянні з іншими характерними розмірами. Ця відстань називається товщиною h . Площина, рівновіддалена від поверхонь пластини, називається серединною поверхнею [39]. До серединної поверхні прив'язана одна з координатних площин декартової системи координат (рис.1.1).

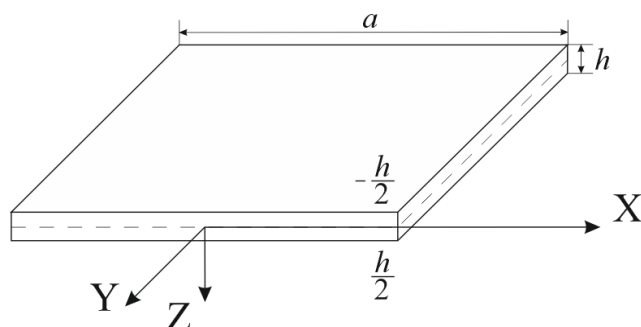


Рис 1.1. Прямокутна пластина

Прогоном пластини w називається вертикальне переміщення точки, що лежить на серединній поверхні пластини, через деформацію згину, яка виникає в наслідок різних зовнішніх факторів.

Тонкою вважається пластина, для якої виконується наступна умова [39]:

$$\frac{1}{80} \leq \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5},$$

де a – характерний розмір основи, при цьому очікуваний прогин w складає не більше ніж $\frac{1}{4}h$.

При $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$ пластину відносять до товстих плит, а при $\frac{w}{h} > \frac{1}{4}$ – до

гнучких пластинках (мембран).

Тонкі пластинки розраховують по технічній теорії. Вона базується на наступних гіпотезах Кірхгофа:

- гіпотеза прямої нормалі, відповідно до якої нормаль до серединної площини залишається прямий і нормальною до вигнутої серединної поверхні, довжина її не змінюється;

- гіпотеза про нерозтяжність серединної поверхні. На підставі цієї гіпотези вважається, що серединна площина при вигині не змінює своєї форми і розмірів;

- гіпотеза про не надавлювання шарів пластини: тиск шарів пластини друг на друга перпендикулярно серединної поверхні вважається малим, тому ним можна знехтувати.

У зв'язку з тим, що розрахунок товстих плит істотно складніший, вважають, що за технічною теорією можна розраховувати пластини з відношенням $\frac{h}{a}$ до $\frac{1}{3}$.

Ділення пластин на жорсткі, пружні і абсолютно пружні умовне. Поведінка пластини під навантаженням визначається не тільки її геометричними параметрами, а істотно залежить від механічних властивостей матеріалу пластини і умов її закріплення.

1.3. Диференціальне рівняння коливання жорстко закріпленої пластини

Коліваннями називаються рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі. Різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й однаковими рівняннями.

Якщо на пластину буде діяти динамічна зовнішня сила (фактор), яка, наприклад, змінюється за гармонічним законом, то пластина буде коливатися. Колівання будуть вільними (власними), якщо колівання виникають у результаті початкового виведення системи з положення стійкої рівноваги і здійснюються за рахунок внутрішніх сил системи, не зазнаючи впливу з боку змінних зовнішніх сил.

Диференціальне рівняння малих поперечних коливань прямокутної

пластини в рамках гіпотези Кірхгофа-Лява буде мати вигляд [21]:

$$D\Delta\Delta w + \rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = q, \quad (1.1)$$

де:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (1.2)$$

$$\Delta = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \right] \quad (1.3)$$

D – циліндрична жорсткість, w – прогин пластини, ρ – густина матеріалу, h – товщина пластини, q – інтенсивність поперечного навантаження, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, Δ – узагальнений оператор Лапласа, H_1, H_2 – параметри Ламе.

На кожному з торців пластини можуть бути задані граничні умови, наприклад, жорстке закріплення:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1.4)$$

В декартовій системі координат коефіцієнти Ламе приймуть наступні значення:

$$H_1 = H_2 = 1 \quad (1.5)$$

Підставивши (1.5) в (1.3) отримаємо:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (1.6)$$

Задача про визначення частот вільних коливань жорстко закріпленої по контуру прямокутної пластини не піддається розв'язуванню в аналітичній формі, тому може бути розв'язана тільки наближеним методом. Зручно шукати форми власних коливань у вигляді добутку балочних функцій $F_m(x)$, які відповідають балці з защемленими кінцями [21]:

$$\omega_{mn} = c_{mn} F_m(x_1) F_n(x_2) \quad (1.7)$$

Застосування формули Релея-Рітца [4] дає наближене значення для

частоти вільних коливань:

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} \cdot \frac{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} \left\{ (\Delta w)^2 + 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right] \right\} dx_1 dx_2}{\int_0^{a_1} \int_0^{a_2} w^2 dx_1 dx_2} \quad (1.8)$$

Після інтегрування (1.8) [21] отримаємо формулу для наближеного визначення частот вільних коливань жорстко закріпленої прямокутної пластини:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A_m^4}{a_1^4} + \frac{A_n^4}{a_2^4} + 2 \frac{B_m B_n}{a_1^2 a_2^2} \right)}, \quad (1.9)$$

$$A_m = \begin{cases} 1,506 & (m=1) \\ m+0,5 & (m \geq 2) \end{cases}; \quad B_m = \begin{cases} 1,248 & (m=1) \\ A_m \left(A_m - \frac{2}{\pi} \right) & (m \geq 2) \end{cases} \quad (1.10)$$

Відмітимо, що за формулою (1.9) визначають циклічну частоту, тобто кількість коливань за 2π секунди, в науковій літературі, зазвичай, звільняються від розмірності частоти за допомогою формули:

$$\omega^* = \omega a_1^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (1.11)$$

1.4. Основні співвідношення МСЕ коливальних систем

Основна ідея МСЕ полягає в тому, що область визначення неперервної величини (переміщення, температури, тиску) розбивається на скінченне число малих областей – скінченних елементів (стержневі елементи; прямокутні, трикутні пластинки; паралелепіпеди, тетраедри), які з'єднуються у вузлах. Ці елементи в сукупності апроксимують форму області. Цей метод необмежений ні формою тіла, ні способом навантаження. При дослідженні конструкцій основними етапами є : побудова фізичної моделі; побудова математичної моделі; розв'язування математичної моделі; аналіз отриманих результатів.

МСЕ – наближений метод, точність якого залежить від правильності вибору типів і розмірів скінченних елементів.

В теоретичній механіці для розв’язування задач динаміки одним із універсальних методів є застосування рівняння Лагранжа II роду [40], яке для потенціальних механічних систем має вигляд

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.12)$$

де q_i – i -та узагальнена координата, \dot{q}_i – i -та узагальнена швидкість, що є похідною i -тої узагальненої координати по часу, n – кількість ступенів вільності, що відповідає кількості незалежних координат, T і Π – відповідно кінетична і потенціальна енергії механічної системи. Кількість рівнянь Лагранжа відповідає кількості ступенів вільності механічної системи.

Рівняння динаміки для МСЕ можна отримати, якщо в рівняння Лагранжа II роду (1.12) записати потенціальну та кінетичну енергію в дискретній формі

$$\Pi = \frac{1}{2} \{\lambda_i\}^T K_i \{\lambda_i\}, \quad T = \frac{1}{2} \{\dot{\lambda}_i\}^T M_i \{\dot{\lambda}_i\}, \quad (1.13)$$

де K_i і M_i – відповідно жорсткість та маса i -ого вузла, $\{\lambda_i\}$, $\{\dot{\lambda}_i\}$ – вектор-стовпчик відповідно переміщень та швидкостей всіх вузлів скінченно-елементної області, $\{\}^T$ – транспонування вектора-стовпчика у вектор-рядочок. Тобто

$$[M] \{\ddot{\lambda}\} + [K] \{\lambda\} = \{0\}, \quad (1.14)$$

де $[K]$ – матриця жорсткості і $[M]$ – матриця мас всієї системи.

Розв’язок рівняння (1.14) можна шукати у вигляді

$$\{\lambda\} = \{A\} \cos(\omega t + \beta), \quad (1.15)$$

де $\{A\}$ – вектор амплітудних значень вузлових переміщень, що визначають форму власних коливань; ω – колова частота, β – фаза коливань. Після прямої підстановки (1.15) у (1.14) та скорочення на $\cos(\omega t + \beta)$ отримаємо

систему алгебраїчних рівнянь:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{A\} = \{0\}, \quad (1.16)$$

У цій системі ненульові значення компонентів $\{A\}$ можливі лише при умові, що

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0. \quad (1.17)$$

Якщо квадратні матриці $[M]$ та $[K]$ – додатньо визначені (звичайно для задачі лінійної пружності), то рівняння (1.17) має N додатних розв’язків – власних частот ω_k , причому можливі парні значення (тут N – кількість невідомих у системі алгебраїчних рівнянь (1.16)).

Маючи N значень власних частот ω_k , розв’язок системи (1.14) можна шукати у вигляді лінійної комбінації з N виразів (1.15):

$$\{\lambda\} = \sum_{k=1}^N \{A_k\} \cos(\omega_k t + \beta_k). \quad (1.18)$$

Для визначення частот і форм власних коливань використовують як основний метод Ланцоша (Lanczos), що потребує менших ресурсів (часу обчислень і вільної пам’яті на жорсткому диску) порівняно з іншими методами [40].

Висновки до першого розділу

1. Зроблено огляд публікацій присвячених розв’язуванню задачі про власні коливання жорстко закріплених квадратних пластин, в результаті чого виявлено, що дана проблема дуже широко і активно обговорюється. Сучасна наука також займається цим питанням, про що свідчать сучасні публікації.
2. Запропоновано метод Релея-Рітца для розв’язування поставленої задачі.
3. Наведені основні положення метода скінченних елементів, що застосовується при розв’язуванні задач динаміки пластин, який базується на розв’язуванні рівнянь Лагранжа II роду в дискретній формі та скінченно-елементній апроксимації методом Ланцоша.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ

2.1. Створення програми для розрахунку частот вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини

Для створення програми для розрахунку частот вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини використаємо формулу (1.9) і (1.10). Оскільки пластина квадратна, то:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a; \\ A_m &= A_n = A; \\ B_m &= B_n = B. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Підставляючи (2.1) в (1.9) отримаємо:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{A^4}{a^4} + \frac{A^4}{a^4} + 2 \frac{B B}{a^2 a^2} \right)} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)} \quad (2.2)$$

Розпишемо в (2.2) величину D згідно формули (1.2)

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\rho h} \left(\frac{2A^4 + 2B^2}{a^4} \right)} \quad (2.3)$$

У виразі (2.3) згрупуємо величини за категоріями: константи; величини що відповідають за геометрію пластини; величини що характеризують матеріал пластини; величини що характеризують форму коливань.

$$\begin{aligned} \omega &= \pi^2 \sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{h^2}{a^4} \cdot \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \cdot (A^4 + B^2)}; \\ \omega &= \frac{\pi^2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{A^4 + B^2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Оскільки формула (2.4) розраховує колову частоту, то для отримання результату в Гц достатньо (2.4) поділити на 2π .

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{A^4 + B^2}. \quad (2.5)$$

В результаті отримаємо зведену форму запису формули (1.9) розрахунку власних частот за методом Релея-Рітца, особливістю якої є розділення величин за категоріями. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned} G &= \frac{h}{a^2}; \\ M &= \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}; \\ F_{mn} &= \sqrt{A^4 + B^2}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

де G – коефіцієнт геометрії, M – коефіцієнт матеріалу; F_{mn} – коефіцієнт форми коливань; m, n – кількість півхвиль вздовж кожної із сторін пластини відповідно.

Підставимо (2.6) в (2.5)

$$\omega = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_{mn}. \quad (2.7)$$

Для зручності порівняння розрахованої частоти з частотами отриманими іншими авторами [21] застосуємо формулу (1.11), яка дає змогу звільнитися від розмірності частоти.

Використовуючи формули (2.5), (1.10) реалізуємо розрахунок частот і форм вільних коливань в середовищі програмування АЛГО (рис. 2.1).

В якості об'єкта дослідження оберемо жорстко закріплену алюмінієву (модуль Юнга $E = 71 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,34$, густина $\rho = 2710 \text{ кг/м}^3$) квадратну пластину сталого товщини $d = 3 \text{ мм}$ розміром $a = 140 \text{ мм}$. Така геометрія і матеріал вибрані у відповідності з геометрією і матеріалом реальної пластини, яка в подальшому буде експериментально досліджуватись, для підтвердження правдивості проведених розрахунків.


```

File  Редагування  Шаблони  Виконання  Опції  Вікно  Довідка
[Icons]
Program NoName;
Var
  E, v, ro, An, Bn, a, h, w, m, n: real;
Begin
  WriteLn('1. Введіть сторону пластини в метр');
  Write('a=');
  Read(a);
  WriteLn('2. Введіть товщину пластини в метр');
  Write('h=');
  Read(h);
  WriteLn('3. Введіть густину матеріалу в кг/м3');
  Write('ro=');
  Read(ro);
  WriteLn('4. Введіть модуль Юнга матеріалу в Па');
  Write('E=');
  Read(E);
  E:=E*1000000;
  WriteLn('5. Введіть коефіцієнт Пуассона');
  Write('v=');
  Read(v);
  An:=1.506;
  Bn:=1.248;
  w:=(pi*pi/sqr(a))*sqrt((2*E*h*(12*ro*(1-s
  w:=w/(2*pi);
1. Введіть сторону пластини в метрах
a=0.14
2. Введіть товщину пластини в метрах
h=0.003
3. Введіть густину матеріалу в кг/м3
ro=2710
4. Введіть модуль Юнга матеріалу в Па
E=71000
5. Введіть коефіцієнт Пуассона
v=0.34
m=1; n=1, w=1382.98 Гц
m=1; n=2, w=2780.58 Гц
m=2; n=1, w=3427.13 Гц
m=2; n=2, w=4185.63 Гц
m=1; n=3, w=5509.29 Гц
m=3; n=3, w=8485.69 Гц
m=1; n=4, w=9393.03 Гц
m=3; n=4, w=11396.66 Гц
m=4; n=3, w=12105.49 Гц
m=2; n=5, w=14710.86 Гц
m=5; n=2, w=16388.01 Гц
m=4; n=4, w=14297.54 Гц
m=1; n=3, w=5509.29 Гц

```

Рис. 2.1. Вікно програми АЛГО

Для перевірки правильності розрахунків нашої програми, на першому етапі, використаємо МСЕ реалізований в ліцензійному програмному середовищі Femap [40]. Розбивка проводилась *plate*-елементами сталюї товщини розмірами $1 \times 1 \text{ мм}$ (рис.2.2). Досліджувався спектр частот і форм власних коливань квадратної пластинки жорстко закріпленої по краям.

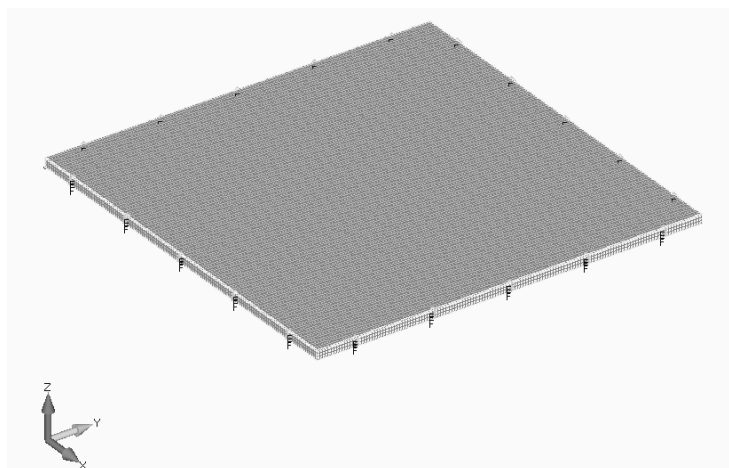


Рис. 2.2. Скінченно-елементна модель досліджуваної пластини

Частоти розраховані власною програмою (в середовищі АЛГО) і Femap представленні в таблиці 1, де ε – відхилення між результатами.

Таблиця 1

m	n	$\omega, Гц$		$\varepsilon, \%$
		АЛГО	FEAP	
1	1	1382,98	1373,10	0,71
1	2	2780,58	2789,16	0,31
2	1	3427,13	2789,16	0,31
2	2	4185,63	4095,74	2,15
1	3	5509,29	4971,83	9,76
3	3	8485,69	8137,38	4,10
1	4	9393,03	7804,66	16,91
3	4	11396,66	10886,67	4,47
4	3	12105,49	10886,67	10,07
2	5	14710,86	12479,79	15,17
5	2	16388,01	12479,79	23,85
4	4	14297,54	13551,30	5,22

Аналізуючи таблицю 1, спостерігається мале відхилення між першими частотами та частотами при $m=n$ і значні відхилення для інших форм коливань, що перевищують 20%, тому є необхідність уточнити формулу (2.5) та/або (2.7).

2.2. Уточнення коефіцієнтів форм коливань

Нехай маємо еталонний відомий розрахунок пластини та розрахунок для будь-якої жорстко закріпленої квадратної пластини. Оскільки Feap широко використовується при різних інженерних розрахунках [40], а також апробований для розрахунків квадратних пластин з вільними краями [37], то результати отримані за допомогою Feap (таблиця 1) будемо вважати еталонними.

Запишемо формулу (2.7) для еталонної (e) та невідомої (unk) пластини.

$$\omega_e = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_e \cdot M_e \cdot F_{mn}^e \quad (2.8)$$

$$\omega_{unk} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G_{unk} \cdot M_{unk} \cdot F_{mn}^{unk} \quad (2.9)$$

Розділимо (2.9) на (2.8). Після нескладних математичних перетворень отримаємо:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{G_{unk}}{G_e} \cdot \frac{M_{unk}}{M_e} \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e} \quad (2.10)$$

Формула (2.10) дає змогу по відомим параметрам еталонної пластини, а також відомим розмірам шуканої пластини та її характеристикам матеріалу визначити частоти шуканої пластини на відповідних формах коливань. Оскільки в дану формулу входить багато величин, то є необхідним розглянути деякі випадки та на основі них зробити деякі узагальнення у вигляді залежностей.

Припустимо, що еталонна і шукана пластини мають однакові геометричні розміри та виготовлені з одного матеріалу, це означає що два множника у формулі (2.10) приймуть значення одиниці, тобто:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{F_{mn}^{unk}}{F_{mn}^e} \quad (2.11)$$

Розглянемо першу власну частоту еталонної пластини і першу власну частоту шуканої пластини, які візьмемо з таблиці 1 відповідно, коефіцієнт першої форми коливань шуканої пластини розрахуємо за третьою формулою (2.6) з урахуванням формули (1.10).

$$\omega_e = 1373,10 \text{ Гц};$$

$$\omega_{unk} = 1382,98 \text{ Гц};$$

$$F_1^{unk} = \sqrt{1,506^4 + 1,248^2} = \sqrt{6,7014913} \approx 2,588714.$$

З урахуванням наведених значень виразимо з (2.11) коефіцієнт першої форми коливань еталонної пластини:

$$F_1^e = F_1^{unk} \cdot \frac{\omega_1^e}{\omega_{unk}}; \quad (2.12)$$

$$F_1^e = 0,00187184 \cdot \omega_1^e \quad (2.13)$$

Розрахуємо перші десять коефіцієнти форм коливань за формулою

(2.13) без класифікації по m і n , результати представимо в таблиці 2.

Таблиця 2

i	ω_i^e	F_i^e
1	1373,10	2,570224
2	2789,16	5,220861
3	2789,16	5,220861
4	4095,74	7,666570
5	4971,83	9,306470
6	4997,01	9,353603
7	6210,51	11,625080
8	6210,51	11,625080
9	7899,70	14,786970
10	7899,70	14,786970

Внесемо корективи до формули (2.7).

$$\omega_i = \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \cdot G \cdot M \cdot F_i^e, \quad (2.14)$$

де F_i^e – уточнений коефіцієнт форми коливань який береться з таблиці 2.

Врахуємо зроблені уточнення у нашій програмі та проведемо повторні розрахунки для перших десяти власних частот (рис. 2.3).

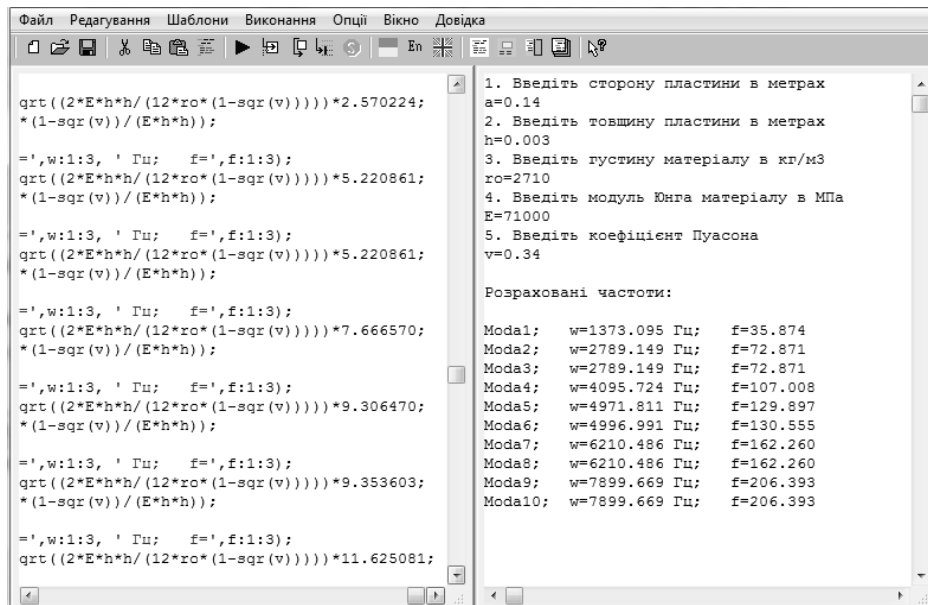


Рис.2.3. Вікно програми АЛГО з уточненими коефіцієнтами.

Отримані результати розраховані АЛГО і Femar наведено в таблиці 3. Порівняння трьох безрозмірних частот з частотами отриманими іншими

авторами [21] представлені в таблиці 4.

Таблиця 3

<i>Moda</i>	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$
	АЛГО	FEMAP	
1	1373,10	1373,10	0,00
2	2789,15	2789,16	0,00
3	2789,15	2789,16	0,00
4	4095,72	4095,74	0,00
5	4971,81	4971,83	0,00
6	4996,99	4997,01	0,00
7	6210,49	6210,51	0,00
8	6210,49	6210,51	0,00
9	7899,67	7899,70	0,00
10	7899,67	7899,70	0,00

Таблиця 4

Метод	m/n		
	1/1	2/1	2/2
Релея-Рітца (перше наближення)	37,46	74,81	108,13
Релея-Рітца	35,99	73,41	108,27
Едмана	35,999	73,405	108,237
Вайнштейна	35,99	70	105
Саусвела	32,816	67,87	97,86
Ігуті	35,99	73,41	108,22
Метод рядів	35,7	75,0	107,8
АЛГО	36,133	72,647	109,357
АЛГО (уточнені коефіцієнти)	35,874	72,871	107,008

Аналізуючи дані таблиць можна дійти висновку, що розроблена програма працює добре з досить високою точністю порівнюючи з МСЕ, а уточнення коефіцієнтів форм підвищило точність розрахунків.

2.3. Побудова форм вільних коливань жорстко закріпленої прямокутної пластини

Для наочності отриманих результатів необхідно мати представлення про форми коливань. Оскільки програма розраховує квадратні пластини постійної товщини з однотипними граничними умовами, то форми коливань будуть мати однаковий порядок який відповідає моді коливання. Для

реалізації цієї задачі, а також наданню програмі кращого інтерфейсу, змінимо середовище програмування на Delphi. В результаті чого отримаємо наступне вікно програми (рис.2.4).

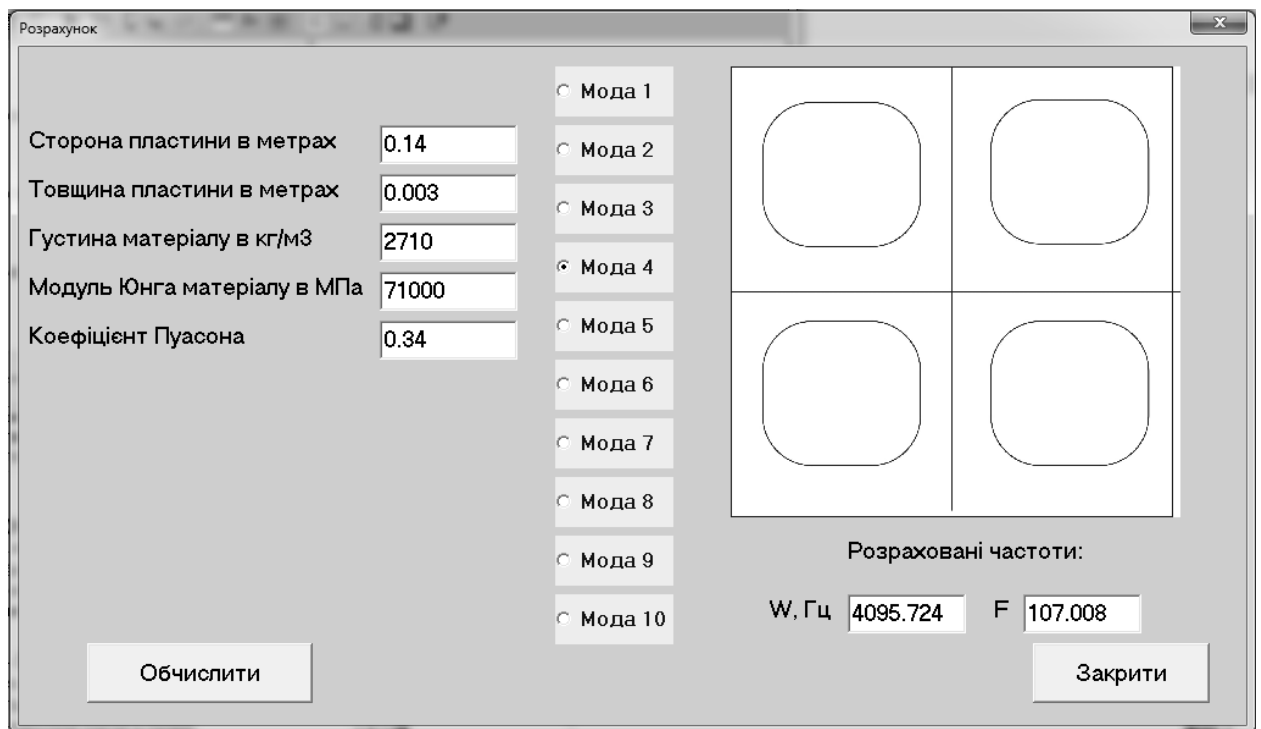
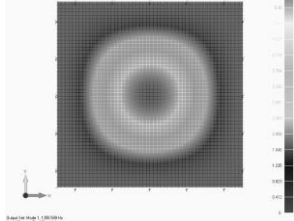
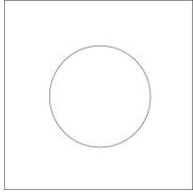
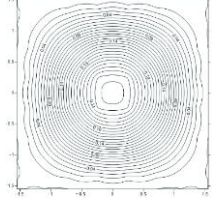
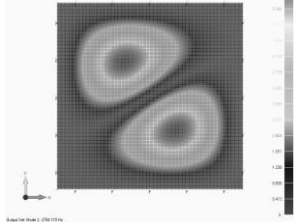
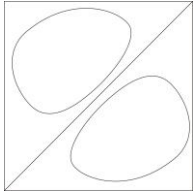
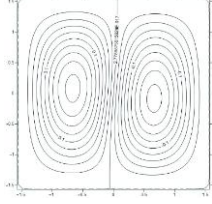
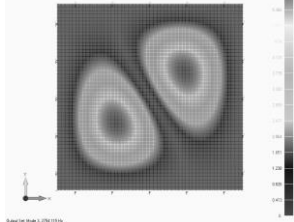
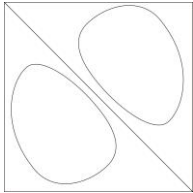
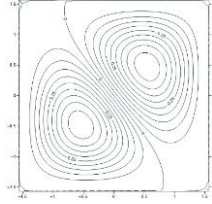
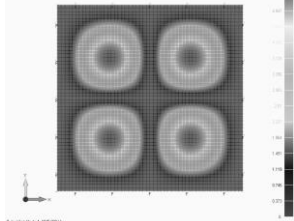
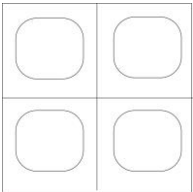
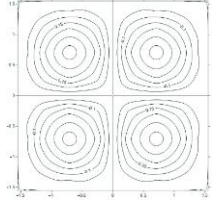
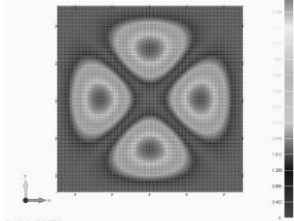
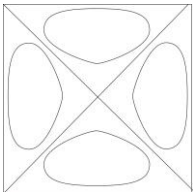
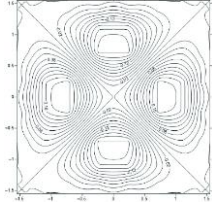


Рис. 2.4. Вікно програми Delphi. Розрахована четверта частота і форма коливань

Так як програма АЛГО і Delphi працюють за одним алгоритмом, то точність розрахованих частот буде однаковою. Порівняємо форми коливань побудовані Femap, Delphi та форми побудовані іншим автором [35] (таблиця 5), для кращого розуміння розподілу переміщень поверхні пластини представимо деякі форми коливань в просторі (таблиця 6).

Таблица 5

FEMAP	DELPHI	[35]
		
<i>Moda 1</i>		
		
<i>Moda 2</i>		
		
<i>Moda 3</i>		
		
<i>Moda 4</i>		
		
<i>Moda 5</i>		

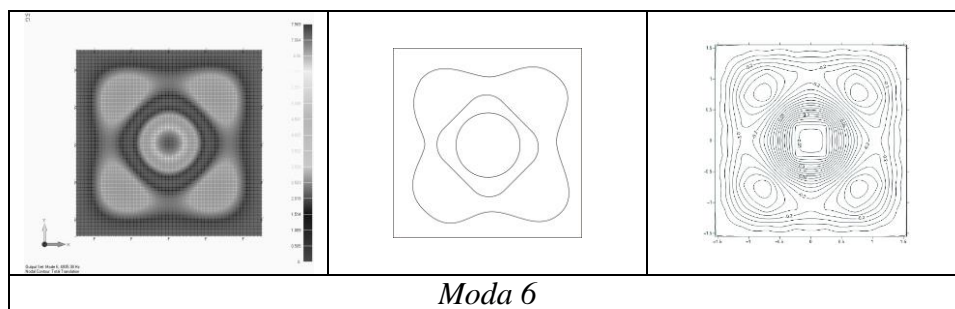
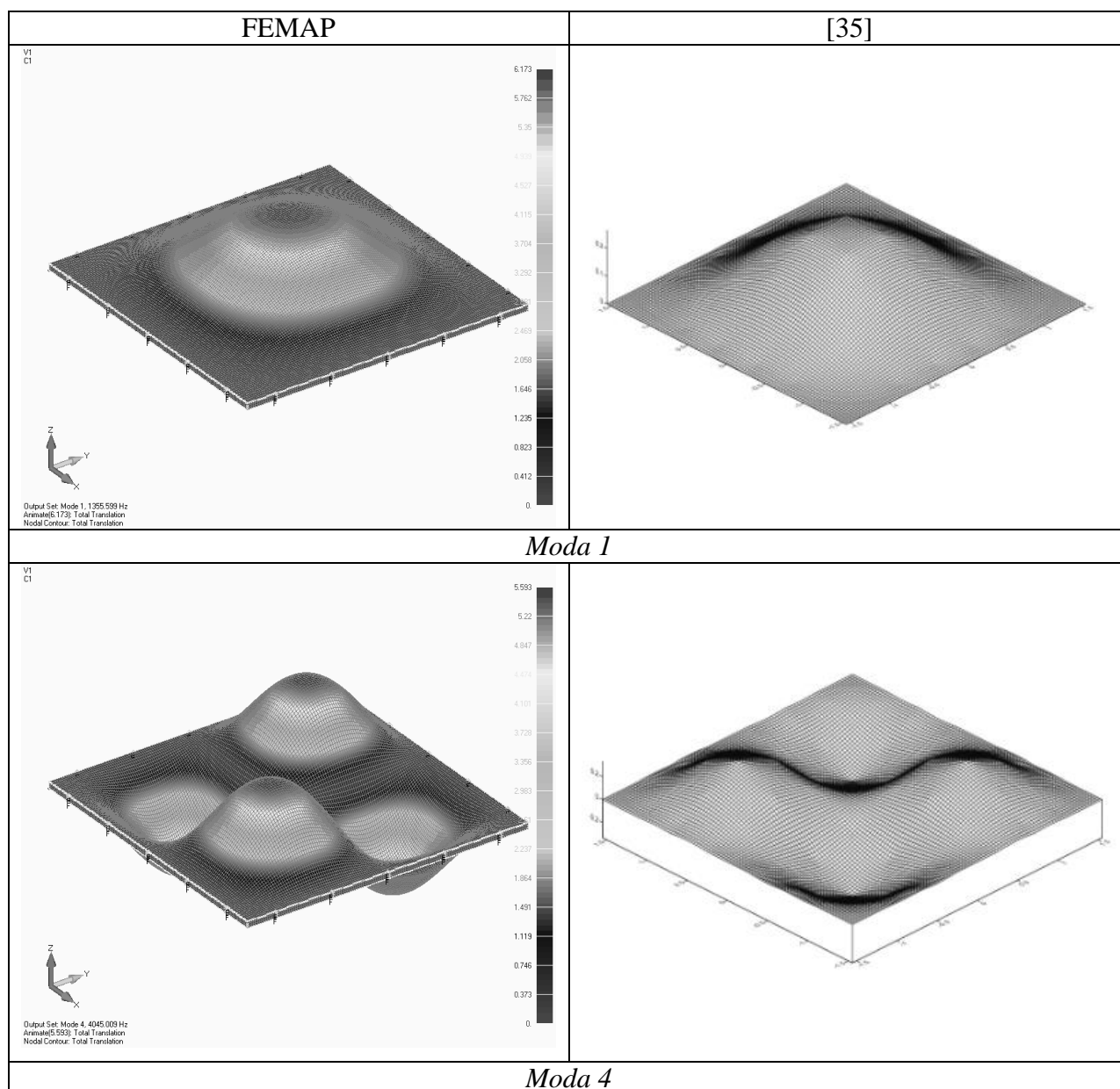
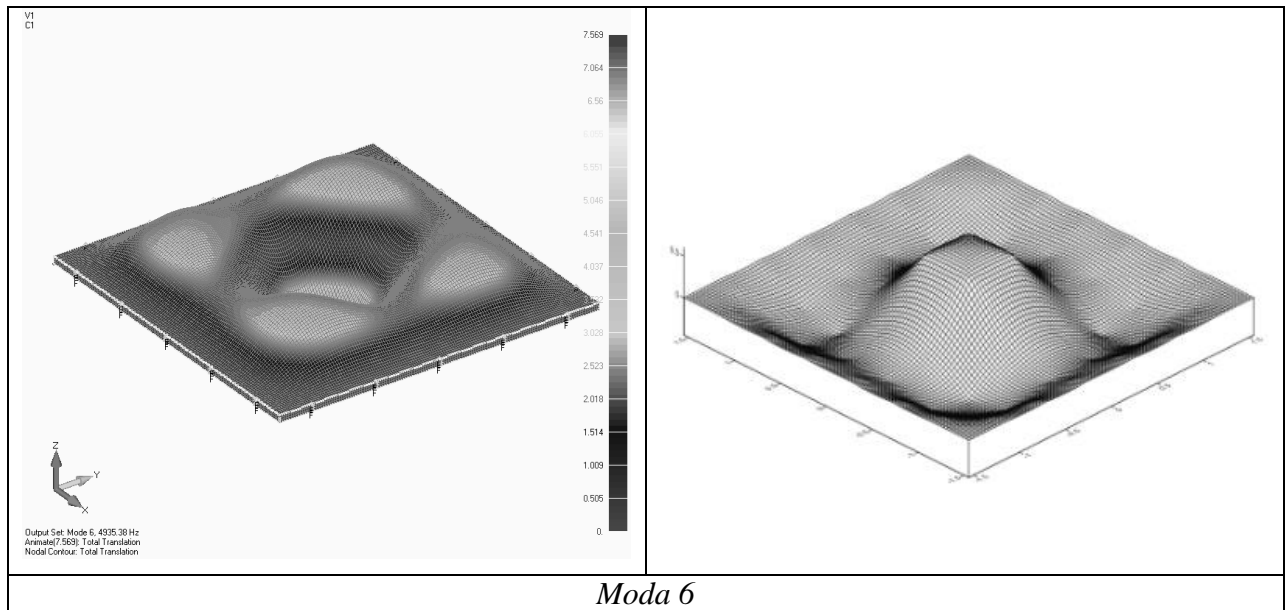


Таблица 6





2.4. Розрахунок квадратних пластин різних розмірів

Припустимо, що еталонна і шукана пластина виготовлені з одного матеріалу, мають різні геометричні розміри та, але розглядаються при однакових формах коливань, це означає що два множника у формулі (2.10) приймуть значення одиниці, тобто:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{G_{unk}}{G_e} \quad (2.15)$$

Розпишемо (2.15) згідно (2.6).

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{h_{unk} \cdot (a_e)^2}{(a_{unk})^2 \cdot h_e} \quad (2.16)$$

Як еталонну пластину буде у всіх задачах розглядати пластину розраховану в пункті 2.2. В формулі (2.16) можливі різні зміни величин шуканої пластинки, а саме: зміна тільки розміру a_e ; зміна тільки розміру h_e ; одночасна зміна розміру a_e і h_e .

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір a_e збільшився в 2 рази, а всі інші величини такі самі як у еталона, тоді (2.16) прийме вигляд:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{(a_e)^2}{(2 \cdot a_e)^2} = \omega_e \cdot \frac{(a_e)^2}{4 \cdot (a_e)^2},$$

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (2.17)$$

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 7, в якій представлено розбіжність між двома розрахунками, а також представлено коефіцієнт залежності шуканої частоти від еталонної (2.17) при збільшені сторони квадрату в два рази.

Для достовірності тверджень розрахуємо пластину у якої геометричний розмір a_e зменшився в 2 рази, а всі інші величини такі самі як у еталона, тоді (2.16) прийме вигляд:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{(a_e)^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot a_e\right)^2} = \omega_e \cdot \frac{(a_e)^2}{\frac{1}{4} \cdot (a_e)^2} = \omega_e \cdot 4, \quad (2.18)$$

$$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e} = 4$$

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 8, в якій представлено розбіжність між двома розрахунками, а також представлено коефіцієнт залежності шуканої частоти від еталонної (2.18) при зменшені сторони квадрату в два рази.

Таблиця 7

Moda	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	343,27	343,85	0,17	0,250	0,250
2	697,29	700,52	0,46	0,250	0,251
3	697,29	700,52	0,46	0,250	0,251
4	1023,93	1031,30	0,71	0,250	0,252
5	1242,95	1253,99	0,88	0,250	0,252
6	1249,25	1260,06	0,86	0,250	0,252
7	1552,62	1569,73	1,09	0,250	0,253
8	1552,62	1569,73	1,09	0,250	0,253
9	1974,92	2002,54	1,38	0,250	0,253
10	1974,92	2002,54	1,38	0,250	0,253

Таблиця 8

<i>Moda</i>	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	5492,38	5420,66	1,32	4,000	3,948
2	11156,60	10886,05	2,49	4,000	3,903
3	11156,60	10886,05	2,49	4,000	3,903
4	16382,90	15814,80	3,59	4,000	3,861
5	19887,24	19106,60	4,09	4,000	3,843
6	19987,96	19220,71	3,99	4,000	3,846
7	24841,94	23641,90	5,08	4,000	3,807
8	24841,94	23641,90	5,08	4,000	3,807
9	31598,68	29827,09	5,94	4,000	3,776
10	31598,68	29827,09	5,94	4,000	3,776

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір h_e збільшився в 2 рази, а всі інші величини такі самі як у еталона, тоді (2.16) прийме вигляд:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{2 \cdot h_e}{h_e} = \omega_e \cdot 2,$$

$$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e} = 2 \quad (2.19)$$

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 9.

Таблиця 9

<i>Moda</i>	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	2746,19	2710,33	1,32	2,000	1,974
2	5578,30	5443,03	2,49	2,000	1,951
3	5578,30	5443,03	2,49	2,000	1,951
4	8191,45	7907,40	3,59	2,000	1,931
5	9943,62	9553,30	4,09	2,000	1,921
6	9993,98	9610,35	3,99	2,000	1,923
7	12420,97	11820,95	5,08	2,000	1,903
8	12420,97	11820,95	5,08	2,000	1,903
9	15799,34	14913,54	5,94	2,000	1,888
10	15799,34	14913,54	5,94	2,000	1,888

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір h_e зменшився в 2 рази, а всі інші величини такі самі як у еталона, тоді (2.16) прийме вигляд:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot h_e}{h_e} = \omega_e \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (2.20)$$

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 10. Аналізуючи отримані результати можна побачити що при збільшенні відношення $\frac{h}{a}$ розбіжність між розрахунками збільшується, але залишається в межах 6%.

Таблиця 10

Moda	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	686,55	688,96	0,35	0,500	0,502
2	1394,58	1403,81	0,66	0,500	0,503
3	1394,58	1403,81	0,66	0,500	0,503
4	2047,86	2067,48	0,95	0,500	0,505
5	2485,91	2513,41	1,09	0,500	0,506
6	2498,50	2525,54	1,07	0,500	0,505
7	3105,24	3147,94	1,36	0,500	0,507
8	3105,24	3147,94	1,36	0,500	0,507
9	3949,84	4014,80	1,62	0,500	0,508
10	3949,84	4014,80	1,62	0,500	0,508

При збільшенні розміру сторони пластини в k разів власні частоти зменшуються в k^2 разів і навпаки при зменшенні розміру в k разів – частоти збільшуються в k^2 разів.

При збільшенні товщини пластини в k разів власні частоти збільшуються в k разів і навпаки при зменшенні розміру в k разів – частоти зменшується в k разів.

Виходячи з попередніх тверджень можна зробити висновок, що для того щоб збільшити пластину в k разів і залишитися на тій самі частоті достатньо збільшити товщину пластини в k^2 разів. Доведемо це наступним

розрахунком.

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір a_e збільшиться в 2 рази а товщина h_e збільшився в 4 рази, а всі інші величини такі самі як у еталона, тоді (2.16) прийме вигляд:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{4 \cdot h_e \cdot (a_e)^2}{(2 \cdot a_e)^2 \cdot h_e} = \omega_e,$$

$$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e} = 1 \quad (2.21)$$

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 11.

Таблиця 11

Moda	ω , Гц		ε , %	$\frac{\omega_{unk}}{\omega_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	1373,10	1352,99	1,49	1,000	0,985
2	2789,15	2716,13	2,69	1,000	0,974
3	2789,15	2716,13	2,69	1,000	0,974
4	4095,72	3947,21	3,76	1,000	0,964
5	4971,81	4764,44	4,35	1,000	0,958
6	4996,99	4792,94	4,26	1,000	0,959
7	6210,49	5899,99	5,26	1,000	0,950
8	6210,49	5899,99	5,26	1,000	0,950
9	7899,67	7433,24	6,27	1,000	0,941
10	7899,67	7433,24	6,27	1,000	0,941

Також ефекту можна досягти якщо відношення товщини до квадрату сторони пластинки у шуканої і еталонної пластини буде величина однакова, тобто:

$$\omega_{unk} = \omega_e, \text{ при } \frac{h_{unk}}{(a_{unk})^2} = \frac{h_e}{(a_e)^2} \quad (2.22)$$

2.5. Розрахунок квадратних пластин з різних матеріалів

Припустимо, що еталонна і шукана пластини виготовлені з різних матеріалів, але мають однакову геометрію та розглядаються при однакових

формах коливань, це означає що два множника у формулі (2.10) приймуть значення одиниці, тобто:

$$\omega_{unk} = \omega_e \cdot \frac{M_{unk}}{M_e} \quad (2.23)$$

Якщо виконується умова:

$$\sqrt{\frac{E_e}{\rho_e(1-\nu_e^2)}} = \sqrt{\frac{E_{unk}}{\rho_{unk}(1-\nu_{unk}^2)}}, \quad (2.24)$$

то:

$$\omega_{unk} = \omega_e$$

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір відповідають розмірам еталонної пластини, але виготовлена вона із сталі (модуль Юнга $E = 214 ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,32$, густина $\rho = 7820 \text{ кг/м}^3$)

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 12.

Таблиця 12

Moda	$\omega, Гц$		$\varepsilon, \%$	$\frac{M_{unk}}{M_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	1392,97	1392,66	0,02	1,014	1,014
2	2829,53	2829,16	0,01	1,014	1,014
3	2829,53	2829,16	0,01	1,014	1,014
4	4155,02	4154,87	0,00	1,014	1,014
5	5043,78	5043,80	0,00	1,014	1,014
6	5069,33	5069,29	0,00	1,014	1,014
7	6300,39	6300,94	0,01	1,014	1,015
8	6300,39	6300,94	0,01	1,014	1,015
9	8014,03	8015,23	0,01	1,014	1,015
10	8014,03	8015,23	0,01	1,014	1,015

Розрахуємо пластину у якої геометричний розмір відповідають розмірам еталонної пластини, але виготовлена вона із міді (модуль Юнга $E = 110 ГПа$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,35$, густина $\rho = 8920 \text{ кг/м}^3$)

Отримані результати розраховані Delphi і Femap наведено в таблиці 12.

Таблиця 12

<i>Moda</i>	$\omega, \text{Гц}$		$\varepsilon, \%$	$\frac{M_{unk}}{M_e}$	
	Delphi	FEMAP		Delphi	FEMAP
1	945,74	945,95	0,02	0,689	0,689
2	1921,06	1921,31	0,01	0,689	0,689
3	1921,06	1921,31	0,01	0,689	0,689
4	2820,99	2821,08	0,00	0,689	0,689
5	3424,40	3424,41	0,00	0,689	0,689
6	3441,75	3441,77	0,00	0,689	0,689
7	4277,56	4277,93	0,01	0,689	0,689
8	4277,56	4277,93	0,01	0,689	0,689
9	5441,01	5441,82	0,01	0,689	0,689
10	5441,01	5441,82	0,01	0,689	0,689

Висновки до другого розділу

1. Отримано зведену форму запису формули для розрахунку власних частот за методом Релея-Рітца, особливістю якої є розділення величин за категоріями, або коефіцієнтами.
2. Створена перша власна програма для розрахунку частот вільних коливань **жорстко закріпленої квадратної пластини.**
3. **Для перевірки правильності розрахунків власної програми розв'язана ця ж сама задача МСЕ.**
4. Зроблено уточнення коефіцієнтів форм коливань.
5. **Проаналізовано форми коливань пластини.**
6. Створено власна другу програму для розрахунку частот та форм вільних коливань **жорстко закріпленої квадратної пластини, яка показала хорошу збіжність результатів з результатами Femap.**
7. **Проведено розрахунок пластин різних геометричних розмірів з різних матеріалів, на основі отриманих результатів виведено ряд залежностей**

РОЗДІЛ 3

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ

3.1. Експериментальна установка і методика експериментального визначення частот і форм власних коливань квадратної пластини

Для підтвердження чисельно розрахованих частот і форм власних коливань пластин розроблена експериментальна установка, яка механічно збуджує пластину, при цьому спостерігаються форми власних коливань на фіксованій частоті в реальному часі з можливістю їх реєстрації. Установка складається з: досліджувана пластина з отвором для закріплення в точці центра мас; п'єзокерамічний вібратор (рис. 3.1); сипуча речовина фракцією 0,5 мм; генератор частот; підсилювач; частотомір; фотокамера.

Для збудження коливань пластин розроблений і виготовлений п'єзокерамічний вібратор (рис.3.1), який представляє собою суцільний стакан (3) із набором п'єзокерамічних круглих шайб (14 штук) із титанату барія з контактними пластинками із мідної тонкої фольги (2), з'єднаних паралельно, що забезпечують подачу на шайби змінної напруги. Стовпчик шайб притискується інерційним елементом (1) за допомогою різьбового з'єднання. Віброприскорення такого віброзбудження можуть досягати великих значень, які недосяжні іншими типами вібраторів.

Методика проведення експерименту:

1. Підготувати пластинку до проведення експерименту.
2. Встановити пластинку на віброзбуджувач.
3. Рівномірно покрити поверхню пластинки сферичними елементами.
4. Включити віброзбудження.
5. Плавно змінювати частоту коливань, в результаті чого поле віброзміщень буде якісно змінюватися, а сферичні елементи будуть зміщуватись до вузлових ліній утворюючи при цьому картини

Хладні.

6. Після налаштування на резонансну частоту і досягненні найкращої якості картини Хладні зафіксувати частоту, яку показує частотомір, а також форми коливань за допомогою фотокамери.

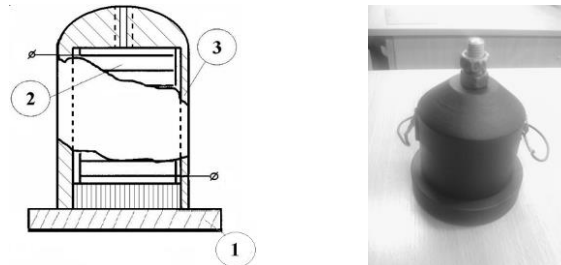


Рис.3.1. Вібратор

3.2. Експериментальне визначення частот і форм власних коливань квадратної пластини

За допомогою описаної методики отримані власні частоти квадратної пластини з алюмінію. Результати представлені у вигляді порівняльної таблиці 13, де ε – відхилення між чисельними та експериментально отриманими частотами.

Таблиця 13

Moda	$\omega, \text{Гц}$			$\varepsilon, \%$
	Delphi	FEMAP	Хладні	
2	2789,15	2789,16	2559	8,99
3	2789,15	2789,16	2553	9,25
4	4095,72	4095,74	3765	8,78
5	4971,81	4971,83	4522	9,95
6	4996,99	4997,01	5544	9,87

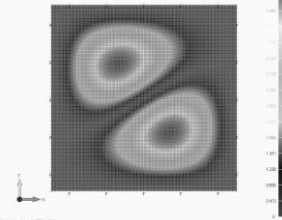
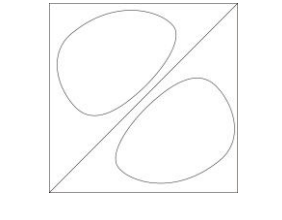
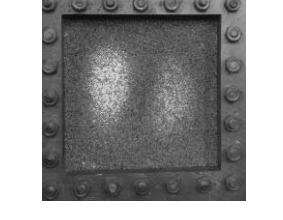
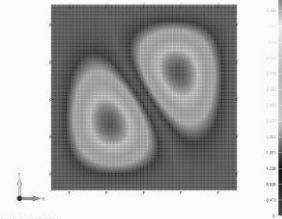
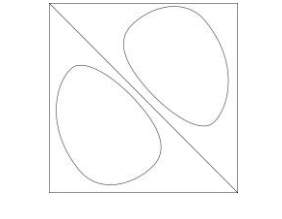
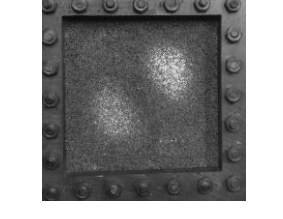
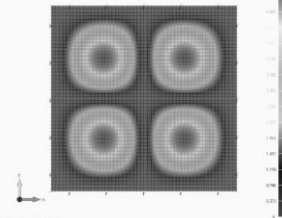
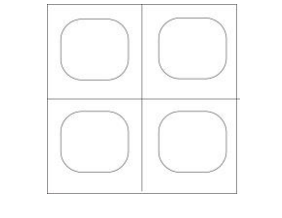
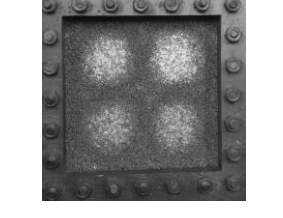
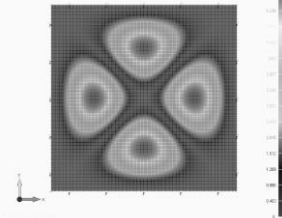
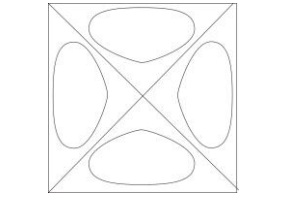
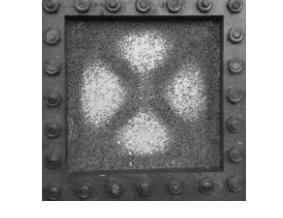
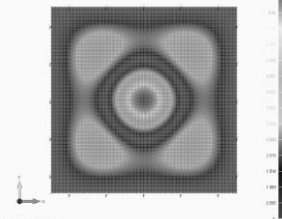
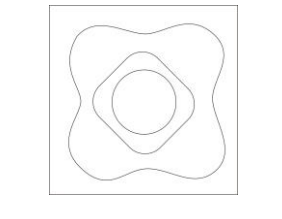
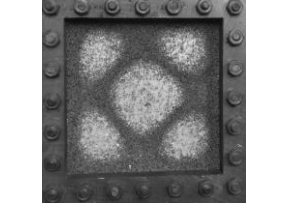
Для ілюстрації в таблиці 14 приводяться деякі форми коливань на відповідних частотах, які були отримані експериментальним і чисельним методами.

Висновки до третього розділу

1. Запропоновано методику проведення експерименту за допомогою розробленої віброустановки.
2. Проведено експеримент для квадратної пластини з алюмінію, в

результаті яких отримані частоти і форми власних коливань. Спостерігаються малі відхилення між експериментально визначеними частотами і частотами розрахованими чисельно, які не перевищують 10%. Порядок появи форм коливань при чисельних розрахунках та експериментах однаковий.

Таблиця 14

FEMAP	DELPHI	Хладні
		
<i>Moda 2</i>		
		
<i>Moda 3</i>		
		
<i>Moda 4</i>		
		
<i>Moda 5</i>		
		
<i>Moda 6</i>		

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У роботі розроблено власну програму та поширено МСЕ до розв'язування задачі про визначення частот і форм вільних коливань жорстко закріпленої квадратної пластини. Проведено аналіз достовірності застосування запропонованих чисельних методів. Розроблено експериментальний підхід до розв'язування поставленої задачі та підтвердження чисельних розрахунків.

При цьому отримані такі конкретні результати:

1. На основі розрахунків вільних коливань квадратних пластин з різним відношення товщини до сторони пластини встановлено залежність: для того щоб збільшити пластину в k разів і залишитися на тій самій частоті достатньо збільшити товщину пластини в k^2 разів.
2. На основі розрахунків вільних коливань пластин для випадку декількох ізотропних матеріалів отримано частотні коефіцієнти, які визначають залежність значень частот власних коливань пластин від механічних властивостей матеріалу і дають можливість з високим ступенем точності визначати частоти відповідної форми коливань пластини з довільного ізотропного матеріалу при однакових геометричних параметрах та граничних умовах.
3. Результати експериментальних досліджень вільних коливань пластин добре узгоджуються з чисельними розрахунками, що свідчить про ефективність застосування обох підходів.

Реалізовані у роботі чисельні підходи дають можливість досліджувати динамічні характеристики плоских конструкцій інших конфігурацій і може бути використаний для оцінки точності інших чисельних підходів, а також при аналізі поведінки конкретних тонкостінних конструктивних елементів.

Розроблена експериментальна установка може бути використана для демонстрації розповсюдження механічних хвиль в плоских конструкціях в рамках вивчення шкільного курсу фізики та дисциплін у ВНЗ: «Коливання і хвилі», «Експериментальні методи в механіці деформованого твердого тіла».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Tomotika S. The transverse vibration of a square plate clamped at four edges // *Phil. Mag., Ser.7* 21 (142), pp. 745–760 (1936).
2. Leissa A.W., *Vibration of Plates* (NASA SP-160), Government Printing Office 1969, Washington, US (reprinted 1993 by The Acoustical Society of America).
3. Leissa, A. W., 1973, *The Free Vibration of Rectangular Plates* // *J. Sound Vib.*, 31, pp. 257–293.
4. Leissa A.W.. *The historical bases of the Rayleigh and Ritz methods* // *Journal of Sound and Vibration* 287 (2005) 961–978.
5. Власов В. З. *Строительная механика тонкостенных пространственных систем.* –М.: Стройиздат, 1949, –435 с.
6. *Free vibration of elastic plates with various shapes and boundary conditions.* Doctoral dissertation. Presented to the Graduate School of Engineering Hokkaido University by Yoshihiro Narita December, 1979.
7. Gorman Daniel J. *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates.* Elsevier North Holland, Ins., 1982. –324 p.
8. Mindlin R.D. *An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates.* 2006 by World Scientific Publishing Co., 190 p.
9. Chakraverty S. *Vibration of PLATES.* 2009 by Taylor & Francis Group, 411 p.
10. Werner Soedel. *Vibration of Shells and Plates.* 2004 by Marcel Dekker, 553 p.
11. Гонткевич В.С. *Собственные колебания пластинок и оболочек. Справочник.* Киев: Наукова думка, 1964. - 288 с.
12. Галеркин Б.Г. *Собрание сочинений.* М.: изд. АН СССР, 1953, т.2. - 440 с.
13. Коренев Б.Г. *Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях.* М.: Физматгиз, 1960. - 458 с.
14. Grigorenko A.Ya., Efimova T.L. *Spline-Approximation Method Applied to Solve Natural Vibration Problems for Rectangular Plates of Varying Thickness* // *Int. Appl. Mech.* — 2005. — Vol. 41, No10. — P.1161-1169.
15. Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики, т. 2.* М.: Иностранная литература, 1951. - 544 с.

16. Пратуевич Я.А. Вариационные методы в строительной механике. М.: Гос.изд.техн.-теорет.литер., 1948. - 400 с.
17. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластин, ч.1. Киев: Изд. АН УССР, 1949. - 136 с.
18. Коренев Б.Г. О методе начальных параметров в задачах о круглых плитах и оболочках вращения. Прикладная математика и механика, т. 10, вып.1, 1946, с. 165-172.
19. Odman, S.T.A. Studies of Coundary value problems / S.T.A. Odman. Part II. Characteristic functions of rectangular plates. Sv. forsk. inst. for com. ach.b Vet. – Stockholm, 1955. – 283 p.
20. Болотин В.В., Макаров Б.П. Применение асимптотического метода для исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Расчеты на прочность, вып.6. М.: Машгиз, 1960, с.231-253.
21. Прочность. Устойчивость. Колебания. Т.3./Под общей редакцией И.А.Биргера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. - 567 с.
22. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. - 444 с.
23. Гершгорин С.А. Колебания пластинок, нагруженных сосредоточенными массами. Прикладная математика и механика, 1933, т.1, вып.1, с.25-37.
24. Филиппов А.П. Прямоугольные пластинки, подкрепленные упругими ребрами и точечными упругими опорами. Прикладная математика и механика, новая серия, т. I, вып.2, 1937, с. 187-204.
25. Власов В.З. Приближенная теория тонкостенных изгибаемых призматических систем и пластинок и расчет их на колебания и устойчивость. В сб.: Исследования по динамике сооружений. М.: Госстройиздат, 1947, с. 5-73.
26. Петрашень Г.И. К теории колебаний тонких пластин. -Ученые записки Ленинградского гос.ун-та: Л.: 1951, \$ 149, с. 172-249.
27. Галин М.П. О поперечных колебаниях пластинки. Прикладная математика и механика, 1947, т. II, вып.3, с.387-388.
28. Какушадзе А.М. Определение частот свободных колебаний балок. Труды Грузинского политехнического института, 1949, В 19, с. 31-37.

29. Коренев Б.Г. Колебания круглой пластинки с опорами точечного типа. Труды Днепропетровского инж.-строит.института, 1940, & 29.
30. Болотин В.В., Макаров Б.П. Применение асимптотического метода для исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Расчеты на прочность, вып.6. М.: Машгиз, 1960, с.231-253.
31. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. Инженерный сборник, 1961, № 31,с.3-14.18. рублик Б.Н. Численное решение динамических задач теории пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1976. - 222 с.
32. Кистьян К.А. Определение частот колебаний пластинок, лежащих на упругом основании. Прикладная механика, 1965, I, Jfc 5, с. I31-I33.
33. Москаленко В.Н. К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инженерный журнал, 1961, I, № 3, с. 93-101.
34. Москаленко В.Н. Об учете инерции вращения и деформациисдвига в задачах о собственных колебаниях пластин. Всб.: Теория пластин и оболочек. Киев: АН УССР, 1962,с.182-F 184.
35. Алгазин С.Д. Вычислительный эксперимент в задаче о свободных колебаниях прямоугольной пластины / С.Д. Алгазин // Наука и техника транспорта. – 2016. – №4. – С. 100-107.
36. Нестеров С.В. Изгибные колебания квадратной пластины, защемленной по контуру / С.В. Нестеров // Механика твердого тела. – 2011. – №6. – С. 159-165.
37. Борисенко М.Ю. Комп'ютерне моделювання вільних коливань тонких пластин з різних матеріалів / М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, І.А. Борисенко, Ю.О. Роговцов // Геометричне моделювання та інформаційні технології. – 2016. – №2. – С. 29-33.
38. Ma C.-C., Huang C.-H. Experimental whole-field interferometry for transverse vibration of plates // J. Sound Vib. — 2004. — 271. — P. 493—506.
39. Теорія пластин і оболонок:конспект лекцій / укладач І.В. Павленко. – Суми: Видавництво СумДУ, 2010. – 67с.
40. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.