ЗМІСТ

Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

9 клас.

І рівень

1. ■

Знайдіть значення виразу $\frac{1}{4-3\sqrt{2}}-\frac{1}{4+3\sqrt{2}}$

▼***Розв'язання****:*

$$\frac{1}{4-3\sqrt{2}}-\frac{1}{4+3\sqrt{2}}=\frac{-6\sqrt{2}}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\left(4+3\sqrt{2}\right)}=\frac{-6\sqrt{2}}{16-18}=3\sqrt{2}$$

▼***Відповідь*:** $3\sqrt{2}$

2. ■

Під час будівництва нового театру бригада робітників мала змонтувати 420 місць для глядачів. Завдання було виконано на день раніше запланованого строку, оскільки щодня монтували на 10 місць більше, ніж заплановано. Скільки місць монтувала бригада щодня ?

▼***Розв'язання****:* Нехай бригада планувала щодня монтувати x місць, отже вона планувала виконати завдання за $\frac{420}{x}$ днів. Фактично бригада монтувала (x+10) місць щодня, отже виконала завдання за $\frac{420}{x+10}$ днів, що за умовою на один день менше, ніж планувалось. Складемо рівняння $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+10}=1$.

Звідси $\frac{420}{x}-\frac{420}{x+10}=1 \Rightarrow 420(x+10)-420x=x(x+10) \Rightarrow$

$$x^2+10x-4200=0 \Rightarrow x_1=60; x_2=-70$$

x_2 – не задовольняє умові задачі. Таким чином бригада монтувала 60 місць у день, а монтувала на 10 більше тобто 70.

▼***Відповідь*:** 70 місць.

3.■

Чи існують натуральні числа *m,n,* для яких виконується рівність

$m^2 - n^2 = 2019$? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання:

Оскільки $m-n$ та $m+n$ – числа однакової парності, то їх добуток або непарний, або кратний 4. Таким чином $m^2 - n^2 = 2019 \Rightarrow (m+n)(m-n) = 2019 \Rightarrow$

$$2019 = 3*673 \Rightarrow \begin{cases} m+n=673 \\ m-n=3 \end{cases} \Rightarrow m=338,\ n=335.$$

$$2019 = 338^2 - 335^2$$

зауваження, використовуючи дільники числа 2019 *маємо інші випадки* :

$$2019 = 1*2019 \Rightarrow m = 1010,\ n = 1009.$$

▼***Відповідь:*** $2019 = 338^2 - 335^2$, або $2019 = 1010^2 - 1009^2$

II рівень

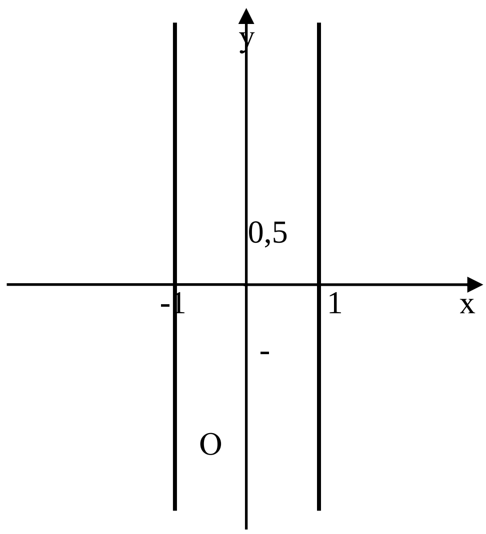
1.

Зобразити на координатній площині множину розв’язків рівняння $.2|xy| - 1 = 2|y| - |x|$

▼***Розв’язок:***

За властивістю модуля: $|xy| = |x| \cdot |y|$.

$$2|xy| - 1 = 2|y| - |x|$$
$$2|x||y| - 1 = 2|y| - |x|$$
$$2|x||y| - 1 - 2|y| + |x| = 0$$
$$|x|(2|y|+1) - (2|y|+1) = 0$$
$$(2|y|+1)(|x|-1) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} 2|y|+1=0, \\ |x|-1=0. \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} 2|y|=-1, \to \textit{не можливо}; \\ |x|=1. \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$



Зобразимо на координатній площині множину точок, координати яких є розв’язками рівняння

▼***Відповідь:*** $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

2.

Довести, що число $A=2018^{2017}+2019^{2018}+1$ є складеним.

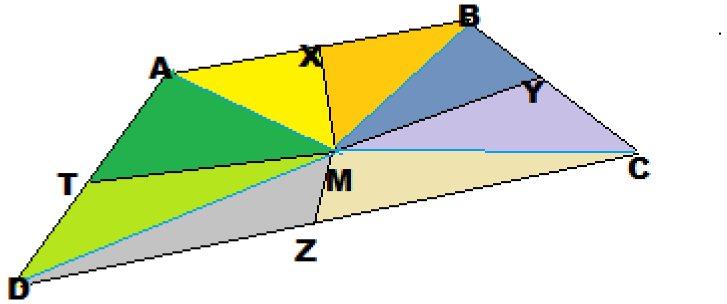
▼***Відповідь:*** Відповідь: Перший доданок даного числа є парним, другий – непарним, третій 1 – непарне. Тому дане число є парним і більше двух, а значить, є складеним.

III рівень

1 ■.

Точку M всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ з'єднали з точками X, Y, Z, T – серединами сторін AB, BC, CD, DA відповідно. Виявилося, що площі трьох отриманих при цьому чотирикутників дорівнюють 1, 2 та 3 см^2. Вкажіть усі можливі значення площі четвертого з цих чотирикутників?

▼**Розв'язок:**



З'єднаємо точку M з вершинами заданого чотирикутника. Оскільки медіана ділить площу трикутника пополам, то площі кожної пари трикутників, які прилягають до однієї і тієї ж сторони чотирикутника $ABCD$, рівні між собою. Звідси випливає, що сума площ чотирикутників $AXMT$ та $CZMY$ дорівнює сумі площ чотирикутників $BYMX$ та $DTMZ$. Тому четверта шукана площа визначається із сукупності таких рівнянь: $1+3=2+S$, $2+3=1+S$ та $1+2=3+S$. Із перших двох знаходимо площі 2 та 4 см^2 відповідно. Розв'язок третього рівняння $S=0$ умову задачі не задовольняє.

2.

Про функцію $y = f(x)$ відомо, що:

1) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ для всіх додатних x та y;

2) $f(2018) = 2019.$

Знайти: $f(\frac{1}{2018}).$

Відповідь: -2019.

▼***<u>Розв'язання:</u>***

Вказівка. При $y = 1$ дана рівність набуває вигляду: $f(x) = f(x) + f(1)$, отже, $f(1) = 0$. Нехай $x = 2018$, $y = 2018$, тоді $f(1) = f(2018) + f\left(\frac{1}{2018}\right)$, тобто $f(\frac{1}{2018}) = -f(2018) = -2019.$

Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук
Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1.■

Сума п’яти послідовних цілих чисел дорівнює сумі наступних послідовних чисел. Чому дорівнює найбільше з цих восьми чисел?

▼*Розв’язок:*

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)=(n+3)+(n+4)+(n+5)\Rightarrow$$

$$5n=3n+12\Rightarrow 2n=12\Rightarrow n=6$$

перевірка

$$4+5+6+7+8=9+10+11\Rightarrow 30=30$$

▼ **Відповідь:** 11

2.

Знайдіть найменше значення виразу $\dfrac{x^4+15x^2+9}{x^2}$, якщо $x>0$, $y>0$.

▼*Розв’язок:*

$$y=\frac{x^4+15x^2+9}{x^2}=x^2+15+\frac{9}{x^2}\to y'=2x-\frac{18}{x}=0\to\frac{2\left(x^2-9\right)}{x}=0$$

$$x_{1,2}=\pm3\to y(\pm3)=\frac{9\cdot9+16\cdot9}{9}=9+16=25$$

▼*Відповідь: 25.*

3.

Сім’я складається з трьох осіб – тата, мами та сина. Якщо тату збільшать вдвічі зарплату і сину збільшать вдвічі стипендію, то сімейний бюджет збільшиться на 80%. Якщо мамі збільшать в тричі зарплату і сину збільшать в тричі стипендію, то сімейний бюджет збільшиться на 60%. На скільки відсотків зменшиться сімейний бюджет, якщо мамі й тату в двічі зменшать зарплату?.

▼*Розв’язок:*

Відповідь: на 45 відсотків. Розв'язання. Якщо татові збільшать зарплату вдвічі і синові збільшать стипендію вдвічі, то сумарний дохід сім'ї зросте рівно на татову зарплату і на синову стипендію, що за умовою становить 80 % сімейного бюджету. Отже, мамина зарплата становить решту 20 % сімейного бюджету. Якщо потроїти синові стипендію і мамину зарплату, то дохід сім'ї збільшиться на 2 стипендії сина і 2 мамині зарплати, що становить 60 % сімейного бюджету. Значить, син з мамою приносять в бюджет удвох 30 %. Отже, татів дохід становить 70 % сімейного бюджету. Мамина і татова зарплата разом складають 20 + 70 = 90 % сімейного бюджету. Значить, якщо зарплату мамі і татові зменшать удвічі, то сімейний бюджет зменшиться на 45 %.

II рівень

1.■

На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?

▼***Розв'язок:***

Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через $m,\ f,\ h,\ b$ відповідно. Тоді маємо такі умови:

$$\begin{cases} m+f+h+b=30, \\ f+b=\frac{1}{2}m, \\ f+h=2b. \end{cases}$$ Звідки отримаємо : $2f+5b=30$. Оскільки $m,\ f,\ h,\ b$ – цілі невід'ємні числа, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6. Залишилося розглянути ці варіанти.

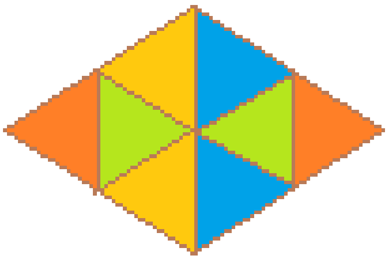
▼***Відповідь:*** $m=12;\ \ f=0;\ \ h=12;\ b=6.$

2. ■

Задано ромб, у якого усі сторони та одна з діагоналей рівні 6 см. Всередині або на сторонах цього ромба вибирають довільним чином 9 точок. Доведіть, що принаймні дві з них знаходяться на відстані не більшій від 3 см.

▼***Розв'язок:***

Розіб'ємо цей ромб спочатку на два правильних трикутники. А тепер кожний з них розіб'ємо на 4 рівних рівносторонні трикутники зі стороною 3 см. Усього маємо 8 трикутників, а точок 9, то за принципом Діріхле принаймні дві з них попадуть у один трикутник. Але найбільша відстань між точками в цьому трикутнику не перевищує 3 см, що й треба було довести.



III рівень

1. ▯

Про функцію $y = f(x)$ відомо, що:

3) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ для всіх додатних x та y;

4) $f(2018) = 2019.$

Знайти: $f(\frac{1}{2018}).$

▼ **Відповідь: :** -2019.

Вказівка. При $y = 1$ дана рівність набуває вигляду: $f(x) = f(x) + f(1)$, отже, $f(1) = 0$. Нехай $x = 2018$, $y = 2018$, тоді $f(1) = f(2018) + f\left(\frac{1}{2018}\right)$, тобто

$f(\frac{1}{2018}) = -f(2018) = -2019.$

2 ■.

При яких значеннях параметра a *кожне із рівнянь* $x^2-4x-5=a$ *та* $x^2+7x+2=a$ *має по два цілих корені ?*

▼*Розв'язок:* Запишемо умову у вигляді системи $\begin{cases} x^2-4x-5=a \\ y^2+7y+2=a \end{cases}$.

Потрібно узнати, при яких значеннях параметра a система має розв'язки $(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2)$, де x_1,x_2- цілі, $x_1\neq x_2$, y_1,y_2-цілі, $y_1\neq y_2$. У першу чергу має справджуватись рівність $x^2-4x-5=y^2+7y+2$, у лівій і правій частині якої виділимо повні квадрати. Вийде рівність $4(x-2)^2-36=4(y+\frac{7}{2})^2-41$, яку перетворимо до рівності $(2y+7)^2-(2x-4)^2=5$. Розклавши ліву частину на множники, дістанемо $(2x+2y+3)(-2x+2y+11)=5$. Це значить, що число 5 розкладене на два цілих множники, а таке можна зробити чотирма способами: $5=5\cdot 1=1\cdot 5=(-1)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-1)$.

Отже, задача звелась до розв'язування чотирьох систем лінійних рівнянь. Ось одна із них: $\begin{cases} 2x+2y+3=5 \\ -2x+2y+11=1 \end{cases}$.

Легко зрозуміти, що тут $x=3, y=-2$. Таким чином, дістали значення параметра $a=-8$. Перевірка показує, що це число справді задовольняє умову, оскільки перше рівняння $x^2-4x-5=-8$ має корені $x_1=1, x_2=3$, а друге рівняння $x^2+7x+2=-8$ має корені $x_1=-2, x_2=-5$. Легко зрозуміти також, що інші системи лінійних рівнянь, згадані вище, не дадуть нових значень параметра a, отже, відповіддю буде єдине число $a=-8$.

Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

11 клас.

І.рівень.

1.

Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y=(k+n)x+(k-n)$ де k, n –довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

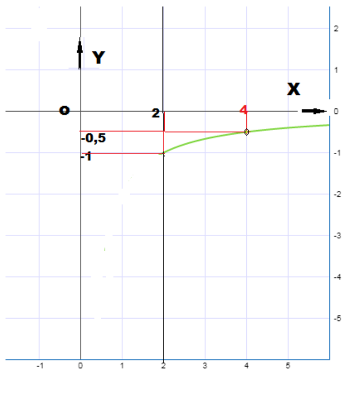
Розв'язання: Розглянемо значення $x=1$, тоді відповідні ординати точок, що лежать на усіх можливих прямих мають значення $y=(k+n)+(k-n)=2k$ - парне . таким чином, через точку, наприклад $(1;1)$ не пройде жодна така пряма.

▼**<u>Відповідь:</u>** існує.

2.

Побудуйте графік функції $y=\dfrac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{2-x}-\dfrac{x+2}{x}$.

▼***<u>Розв'язок:</u>*** $y=\dfrac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{2-x}-\dfrac{x+2}{x}=1-1-\dfrac{2}{x}=-\dfrac{2}{x}$, ОДЗ x>2

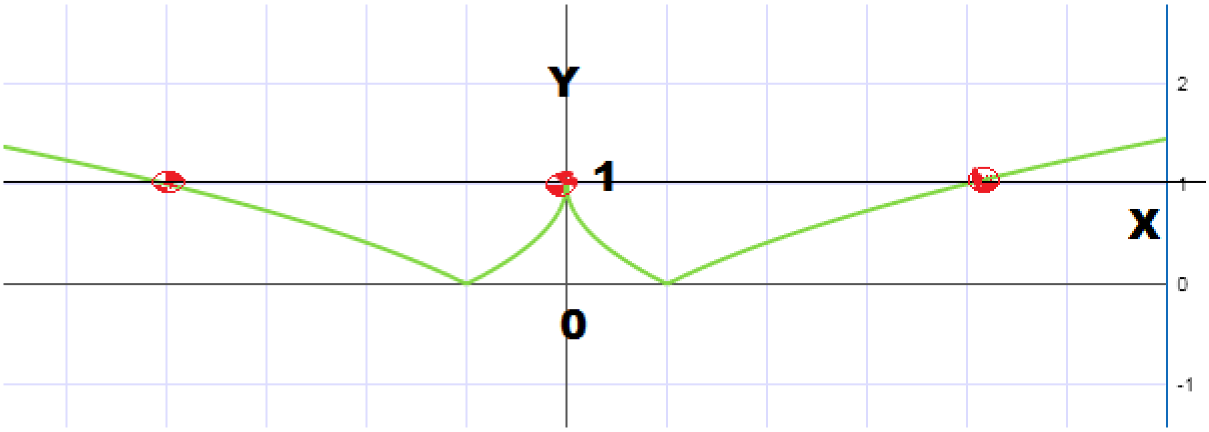


▼ **<u>Відповідь:</u>**

3.

При якому значенні параметра a рівняння $\left|1-\sqrt{|x|}\right|=a$ має три корені?

▼***<u>Розв'язок:</u>***



▼ **Відповідь:** $a = 1$

II рівень

1. ■

Побудувати графік функції $y = \dfrac{\log_2(|x-2| - |x-3| + 1)}{|x-1| + |x-4|}$.

▼ ***Розв'язок:***

Розглядаючи проміжки $(-\infty; 2], [2; 3], [3; +\infty)$, бачимо, що

$$|x-2| - |x-3| + 1 = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2, \\ 2x-4, \quad \text{якщо } 2 \le x \le 3, \\ 2, \quad \text{якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

Це означає, що областю визначення даної у чисельнику функції є проміжок $(2; +\infty)$ (легко помітити, що знаменник додатній завжди).

Розглядаючи проміжки $(2; 4], [4; +\infty)$, бачимо, що

$$|x-1| + |x-4| = \begin{cases} 3, \text{ якщо } 2 < x \le 4, \\ 2x-5, \text{ якщо } x \ge 4. \end{cases}$$

Це означає, що дана в умові задачі функція задається різними формулами на трьох різних проміжках, на яких вона визначена:

$$y=\begin{cases}\dfrac{\log_2(2x-4)}{3}, \text{ якщо } 2<x\le 3,\\ \dfrac{1}{3}, \quad \text{якщо } 3\le x\le 4,\\ \dfrac{1}{2x-5}, \quad \text{якщо } x\ge 4.\end{cases}$$

Графік цієї функції складається з трьох відповідних частин: частини графіка логарифмічної функції, відрізка прямої, паралельної до осі абсцис, і частини графіка гіперболи.

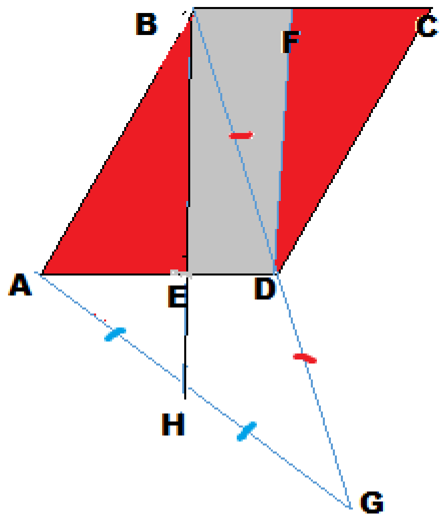
2. ■

У паралелограмі $ABCD$ проведено висоти BE і DF на сторони AD і BC відповідно, які ділять цей паралелограм на три частини рівної площі. На промені BD за вершину D відкладається відрізок $DG = BD$. Пряма BE перетинає відрізок AG у точці H. Знайдіть відношення $AH : HG$.

Розв'язання

З формули для площі трикутника очевидно, що $AE = 2DE$. Оскільки AD – медіана ΔABG, тому E – точка перетину медіан ΔABG, а тому також медіана цього трикутника, звідки $AH = HG$.

▼ **<u>Відповідь:</u>** $AH : HG = 1 : 1$.



III рівень

1■.

Розв'яжіть рівняння $[tgx]=2\cos^2 x$ ($[tgx]$ – ціла частини tgx).

▼Розв'язок:

Відомо, що $0\le\cos^2 x\le 2$, тоді ціла частини $[tgx]$ може приймати тільки три значення: 0, 1, 2.

Випадок $[tgx]$=0 неможливий, бо тоді $\cos x$=0 і tgx не існує.

У випадку $[tgx]$=1 маємо

$$\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\text{, тобто. } x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z.$$

але, враховуючі, що $[tgx]$=1, отримаємо тільки додатні значення $x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Випадок $[tgx]$=2 неможливий, бо тоді $\cos^2 x=1$, і tgx=0.

▼Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

2■.

Основою трикутної піраміди є трикутник зі сторонами 6см, 5см і 5см. Знайти висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 6 см.

▼Розв'язок::

Нехай O – основа висоти DO даної піраміди $ABCD$, $AB=6, AC=BC=5$. Тоді прямокутні трикутники AOD, BOD, COD рівні за двома катетами. Це значить, що точка O – центр описаного навколо трикутника ABC кола. Знайдемо його радіус. За теоремою Піфагора знайдемо висоту трикутника ABC, проведену до AB, вона дорівнює 4, звідси $\sin A=\frac{4}{5}$. Тепер за теоремою синусів $2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{25}{4}$, тому $R=\frac{25}{8}$.

Знову за теоремою Піфагора

$$DO=\sqrt{AD^2-R^2}=\sqrt{36-\frac{625}{64}}=\sqrt{\frac{1679}{64}}=\frac{\sqrt{1679}}{8}=\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{8}\text{ (см).}$$

▼***Відповідь:*** $DO=\sqrt{AD^2-R^2}=\sqrt{36-\frac{625}{64}}=\sqrt{\frac{1679}{64}}=\frac{\sqrt{1679}}{8}=\frac{\sqrt{23\cdot 73}}{8}$

Відділення математики

Контрольна робота з математики

9 клас.

І рівень

1■.

Ненульові числа a,b задовольняють умови: $6a+6b=\frac{25}{a}+\frac{25}{b}=25.$ Чому може дорівнювати значення виразу $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$?

Розв'язок: Легко показати, що $a+b=ab$

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=(a+b)-2=\frac{25}{6}-2=\frac{13}{6}.$

▼***Відповідь:*** $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{13}{6}$

2.■

Обчислити $\sqrt{12-2\sqrt{35}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$

Розв'язок:

Оскільки $12-2\sqrt{35}=(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2, 8-2\sqrt{7}=(\sqrt{7}-1)^2, 14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2,$ то даний вираз дорівнює $(\sqrt{7}-\sqrt{5})-(\sqrt{7}-1)-(3-\sqrt{5})=-2.$

3.

Зобразити на координатній площині множину розв'язків рівняння . $2|xy|-1=2|y|-|x|$

▼***Розв'язок:***

За властивістю модуля: $|xy|=|x|\cdot|y|$.

$2|xy|-1=2|y|-|x|$

$2|x||y|-1=2|y|-|x|$

$2|x||y|-1-2|y|+|x|=0$

$|x|(2|y|+1)-(2|y|+1)=0$

$$(2|y|+1)(|x|-1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} 2|y|+1=0, \\ |x|-1=0. \end{array}\right.$$

O

$$\left[\begin{array}{l} 2|y|=-1, \to \textit{не можливо}; \\ |x|=1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Зобразимо на координатній площині множину точок, координати яких є розв'язками рівняння

▼***<u>Відповідь</u>:*** $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$

II рівень

1. ■

При якому найменшому цілому значенні a система нерівностей $\begin{cases} x^2+y^2 \le 9, \\ y \le a \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

▼***<u>Відповідь</u>:*** (4; 2), (–4; –2)

2.

В прямокутному трикутнику висота, яка опущена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких дорівнює одному з катетів трикутника. Знайти кути трикутника.

▼Відповідь: $\angle ACB = 30°, \quad \angle BAC = 60°$

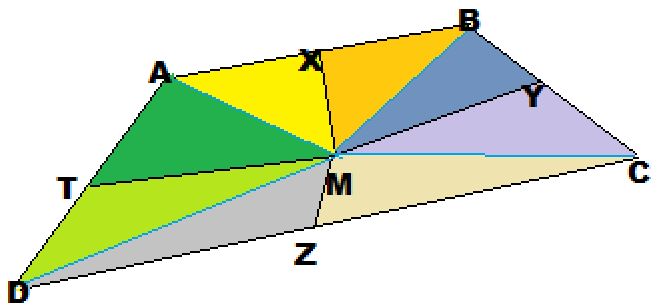
Нехай ABC прямокутний трикутник з прямим кутом B і BH висота. На відрізку HC відмітимо точку K так, що $AH = HK$. Із умови задачі слідує, що $KC = AB = BK$. Тому $\angle BAC = \angle AKB = 2\angle ACB$. Звідки знаходимо, що $\angle ACB = 30°, \quad \angle BAC = 60°$.

III рівень

1.■

Точку M всередині опуклого чотирикутника $ABCD$ з'єднали з точками X, Y, Z, T – серединами сторін AB, BC, CD, DA відповідно. Виявилося, що площі трьох отриманих при цьому чотирикутників дорівнюють 1, 2 та 3 см^2. Вкажіть усі можливі значення площі четвертого з цих чотирикутників?

▼**<u>Розв'язок:</u>**



З'єднаємо точку M з вершинами заданого чотирикутника. Оскільки медіана ділить площу трикутника пополам, то площі кожної пари трикутників, які прилягають до однієї і тієї ж сторони чотирикутника $ABCD$, рівні між собою. Звідси випливає, що сума площ чотирикутників $AXMT$ та $CZMY$ дорівнює сумі площ чотирикутників $BYMX$ та $DTMZ$. Тому четверта шукана площа визначається із сукупності таких рівнянь: $1+3=2+S$, $2+3=1+S$ та $1+2=3+S$. Із перших двох знаходимо площі 2 та 4 см2 відповідно. Розв'язок третього рівняння $S=0$ умову задачі не задовольняє.

2.■

Відомо, що $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{a^3}=1$. Обчисліть $\dfrac{a^6-2a^4}{1-a^2}$.

▼***<u>Розв'язок:</u>***

З умови задачі випливає, що $\frac{a+1}{a^3}=1$ тобто $a^3=1+a$.

Тому

$$\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1+a)-2a(1+a)}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1-a)}{1-a^2}=1.$$

Відділення математики
Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1▲.

Якщо f(x)=$\frac{2x}{3x+4}$ і f(g(x))=x, то чому дорівнює g(x)-?

▼***Розв'язок:***

$$f(g(x)) = \frac{2g}{3g+4} = x \Rightarrow 2g = 3gx + 4x \Longleftrightarrow$$

$$g(2-3x) = 4x \Rightarrow g = \frac{4x}{2-3x}$$

▼**Відповідь:** Г) $\frac{4x}{2-3x}$

2.■

Побудувати на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють нерівності: $y - \frac{2019}{|\cos \pi x|} \geq \sqrt{2019 - y - x^2}$.

Відповідь: Графіком даної нерівності буде точка (0; 2019).

3.■

Чи існують натуральні числа *m,n,* для яких виконується рівність $m^2 - n^2 = 2019$? Відповідь обґрунтуйте.

Розв'язання:

Оскільки $m-n$ та $m+n$ – числа однакової парності, то їх добуток або непарний, або кратний 4. Таким чином

$m^2 - n^2 = 2019 \Rightarrow (m+n)(m-n) = 2019 \Rightarrow$

$2019 = 3*673 \Rightarrow \begin{cases} m+n=673 \\ m-n=3 \end{cases} \Rightarrow m=338,\ n=335.$

$2019 = 338^2 - 335^2$

зауваження, використовуючи дільники числа 2019 *маємо інші випадки*:

$2019 = 1*2019 \Rightarrow m=1010,\ n=1009.$

▼***Відповідь:*** $2019 = 338^2 - 335^2$, або $2019 = 1010^2 - 1009^2$

II рівень

1.■

Відомо, що $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} = 1$. Обчисліть $\frac{a^6 - 2a^4}{1-a^2}$.

▼***Розв'язок:***

З умови задачі випливає, що $\frac{a+1}{a^3} = 1$ тобто $a^3 = 1 + a$.

Тому

$$\frac{a^6 - 2a^4}{1-a^2} = \frac{(1+a)(1+a) - 2a(1+a)}{1-a^2} = \frac{(1+a)(1-a)}{1-a^2} = 1.$$

▼***Відповідь:*** 1

2

Про функцію $y = f(x)$ відомо, що:

5) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ для всіх додатних x та y;

6) $f(2018) = 2019.$

Знайти: $f(\frac{1}{2018})$.

Відповідь: -2019.

Вказівка. При $y=1$ дана рівність набуває вигляду: $f(x)=f(x)+f(1)$, отже, $f(1)=0$. Нехай $x=2018$, $y=2018$, тоді $f(1)=f(2018)+f\left(\frac{1}{2018}\right)$, тобто

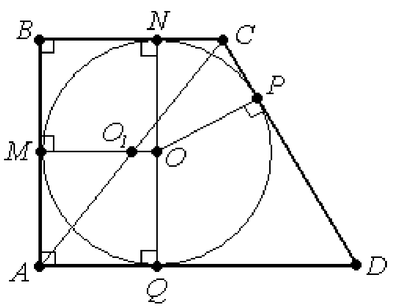
$f(\frac{1}{2018})=-f(2018)=-2019.$

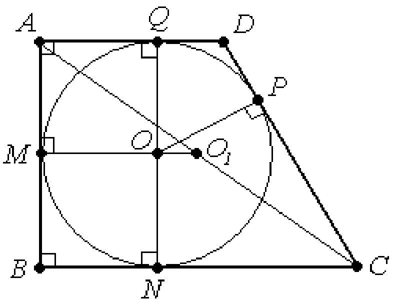
III рівен

.1■

Дано трапецію $ABCD$, бічна сторона AB якої перпендикулярна до її основ. В трапецію вписане коло з центром O. Через вершини A, B, C провели коло, центр якого позначили O_1. Знайдіть довжину діагоналі AC, якщо відомо, що $OO_1=1$, а основа $BC=10$.

▼***<u>Розв'язок::</u>***





Тут можливі два випадки: 1) коли BC – менша основа трапеції; 2) коли BC – більша її основа.

Нехай вписане коло дотикається до сторін AB, BC, CD і DA в точках M, N, P і Q відповідно. Тоді $AMOQ$ і $MBNO$ – квадрати, сторони яких дорівнюють радіусу вписаного кола. Оскільки $BC \parallel MO \parallel AD$, причому $AM=MB$, то за теоремою Фалеса пряма MO перетинає відрізок AC в його середині, тобто в точці O_1 – центрі описаного кола навколо трикутника ABC. В обох випадках MO_1 – середня лінія трикутника ABC. Так як $BC=10$, то $MO_1=5$. У першому випадку $MO=MO_1+O_1O=5+1=6$, $AM=BN=MO=6$, тобто $AB=12$. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABC знаходимо, що $AC=2\sqrt{61}$. У другому випадку $MO=MO_1-O_1O=5-1=4$, $AB=8$, $AC=2\sqrt{41}$.

►●Відповідь: $AC=2\sqrt{61}$ або $AC=2\sqrt{41}$.

2.

У трикутнику ABC відомо, що $BC = a, AB = c, \angle ABC = 60^\circ$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.

▼***<u>Розв'язок:</u>*:**

За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, звідки $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = cb \cdot \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$. Знову за теоремою косинусів дістанемо $b^2 = a^2 + c^2 - ac$, тому $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2 + c^2 - ac + c^2 - a^2}{2} = c^2 - \frac{ac}{2}$.

▼***<u>Відповідь</u>*:** $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{a^2 + c^2 - ac + c^2 - a^2}{2} = c^2 - \frac{ac}{2}$.

Відділення математики

Контрольна робота з математики

11 клас.

І. рівень.

1.

Відомо, що $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}=1$. Обчисліть $\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}$.

▼***Розв'язок:***

З умови задачі випливає, що $\frac{a+1}{a^3}=1$ тобто $a^3=1+a$.

Тому

$$\frac{a^6-2a^4}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1+a)-2a(1+a)}{1-a^2}=\frac{(1+a)(1-a)}{1-a^2}=1.$$

2.

Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y=(k+n)x+(k-n)$ де k,n–довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

Розв'язання: Розглянемо значення $x=1$, тоді відповідні ординати точок, що лежать на усіх можливих прямих мають значення $y=(k+n)+(k-n)=2k$ - парне . таким чином, через точку, наприклад $(1;1)$ не пройде жодна така пряма.

3

Порівняйте два числа:

$$\sqrt{2018+\sqrt{2019}}+\sqrt{2019+\sqrt{2018}} \text{ та } \sqrt{2018+\sqrt{2018}}+\sqrt{2019+\sqrt{2019}}.$$

▼***Розв'язання***. Сформулюємо цю задачу у загальному вигляді: для деяких додатних $a \neq b$ порівняти додатні числа $A = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{b+\sqrt{a}}$ та $B = \sqrt{a+\sqrt{a}} + \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Доведемо, що $A > B$. Це рівносильне тому, що $A^2 > B^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{a}} > \sqrt{a+\sqrt{a}} \cdot \sqrt{b+\sqrt{b}}$. Після чергового піднесення до квадрату та спрощень маємо: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} > a\sqrt{b} + b\sqrt{a} \quad \Leftrightarrow$ $(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) > 0$ при $a \neq b$.

▼***Відповідь***: Перше число більше.

II рівень

1.

Про функцію $y = f(x)$ відомо, що:

1) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ для всіх додатних x та y;

2) $f(2018) = 2019.$

Знайти: $f(\frac{1}{2018}).$

Відповідь: -2019.

Вказівка. При $y = 1$ дана рівність набуває вигляду: $f(x) = f(x) + f(1)$, отже, $f(1) = 0$. Нехай $x = 2018$, $y = 2018$, тоді $f(1) = f(2018) + f\left(\frac{1}{2018}\right)$, тобто

$f(\frac{1}{2018}) = -f\left(2018\right) = -2019.$

2.■

Розв'язати рівняння $4\sin^3 x + 3\cos x = \sin x + 4\cos^3 x$.

▼Розв'язок:

Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^3 x$ (тут $\cos x \neq 0$, бо якщо $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, і рівність буде неправильною). Дістанемо рівняння

$$4tg^3 x + \frac{3}{\cos^2 x} = tgx \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 4.$$

Враховуючи, що $\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x,$ отримаємо $3t^3+3t^2=t+1,$ де $t=tgx.$

Тепер або $t+1=0$, або $3t^2=1,$ тобто $t_1=-1, t_{2,3}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$ звідки $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$

або $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,$ де $n-$довільне ціле число.

III рівень

1.■ Для додатних чисел x, y, z довести нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4}+\frac{y^8+1}{y^4}+\frac{z^8+1}{z^4}\ge 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

▼<u>Розв'язок:</u>

Застосуємо двічі нерівність середнього арифметичного та геометричного

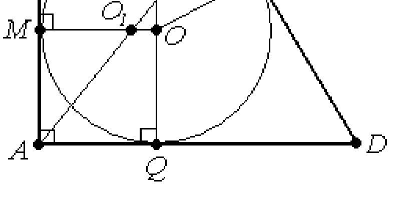
$$a+b\ge 2\sqrt{ab}$$

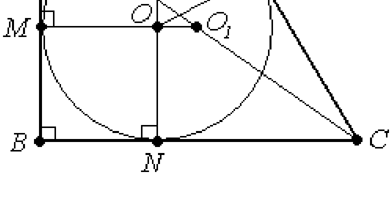
$$\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)=\left(x^4+\frac{1}{y^4}\right)+\left(y^4+\frac{1}{z^4}\right)+\left(z^4+\frac{1}{x^4}\right)\ge$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{x^4}{y^4}}+2\sqrt{\frac{y^4}{z^4}}+2\sqrt{\frac{z^4}{x^4}}=2\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)=\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}\right)+\left(\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\right)+\left(\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}\right)\ge$$
$$\ge 2\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

2.■

Дано трапецію $ABCD$, бічна сторона AB якої перпендикулярна до її основ. В трапецію вписане коло з центром O. Через вершини A, B, C провели коло, центр якого позначили O_1. Знайдіть довжину діагоналі AC, якщо відомо, що $OO_1=1$, а основа $BC=10$.

▼





Тут можливі два випадки: 1) коли BC – менша основа трапеції; 2) коли BC – більша її основа.

Нехай вписане коло дотикається до

сторін AB, BC, CD і DA в точках M, N, P і Q відповідно. Тоді $AMOQ$ і $MBNO$ – квадрати, сторони яких дорівнюють радіусу вписаного кола. Оскільки $BC \parallel MO \parallel AD$, причому $AM = MB$, то за теоремою Фалеса пряма MO перетинає відрізок AC в його середині, тобто в точці O_1 – центрі описаного кола навколо трикутника ABC. В обох випадках MO_1 – середня лінія трикутника ABC. Так як $BC = 10$, то $MO_1 = 5$. У першому випадку $MO = MO_1 + O_1O = 5 + 1 = 6$, $AM = BN = MO = 6$, тобто $AB = 12$. За теоремою Піфагора з прямокутного трикутника ABC знаходимо, що $AC = 2\sqrt{61}$. У другому випадку $MO = MO_1 - O_1O = 5 - 1 = 4$, $AB = 8$, $AC = 2\sqrt{41}$.

►●Відповідь: $AC = 2\sqrt{61}$ або $AC = 2\sqrt{41}$.