Обласне відділення Малої Академії Наук по Миколаївській області
Тестування з математики (для вступників до МАН)
8 клас
Відділення: «Математики», «Комп'ютерних наук», *«Економіки»,* «Технічних наук»

1 рівень

1. Яка з наведених рівностей є правильною:

А) $10^{-4} = -10000$; **Б)** $(-1\frac{1}{4})^{-2} = -\frac{16}{25}$; **В)** $(-3)^{-3} = -\frac{1}{27}$; **Г)** $\frac{1}{4^{-2}} = -16$.

Відповідь: **В.**

2. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-4}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$.

А) –1; 4; **Б)**– 1; **В)** –4; 1; **Г)** 4.

Відповідь: **Г**

3. Кут при основі рівнобедреного трикутника в 2 рази більший від кута при вершині. Знайдіть кути трикутника.

А) 36°, 72°, 72°; **Б)** 50°, 65°, 65°; **В)** 80°, 50°, 50°; **Г)** 90°; 30°;60°.

Відповідь: **А**

2 рівень

1. •. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases}$

▼ *Розв'язання:*

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4\cdot(3-2x) = -10; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -11x = -22; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1, \\ x = 2. \end{cases} \blacktriangle$$

Відповідь: $(2;-1)$

2. Визначте якою цифрою закінчується число 132^{2019}.

▼ *Розв'язання:* Легко бачити закономірність $132^1 = 132$

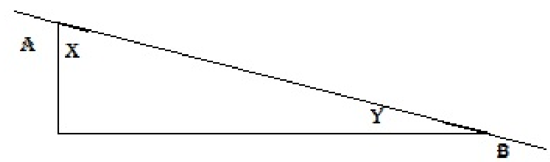
$132^2 = \ldots 4$
$132^3 = \ldots 8$
$132^4 = \ldots 6$
$132^5 = \ldots 2$
$132^6 = \ldots 4$ і т.д.

останні цифри степенів числа 132 повторюються через кожні чотири степені. Оскільки, 2019= 504*4+3, то число 132^{2019} закінчується цифрою 8. ▲

■*Відповідь:* остання цифра 8

3. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо зовнішні кути при вершинах цих кутів відносяться як 13:14.

▼*Розв'язання:*



За умовою

$\angle A : \angle B = 13:14,\ \angle x + \angle y = 90^0$

Тоді $\angle A + \angle x + \angle B + \angle y = 2 \cdot 180^0 \Rightarrow \angle A + \angle B = 270^0.$

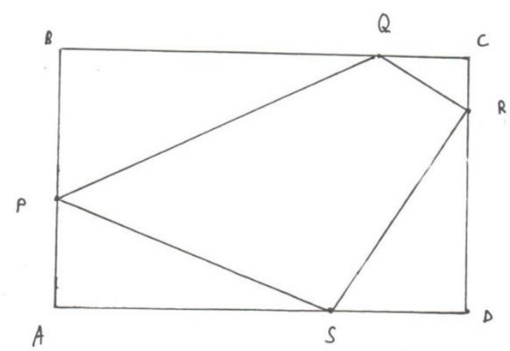
Нехай $\angle A = 13t,\ \angle B = 14t \Rightarrow 27t = 270 \Rightarrow t = 10^0$, отже $\angle A = 130^0,\ \angle B = 140^0$. Очевидно, що шукані гостри кути трикутника дорівнюють відповідно $\angle x = 50^0,\ \angle y = 40^0$.

■*Відповідь:* $\angle x = 50^0,\ \angle y = 40^0.$

3 рівень

1.Дано прямокутник $ABCD$ і точки P, Q, R, S – точки на сторонах AB, BC, CD, DA відповідно. Довести, що $PQ + QP + RS + SP \geq \sqrt{2}AC$.

▼*Доведення:*



Маємо: $PQ \cdot QR > BQ \cdot QC,\ \ QR \cdot RS > CR \cdot RD$ і т.д.

Тоді розглянемо квадрат суми $(PQ + QR + RS + SP)^2 = PQ^2 + \cdots + 2PQ \cdot QR + \cdots$
$> (PB^2 + BQ^2) + \cdots + 2BQ \cdot BC + \cdots = (PA + PB)^2 + (BQ + QC)^2 + (CR + RD)^2 + (DS + SA)^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 = 2AC^2$.

З цього і випливає, що $PQ + QR + RS + SR \geq \sqrt{2}AC$.▲

2. Довести, що число $20^{2020} + 19$ не може бути квадратом цілого числа.

▼*Доведення:*

Число $20^{2020} + 19 = 2^{2020} \cdot 10^{2020} + 16 + 3 = 4 \cdot 2^{2018} \cdot 10^{2020} + 4 * 4 + 3 \rightarrow$

$$20^{2020} + 19 = 4(2^{2018} \cdot 10^{2020} + 4) + 3$$

при діленні на 4 дає остачу 3. Воно непарне, тому може бути квадратом тільки непарного число. Але квадрат непарного числа при діленні на 4 повинен давати остачу 1, тому що $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2 + n) + 1$. Отже, дане число не є квадратом цілого числа.▲

Тест передбачає 8 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 2 годин:
1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -30 балів
2 рівень -3 завдання - максимальна кількість -36 балів
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість 34 балів
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -100 балів

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.

Обласне відділення Малої Академії Наук по Миколаївській області
Тестування з математики (для вступників до МАН)
9 клас
Відділення «Математики»
Секції: «Математика», «Прикладна математика», «Математичне моделювання»

1 рівень

1. Запишіть зведене квадратне рівняння, в якому другий коефіцієнт і вільний член відповідно дорівнюють –5 і 4.

А) x^2-5x+4=0; **Б)** x^2+5x+4=0; **В)** x^2-5x-4=0; **Г)** -x^2-5x+4=0.

■*Відповідь:* **А .**

2. . Висота рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а основа – 16 см. Знайти бічну сторону трикутника.

А) 34 см; **Б)** 17 см;
В) 31 см; **Г)** 23 см.

■*Відповідь:* **Б .**

3. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-2}<1$.

А) $(-\infty;3)$; **Б)** $(-\infty;3]$; **В)** $(2;3)$; **Г)** $[2;3)$.

■*Відповідь:* **Г.**

2 рівень

1. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 0{,}6-4x \ge 2{,}2 \\ 2{,}5x-2<8 \\ 3{,}1x+9>1{,}6x+3 \end{cases}$

▼*Розв'язання:*

Розв'яжемо кожне рівняння системи відносно невідомої x:

$$\begin{cases} -4x \ge 1{,}6 \\ 2{,}5x<10 \\ 1{,}5x>-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le -0{,}4 \\ x<4 \\ x>-4 \end{cases} \Rightarrow x(-4;-0{,}4].$$

■*Відповідь:* $x(-4;-0{,}4]$.

2. Периметр паралелограма дорівнює 299,2 дм. Одна сторона довша за другу на 20%. Обчисліть усі сторони паралелограма.

▼ *Розв'язання:*

$$P = 2x + 2\left(x + \frac{x}{100}\cdot 20\right) = 2x + 2\cdot\frac{6}{5}x = 2992 см \Rightarrow x = 680 см,\ \ x + \frac{6}{5}x = 816 см$$

■*Відповідь:* $68 дм\quad та\ \ 81{,}6 дм$.

3. Розв'язати рівняння: $(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0.$

▼ *Розв'язання:*

$$(x^2-4)\sqrt{x+1} = 0. \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x^2-4) = 0, \\ \sqrt{x+1} = 0, \end{array}\right. \\ x \ge -1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pm 2, \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x = 2, x = -1. \\ x \ge -1. \end{cases}$$

■*Відповідь:* $x = 2$, $x = -1.$

3 рівень

1. . Розв'язати рівняння: $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{5}{2}$

▼ *Розв'язання*

Позначимо $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = t$, тоді $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{t}$ рівняння можна переписати у вигляді системи:
$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + x > 0 \\ \sqrt{\frac{1+x}{x}} = t \\ \frac{1}{t} + t = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Останнє рівняння системи зводиться до квадратного $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$, корені якого $t_1 = \frac{1}{2}$ і $t_2 = 2$ якщо $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = \frac{1}{2}$, то $\frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{4}$ і $x = -\frac{4}{3}$ і якщо $\sqrt{\frac{1+x}{x}} = 2$, то $\frac{1}{x} + 1 = 4$ і $x = \frac{1}{3}$.

Корінь $x = -\frac{4}{3}$ відкидаємо як такий, щ не задовольняє умови системи(тобто ОДЗ рівняння); корінь $x = \frac{1}{3}$ після перевірки залишаємо.

■*Відповідь:* $x = \frac{1}{3}$.

2.Нехай $\boldsymbol{ABCD}$ – вписаний чотирикутник, у якого діагоналі $\boldsymbol{AC}$ і $\boldsymbol{BD}$ перетинаються в точці $\boldsymbol{P}$ і нехай точка $\boldsymbol{O}$ – центр кола, описаного навколо трикутника $\boldsymbol{APB}$, а точка $\boldsymbol{H}$ – ортоцентр трикутника $\boldsymbol{CPD}$. Довести, що точки $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{H}$ лежать на одній прямій.

▼*Доведення:*

Продовжимо OP до перетину із CD у точці L. Очевидно, достатньо довести, що PL перпендикулярно CD.

Оскільки $ABCD$ – вписаний у коло чотирикутник, то $\angle PDL = \angle PAB$. Але точка O – центр кола описаного навколо трикутника APB. Тому $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle POB$ (якщо $\angle BAP$ – тупий, то $\angle PAB = 180° - \frac{1}{2}\angle POB$.

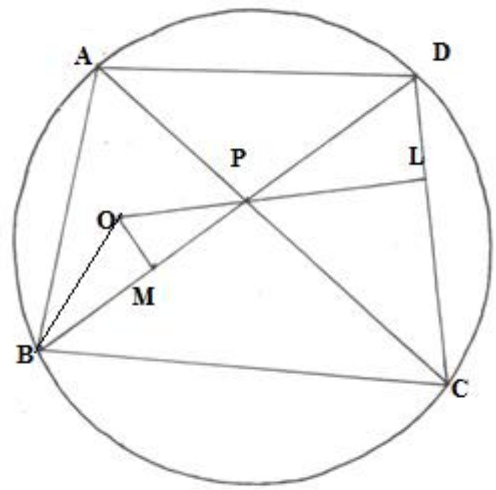
Якщо OM – перпендикулярно до BP, то

$$\frac{1}{2}\angle POB = \angle POM = 90° - \angle OPM = 90° - \angle DPL$$

Таким чином маємо: $\angle PDL = 90° - \angle DPL$. Отже,

$$\angle PLD = 180° - (\angle PDL + \angle DPL) = 90°$$

і означає, що PL перпендикулярно CD.



Тест передбачає 8 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 2 годин:
1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -30 балів
2 рівень -3 завдання - максимальна кількість -36 балів
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість 34 балів
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -100 балів

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.

Обласне відділення Малої Академії Наук по Миколаївській області
Тестування з математики (для вступників до МАН)

9 клас
Відділення: .«Комп'ютерних наук»

1 рівень

1. Вкажіть допустимі значення змінної *x* у тотожності $\frac{\mathbf{4}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathbf{4}(\mathrm{x}-\mathbf{1})}{\mathrm{x}(\mathrm{x}-\mathbf{1})}$.

А) усі числа, крім 0; Б) усі числа крім 1;
В) усі числа; Г) усі числа, крім 0 і 1.

■*Відповідь:* **Г .**

2. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{x}{x-3}-\frac{5}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}.$$

А) -3; 3; **Б)** -1; 3; **В)** $1\pm\sqrt{34}$; **Г)** -1.

■*Відповідь:* **Г .**

3 Площа прямокутника дорівнює 48 см^2, одна з його сторін 6 см. Знайдіть периметр прямокутника.

А) 30 см; **Б)** 56 см;
В) 28см; **Г)** 14 см.

■*Відповідь:* **В .**

2 рівень

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.

1. Знайдіть усі значення *a*, при яких рівняння $x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$ не має коренів.

▼ *Розв'язання*

$$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0 \Rightarrow D=(2a-1)^2-4(a^2+2)=4a^2-4a+1-4a^2-8=-4a-7<0 \Rightarrow a>-\frac{7}{4}.$$

■*Відповідь:* $a>-\frac{7}{4}$. .

2. Розв'язати рівняння: $2x^2+2xy+y^2+|z|+4=4x$.

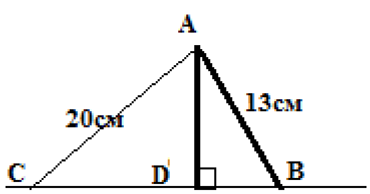
▼ *Розв'язання*

Записати у вигляді $(x+y)^2+(x-2)^2+|z|=0$. Оскільки доданки невід'ємні, то кожен з них дорівнює нулю.

■*Відповідь:* $(2;-2;0)$..

3. З точки А до прямої *b* проведено дві похилі: AC = 20 см і AB = 13 см. Сума проекцій цих похилих дорівнює 21 см. Знайдіть проекції похилих.

▼ *Розв'язання*



нехай $AD=h$ *см*,
$CD+DB=21$*см*
Якщо $CD=x$, тоді $DB=21-x$.
З прямокутного трикутника ACD отримаємо $h=\sqrt{20^2-x^2}$,
Аналогічно з прямокутного трикутника ADB маємо
$h=\sqrt{13^2-(21-x)^2}$.

Прирівняймо отриманні h.

$\sqrt{20^2-x^2}=\sqrt{13^2-(21-x)^2}$

$20^2-x^2=13^2-(21-x)^2$

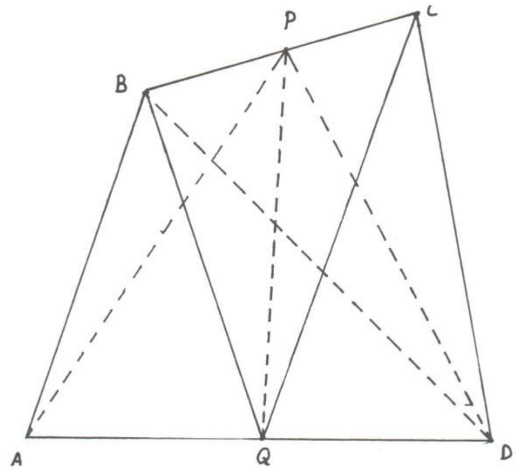
тоді $672=42x \Rightarrow x=16$

таким чином отримаємо: $CD=16$, $DB=21-16=5$

■*Відповідь:* $CD=16$*см*, $DB=5$*см* .

3 рівень

1. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, P, Q – середини сторін BC і AD відповідно. Нехай AP і BQ перетинаються в точці X; DP і CQ перетинаються в точці Y. Довести, що площа чотирикутника $PXQY$ дорівнює сумі площ трикутників ABX і DCY.



▼*Доведеня*

Сполучимо точки P і Q і проведемо одну із діагоналей чотирикутника $ABCD$, наприклад, BD(див. рис.) Скористаємося тим фактом, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.
З трикутників BAD(з медіаною BQ) і BCD(з медіаною DP) отримуємо:

$$S_{ABQ} = S_{DBQ} \; і \; S_{DPC} = S_{DPB}$$

Також маємо

$$S_{ABQ} + S_{DPC} = S_{DBQ} + S_{DPB} = S_{DPBQ} = S_{DPQ} + S_{BPQ} = S_{APQ} + S_{CPQ}$$

(оскільки PQ – медіана для трикутників APD і CQB). А тоді матимемо:

$$S_{AXQ} + S_{AXB} + S_{DYC} + S_{PYC} = S_{AXQ} + S_{PXQ} + S_{CPY} + S_{QPY}$$

Після перетворень отримаємо:
$S_{ABX} + S_{DCY} = S_{PXQY}$ ▲

2. Розв'язати в цілих числах:

$$x + y = 1 - z; \; x^3 + y^3 = 1 - z^2$$

▼*Розв'язання*

Виключаючи z з даних в умові рівностей, матимемо:

$$x^3 + y^3 + [1 - (x + y)]^2 = 1$$

Ця рівність еквівалентна наступній:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 + x + y - 2) = 0$$

a) Нехай $x + y = 0$. Тоді $z = 1$ і $(x, y, z) = (m, -m, 1), m \in Z$ – множина розв'язків.
b) Нехай $x + y \neq 0$. Тоді: $x^2 - xy + y^2 + x + y - 2 = 0$

Останнє рівняння може бути записане у вигляді:

$$(2x - y + 1)^2 + 3(y + 1)^2 = 12$$

Можливі такі випадки:

$$2x - y + 1 = 0, y + 1 = \pm 2 \text{ або } 2x - y + 1 = \pm 3, y + 1 = \pm 1$$

Аналізуючи всі ці випадки, отримуємо наступні розв'язки:
$(0,1,0), (-2,-3,6), (1,0,0), (0,-2,3), (-2,0,3), (-3,-2,6)$.▼

■*Відповідь:* $(0,1,0), (-2,-3,6), (1,0,0), (0,-2,3), (-2,0,3), (-3,-2,6)$..

Тест передбачає 8 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 2 годин:
1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -30 балів
2 рівень -3 завдання - максимальна кількість -36 балів
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість 34 балів
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -100 балів

Обласне відділення Малої Академії Наук по Миколаївській області.
Тестування з математики (для вступників до МАН)

10 клас

Відділення «Математики»

Секції: «Математика», «Прикладна математика», «Математичне моделювання»

1 рівень

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{70}{x^2-16}-\frac{17}{x-4}=\frac{3x}{x+4}$.

А) $\frac{1}{3}; -2;$ **Б)** $2; -\frac{1}{3};$ **В)** $-1;\ 4\frac{2}{3};$ **Г)** $-4;\ 4;$ Д) Інша відповідь.

Відповідь: **Б**

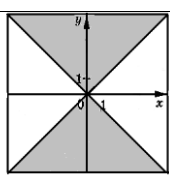
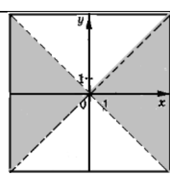
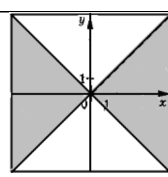
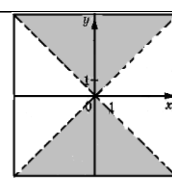
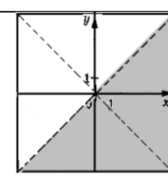
2. Установити кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=16; \\ y+4=0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
1 розв'язок	2 розв'язки	4 розв'язки	Розв'язків немає	Безліч розв'язків

Відповідь: **А**

3. Встановіть відповідність між нерівностями (1-4) та їх графіками (А-Д):

1) $|x|\ge|y|$;   2) $|x|<|y|$;   3) $|x|>|y|$;   4) $|x|\le|y|$.

А	Б	В	Г	Д
				

Відповідь:

1	2	3	4
А	Б	Г	В

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.

2 рівень.

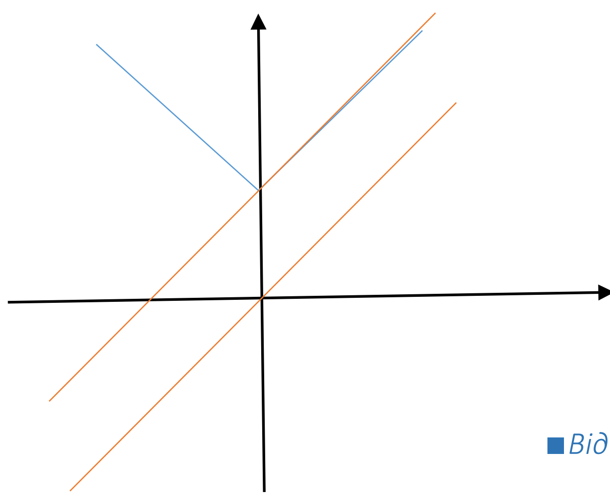
1. Розв'яжіть рівняння $||x|+2| = x+2$.

▼ *Розв'язання*

$$||x|+2| = x+2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ |-x+2| = x+2\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ |x+2| = x+2;\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ -x+2=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x-2=x+2;\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -2,\\ -x-2=x+2;\end{cases}\\ \begin{cases}x>-2,\\ x+2=x+2;\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ x=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ x\ \text{не існує};\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-2,\\ x=-2;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge -2,\\ x\ \text{любе};\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0,\\ x\ \text{любе};\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \quad x\ge 0.$$

Графічне розв'язання



■ *Відповідь:* $x \ge 0.$

2.Знайдіть усі значення *a*, при яких рівняння $x^2 - ax + 1 = 0$ має два різних кореня.

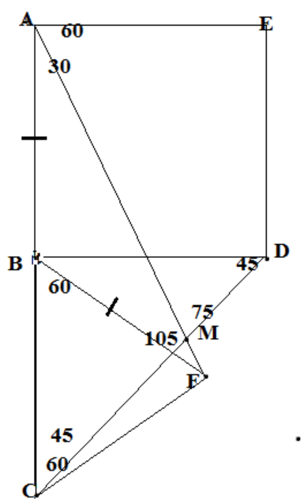
▼ *Розв'язання*

$$x^2 - ax + 1 = 0 \Rightarrow D = a^2 - 4 > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a>2\\ a<-2\end{array}\right.$$

■ *Відповідь:* $\left[\begin{array}{l} a > 2, \\ a < -2. \end{array}\right.$

3. Точка B є серединою відрізка AC. Квадрат $ABDE$ і рівносторонній трикутник BCF розташовані в одній півплощині відносно прямої AC. Знайдіть величину кута між прямими CD і AF.

▼ *Розв'язання*



Нехай M – точка перетину прямих CD і AF. $\angle FBC = 60^0 \Rightarrow \angle ABF = 120^0$. $AB = BF \Rightarrow \angle BAF = 30^0$. $\angle ACD = 45^0$. $\angle AMD = 75^0$.

■ *Відповідь:* $\angle AMD = 75^0$.

3 рівень

1.Знайти всі функції f:R\{0,1}, які задовольняють наступні умови:
$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$, для $x \neq 0$ і $x \neq 1$.

▼ *Розв'язання:*

Покладемо $y = \frac{1}{1-x}$.
легко бачити, що

$$2\left(\frac{1}{x} - y\right) = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right) = 2\left(\frac{1-2x}{x(1-x)}\right).$$

Тоді подане функціональне рівняння може бути записане так:

$$f(x) + f(y) = 2\left(\frac{1}{x} - y\right).$$

Якщо ми позначимо $z = \frac{1}{1-y}$, то $x = \frac{1}{1-z}$. Тоді отримаємо ще два співвідношення:

$$f(y) + f(z) = 2\left(\frac{1}{y} - z\right),$$

$$f(z)+f(x)=2(\frac{1}{z}-x).$$

Додавши першу і третю рівність, отримаємо:

$$2f(x)+f(y)+f(z)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2y+\frac{2}{z}.$$

Використовуючи друге співвідношення, матимемо:

$$2f(x)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2\left(\frac{1}{y}+y\right)+2\left(\frac{1}{z}+z\right).$$

Проте $y+\frac{1}{y}=\frac{1}{1-x}+1-x,\ z+\frac{1}{z}=\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}$. Підставивши в останню рівність, отримаємо:

$$2f(x)=2\left(\frac{1}{x}-x\right)-2\left(\frac{1}{1-x}+1-x\right)+2\left(\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}\right)=$$

$$=2\left(\frac{1}{x}-x-\frac{1}{1-x}-1+x+\frac{x-1}{x}+\frac{x}{x-1}\right)=2\left(\frac{1-x-x-x(1-x)-(x-1)(x-1)-xx}{x(1-x)}\right)$$

$$=2\left(\frac{1-3x+x^2-x^2+2x-1-x^2}{x(1-x)}\right)=2\left(\frac{-x-x^2}{x(1-x)}\right)=2\left(\frac{-(1+x)}{(1-x)}\right)$$

Отже

$$f(x)=-\frac{1+x}{1-x}=-1-\frac{2x}{1-x}$$

Перевірка: $f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)==-1-\frac{2x}{1-x}-1-\frac{2\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1-x}}=\ -2-\frac{2x}{1-x}+2\frac{1}{x}=$

$$=2\frac{-x+x^2-x^2+1-x}{x(1-x)}=\frac{2(1-2x)}{x(1-x)}$$

що і треба було довести. ▲

■Відповідь: $f(x)=-\frac{1+x}{1-x}=-1-\frac{2x}{1-x}$

2. Нехай $\boldsymbol{ABCD}$ – вписаний чотирикутник, у якого діагоналі $\boldsymbol{AC}$ і $\boldsymbol{BD}$ перетинаються в точці $\boldsymbol{P}$ і нехай точка $\boldsymbol{O}$ – центр кола, описаного навколо трикутника $\boldsymbol{APB}$, а точка $\boldsymbol{H}$ – ортоцентр трикутника $\boldsymbol{CPD}$. Довести, що точки $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{H}$ лежать на одній прямій.

Доведення

Продовжимо OP до перетину із CD у точці L. Очевидно, достатньо довести, що PL перпендикулярно CD.

Оскільки $ABCD$ – вписаний у коло чотирикутник, то $\angle PDL = \angle PAB$. Але точка O – центр кола описаного навколо трикутника APB. Тому $\angle PAB = \frac{1}{2}\angle POB$ (якщо $\angle BAP$ – тупий, то $\angle PAB = 180° - \frac{1}{2}\angle POB$.

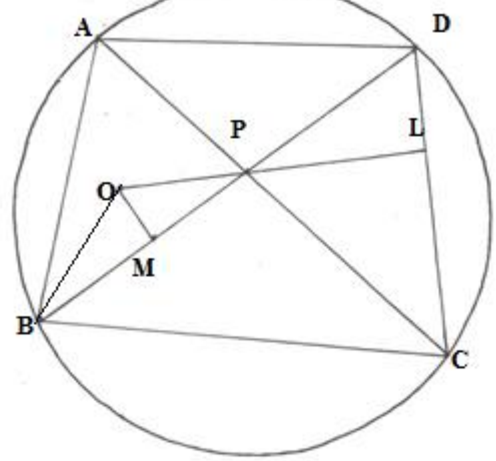
Якщо OM – перпендикулярно до BP, то

$$\frac{1}{2}\angle POB = \angle POM = 90° - \angle OPM = 90° - \angle DPL$$

Таким чином маємо: $\angle PDL = 90° - \angle DPL$. Отже,

$$\angle PLD = 180° - (\angle PDL + \angle DPL) = 90°$$

і означає, що PL перпендикулярно CD.



Тест передбачає 8 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 2годин:
1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -30 балів
2 рівень -3 завдання - максимальна кількість -36 балів
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість 34 балів МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -100 балів

Обласне відділення Малої Академії Наук по Миколаївській області.
Тестування з математики (для вступників до МАН)

10 клас

Відділення: .«Комп'ютерних наук» «Економіки», «Технічних наук»

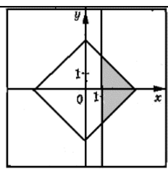
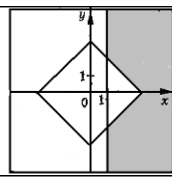
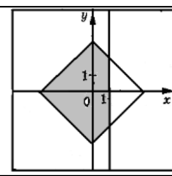
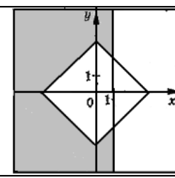
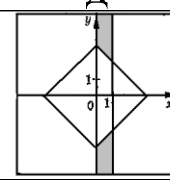
1 рівень

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-1}{2x}=x-1$.

А) -1; **Б)** 15; **В)** $-1; -15$; **Г)** 1.

Відповідь:

2. На якому з рисунків зображено множину розв'язків системи нерівностей $\begin{cases}|x|+|y|\le 3;\\ x\ge 1\end{cases}$?

А	Б	В	Г	Д
				

Відповідь:

3. Установити кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}xy=-6;\\ x-y=0.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
1 розв'язок	2 розв'язки	4 розв'язки	Розв'язків немає	Безліч розв'язків

Відповідь:

2 рівень

1. . Зобразити графік нерівності $|x-2|(xy-6)\ge 0$.

Відповідь:

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.

2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 1; \\ yz = 2; \\ xz = 8. \end{cases}$

. ■*Відповідь:*

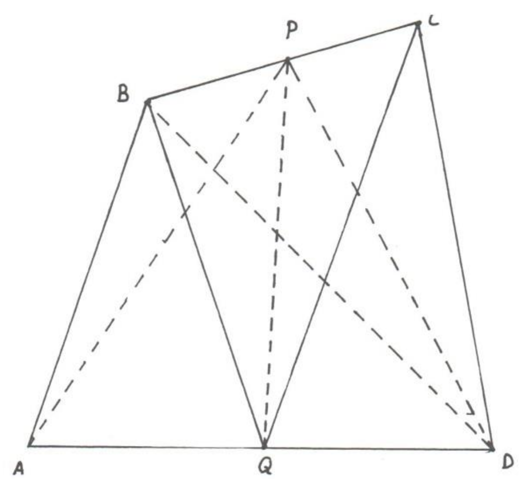
3. З однієї точки до даної прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо похилі дорівнюють 41 см і 50 см, а їхні проекції на дану пряму відносяться, як 3 : 10.

■*Відповідь:*

3 рівень

1. Нехай $ABCD$ – опуклий чотирикутник, P, Q – середини сторін BC і AD відповідно. Нехай AP і BQ перетинаються в точці X; DP і CQ перетинаються в точці Y. Довести, що площа чотирикутника $PXQY$ дорівнює сумі площ трикутників ABX і DCY.

▼*Доведення:*



Сполучимо точки P і Q і проведемо одну із діагоналей чотирикутника $ABCD$, наприклад, BD(див. рис.) Скористаємося тим фактом, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

З трикутників BAD(з медіаною BQ) і BCD(з медіаною DP) отримуємо:

$$S_{ABQ} = S_{DBQ} \ і \ S_{DPC} = S_{DPB}$$

Також маємо

$$S_{ABQ} + S_{DPC} = S_{DBQ} + S_{DPB} = S_{DPBQ} = S_{DPQ} + S_{BPQ} = S_{APQ} + S_{CPQ}$$

(оскільки PQ – медіана для трикутників APD і CQB). А тоді матимемо:

$$S_{AXQ} + S_{AXB} + S_{DYC} + S_{PYC} = S_{AXQ} + S_{PXQ} + S_{CPY} + S_{QPY}$$

Після перетворень отримаємо:

$S_{ABX} + S_{DCY} = S_{PXQY}$ ▲

2. Розв'язати рівняння: $2x^2 + 2xy + y^2 + |z| + 4 = 4x.$

▼ *Розв'язання:*

Записати у вигляді $(x+y)^2 + (x-2)^2 + |z| = 0.$ Оскільки доданки невід'ємні, то кожен з них дорівнює нулю. ▲.

■ *Відповідь:* $(2;-2;0)$

Тест передбачає 8 завдань за трьома рівнями складності, які виконуються протягом 2 годин:
1 рівень - 3 завдання - максимальна кількість -30 балів
2 рівень -3 завдання - максимальна кількість -36 балів
3 рівень - 2 завдання - максимальна кількість 34 балів
МАКСИМАЛЬНА КІЛЬКІСТЬ -100 балів

Керівник відділення математики МТВ МАН України,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, Соросівський доцент Воробйова А.І.
м. Миколаїв, 11-12 жовтня 2019р.