МАТЕМАТИЧНИЙ ГУРТОК

ЗАСТОСУВАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ MAPLE ДЛЯ РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Укладачі:
Воробйова А.І., Осецька Ю.О.,
Савицька ВП., Півень В.В.

ЗМІСТ

Вступ

У 1980 році група дослідників канадського університету Waterloo зайнялася проблемою створення комп'ютерної системи, ефективної у вирішенні алгебраїчних завдань і достатньо простої для того, щоб її могли використовувати не тільки математики і інженери, але й школярі, студенти.

Програма отримала ім'я **Maple**. На початку 90-х років у Maple з'явився графічний інтерфейс користувача, та саме з цього часу система Maple почала широко застосовуватися в освіті.

Waterloo Maple, разом з Wolfram Mathematica, є найпотужнішою системою символьної математики (або комп'ютерної алгебри). Навіть у тих випадках, коли обчислення носять чисельний характер, розрахункові алгоритми реалізуються так, щоб отримати спочатку аналітичний результат.

У Maple в цілому використовується більше трьох тисяч команд, проте деякі з них (що відносяться до проблем інтегрування, диференціювання функцій, вирішення рівнянь і тому подібне) застосовуються достатньо часто і складають кістяк базової мови. Деякі команди доступні тільки при підключенні спеціальних пакетів.

Робота здійснюється в інтерактивному режимі: користувач вводить команду, натискає <Enter>, після чого в тому ж робочому листі під введеною командою відображається результат виконання операції ядром Maple.

Даний збірник є практичним посібником для проведення занять математичного гуртка в системі Малої академії наук.

Тут основна увага приділяється рішення математичних завдань в системі Maple, а саме елементам лінійної алгебри, розв’язанню звичайних диференціальних рівнянь та ДРЧП. А також розглянуто побудова графіків функцій та основи програмування на мові Maple.

Заняття №1 Означення матриці. Типи матриць

Мета: придбання базових знань в області фундаментального розділу математики - лінійної алгебри. Вивчити поняття матриці, її видів.

Тип роботи:

Вивчення та закріплення нового матеріалу.

Структура роботи:

I. Організаційний момент.

II. Вивчення нового матеріалу.

   a. Визначення матриць

   b. Дії над матрицями

   c. Практична частина

III. Підсумки роботи.

<u>Хід роботи</u>

I. Організаційний момент.

II. Вивчення нового матеріалу.

Теоретична частина

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

<u>Означення.</u> Матриця розмірів (mxn) – це прямокутна таблиця чисел з m рядків та n стовпців.

Позначається матриця так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для 2x2 матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс *i* в елементі a_{ij} означає номер рядка, а індекс *j*— номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=0$, $a_{11}=15$, $a_{22}=25$

Добуток числа рядків *m* на число стовпців *n* називають розмірністю матриці і позначають $m\times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m\times n$ матриці А, то пишуть $A_{m\times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною***. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її порядком.

Наприклад ми сьогодні розглянемо матриці другого порядку, тобто матриці розмірність 2×2.

Дві матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $(a_{ij})=(b_{ij})$.

$$A=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A=B.$$

Нульовою називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою *O*. $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(2{,}3)$$

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається буквою E. Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо виконується умова

$A A^{-1} = A^{-1}A = E$.

З матрицями можна здійснювати такі операції:

2.1. Множення на число

<u>Приклад:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, p = \frac{1}{2}, \text{тоді} \quad pA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$

2.2. Додавання матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою C = A + B двох матриць Am×n — (aij) і Bm×n = (bij) називається матриця Cm×n= (cij)=(aij+bij).

<u>Приклад:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{тоді} \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Справедливі такі властивості операцій:

а) A+ B = B + A — комутативність відносно додавання матриць; (переставний закон) б) A + (B + C) — (A + B)+C — асоціативність відносно додавання матриць; (розподільний закон)

в) A + O = A; A - A = O — роль нульової матриці в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) α(βA) = (αβ) A — асоціативність відносно множення чисел;

д) α(A + B) = αA +αB — дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць; (розподільний закон)

е) (α + β) A — αA + βA — дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

2.3. Множення матриць.

<u>Приклад:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\textit{тоді} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$$

Добутком матриці A розмірів $m \times k$ та матриці B розмірів $k \times n$ називається матриця C розмірів $m \times n$, яка позначається AB. Елемент c_{ij} цієї матриці – це сума попарних добутків елементів *i*-го рядка матриці A та елементів *j*-го рядка матриці B, а саме: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ir}b_{rj}$ правило „рядок на стовпчик”.

Якщо A та B квадратні матриці однакового порядку, то їх завжди можна перемножити.

Справедливі такі властивості операцій множення матриць:

а) (AB) C = A (BC); асоціативність множення матриць.

б) (αA) B = A (αB) = α(AB);

в) (A + B) C = AC + BC; дистрибутивність множення (лівосторонній закон) г) C (A + B) = CA + CB; дистрибутивність множення (правосторонній закон)

д) A • O = O • A = O; е) AE = EA = A;

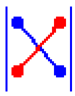
е) в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$; - не комутативність множення.

Означення визначника: Визначником (детермінантом) будь-якої квадратної матриці $A=(a_{i,j})$ називається алгебраїчна сума всіх можливих добутків елементів матриці $a_{i,j}$, взятих по одному з кожного рядка і стовпця з певним знаком. Цей знак рівний мінус одиниці (-1) в степені кількості інверсій номерів других індексів, коли перші впорядковані в порядку зростання.

Таке правило незручне для сприйняття, тому на практиці користуються простими формулами.

Визначник другого порядку рівний різницю добутків елементів головної та бічної діагоналі:

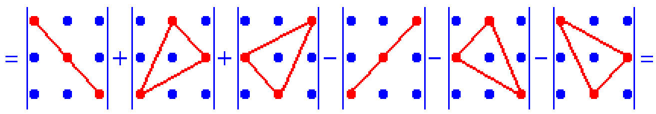
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Визначник третього порядку знаходять за правилом трикутників:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Практична частина

<u>Приклад №1.</u> Знайти визначники матриці:

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\4&3\end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}.$$

$$\det A=\begin{vmatrix}2&1\\4&3\end{vmatrix}=2\cdot3-1\cdot4=6-4=2;$$

$$\det A^T=\begin{vmatrix}2&4\\1&3\end{vmatrix}=2\cdot3-4\cdot1=6-4=2;$$

$$\det A^T\equiv\det A$$

1) Знайти визначники матриць:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}5&3\\0&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}6&-3\\1&2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}15&-3\\7&25\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}8&31\\9&5\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}8&4\\6&9\end{pmatrix}$$

$$J=\begin{pmatrix}5&8\\19&5\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}13&12\\7&9\end{pmatrix}\quad K=\begin{pmatrix}9&-7\\6&-4\end{pmatrix}$$

Приклад №2. Додати матриці:

$$\begin{pmatrix}3&4\\7&-6\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}4&-8\\0&3\end{pmatrix}$$

Розв’язання:

$$\begin{pmatrix}3&4\\7&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-8\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4&4-8\\7+0&-6+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-4\\7&-3\end{pmatrix}$$

Приклад №3 Обчислити $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-2x+1$

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$f(A)=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}++\begin{pmatrix}-4&2\\6&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-3\\-9&7\end{pmatrix}$$

Приклад №4 Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$

Розв'язання Множення матриць другого порядку**.**

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} r = ae + bf \\ s = ag + bh \end{matrix} \qquad \begin{matrix} t = ce + df \\ u = cg + dh \end{matrix}$$

Приклад №5 Матриці A і B називаються *переставними*, якщо $AB = BA$. Знайти всі матриці, переставні з матрицями:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}; \qquad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 3\beta & \alpha + 3\beta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ -5\beta & \alpha + 9\beta \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, де α, β, γ — будь-які числа.

Завдання для самостійної роботи

Дано матриці *A*, *B*. Потрібно знайти:

1) Виконати дії над матрицями:

   а) $3A + 2B$;

   б) $AB - BA$.

2) Обчислити $f(A)$, $\varphi(A)$, , якщо $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, $\varphi(x) = x^2 - 4x + 2$

.

№ п/п	*A*	*B*
1.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

13.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 20 & -7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Тест-контроль:

Q1. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$. V2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$. V4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Q2. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$. V2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$. V4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Q3. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ є

V1. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$. V2. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. V4. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Q4. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. V2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. V4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q5. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд $S = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$?

V1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$. V2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$. V4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

Підсумки роботи:

У цьому уроці ми ознайомились з додаванням, множенням та детермінантом матриць.

Заняття №2 Система лінійних рівнянь двох змінних.

Мета: ознайомлення та вирішення систем лінійних рівнянь двох змінних

Тип роботи:

Вивчення та закріплення нового матеріалу.

Структура роботи:

IV. Організаційний момент.

V. Вивчення нового матеріалу.

a. Теоретичні відомості про СЛР

b. Практична частина

c. Вправи для самостійного розв’язування.

<u>Хід роботи</u>

III. Організаційний момент.

IV. Вивчення нового матеріалу.

Теоретична частина.

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими x_1 x_2, ..., x_n називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, ... m$; $j = 1, 2, ..., n$ біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i — вільними членами системи (*).

Система рівнянь (*) називається однорідною, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Множина чисел a1, a2, ..., an називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д. Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису a, b, c число a вважається першим, b— другим, c — третім, в запису b, a, c першим е число b, другим — число a і третім — число c.

Упорядкований набір n чисел ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) називається розв'язком системи (*), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (*) в тотожності.

Сумісна система називається невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

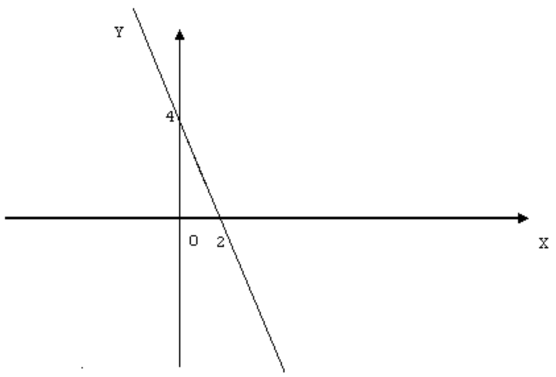
3.1. Розв'язки системи лінійних рівнянь двох змінних та їх геометрична інтерпретація.

Розглянемо лінійне рівняння

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = -2x + 4$$

З геометричної точки зору це рівняння прямої. Побудуємо її за двома точками

x	0	2
y	4	0

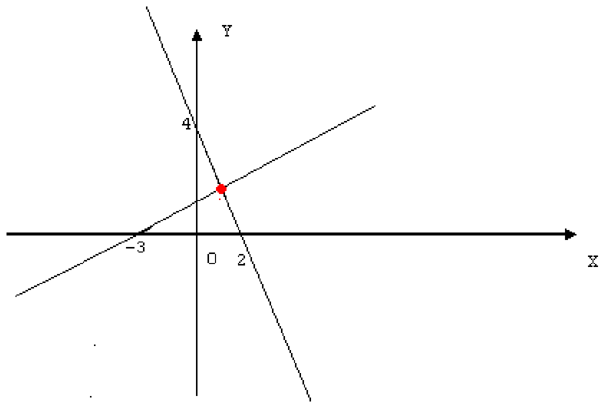


Розв'язками рівняння є безліч упорядкованих пар (x,y) точок прямої.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

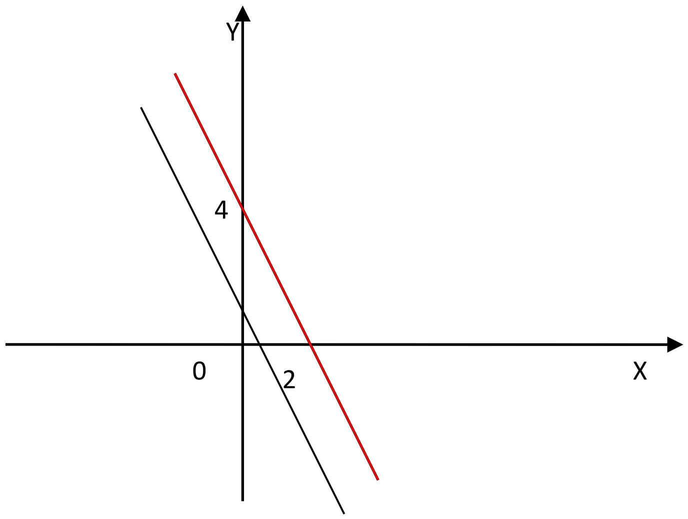


Перетин прямих дає єдиний розв’язок даної системи (1,2)

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

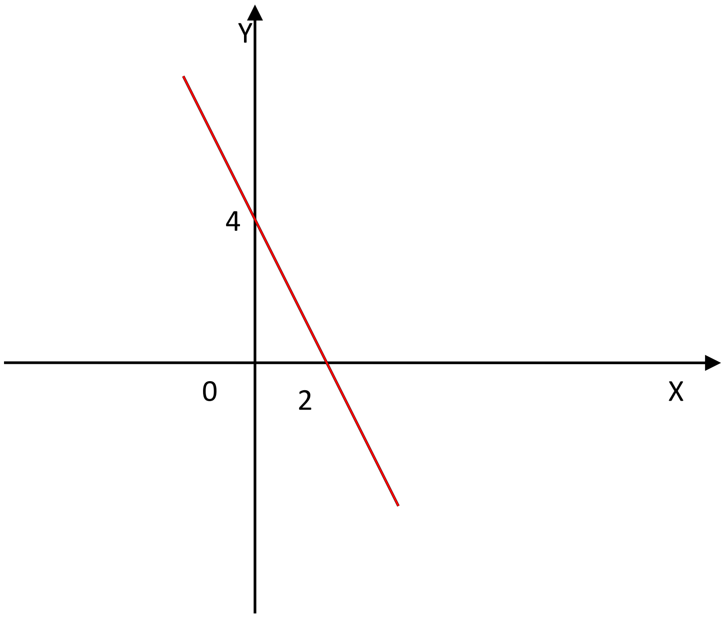


Прямі не перетинаються - отже немає розв’язку

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 8. \end{cases} \qquad (3)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих, які збігаються. Побудуємо їх.



Отже система має безліч розв’язків.

3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad ( )$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи ( ): спочатку помножимо перше рівняння на a22. Друге — на —a12, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на a21, а друге — на —a11 і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{112}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Систему ( ) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix};\quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи ( ), називається визначником системи. Визначники Δy та Δx утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих x та y вільними членами.

Практична частина

<u>Приклад №1</u> Розв’язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -4x + y = 8 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -10$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 64$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{35}{-10} = -3.6$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{64}{-10} = -6.4$$

Відповідь: (-3.6; -6.4).

Вправи для самостійного розв'язування.

Завдання1. Розв'язати системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими

1. $\begin{cases} -2x+4y=0 \\ 5x-y=4 \end{cases}$;   2. $\begin{cases} x+5y=16 \\ 4y=12 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases}$;   4. $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x-3y=2 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$;   6. $\begin{cases} 4x-5y=0 \\ -3x+2y=1 \end{cases}$;

7. $\begin{cases} x-2y=7 \\ 4x+3y=5 \end{cases}$;   8. $\begin{cases} -x-6y=3 \\ -5x+2y=2 \end{cases}$.

Завдання 2. Розв'язати систему двох однорідних лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases};$$

Завдання 3. При якому значенні k система має безліч розв'язків?

$$\begin{cases} 5x-k\,y=3 \\ \dfrac{5}{2}x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Завдання 4. При якому значенні k система не має розв'язків?

$$\begin{cases} 3x-k\,y=9 \\ 2x+7y=4 \end{cases}.$$

Заняття №3 Основи роботи з системою Maple

Мета: ознайомлення з системою Maple та вирішення завдань лінійної алгебри за допомогою пакету

Тип роботи:

Вивчення та закріплення нового матеріалу.

Структура роботи:

VI. Організаційний момент.

VII. Вивчення нового матеріалу.

  a. Теоретичні відомості про Maple

  b. Функції системи Maple

  c. Практична частина

VIII. Підсумки роботи.

<u>Хід роботи</u>

V. Організаційний момент.

VI. Вивчення нового матеріалу.

Теоретична частина

Теоретичні відомості про Maple

Пакет аналітичних обчислень і числових розрахунків Maple створений компанією Waterloo Maple Inc. (Канада) і є одним з найбільш популярних у світі програмних продуктів, який дозволяє ефективно виконувати як числові, так і символьні обчислення, має розвинуті графічні засоби та вбудовану мову програмування високого рівня. Ці можливості та дружній інтерфейс користувача забезпечили широке застосування математичного пакета Maple у багатьох галузях науки, природознавства, а також у навчальному процесі.

Розглянемо основи роботи з Maple. Звичайно, більш-менш ґрунтовний огляд цього пакета вимагає окремої книги, а обсяг додатка до посібника дозволяє пояснити лише окремі аспекти роботи з програмою. Для глибшого ознайомлення з пакетом Maple пропонується використовувати та довідкову систему Maple.

Робота з Maple здійснюється у вигляді інтерактивного сеансу: користувач вводить на робочому листі команди (під ними зараз розуміємо певні інструкції) і натисненням клавіші Enter передає їх на виконання ядру Maple. Всі введені команди і результати обчислень, які відображаються, формують вміст робочого листа – основного документа Maple. Робочий лист можна зберегти на диску, відкрити, знову виконати команди, що на ньому містяться, чи провести їх коригування.

Робочий лист складається з областей введення і областей виведення. У перших вводяться команди, у других відображуються результати їх виконання чи повідомлення про помилки набору команд. Вміст областей введення і виведення утворює групу обчислень, яка на робочому листі відмічається зліва квадратною дужкою.

Команди вводяться в області введення після символу-запрошення > у формі синтаксису мови Maple, а відображатись вони можуть у цій самій формі або у вигляді звичного математичного запису (в останніх версіях програми за замовчуванням використовується другий варіант). Кожна команда, яка вводиться в області введення, повинна закінчуватись крапкою з комою (;) або двокрапкою (:). Якщо вживається крапка з комою, то результат виконання команди буде відображатись у області виведення, двокрапка використовується для проміжних обчислень, результати яких відображати не потрібно. Якщо команда достатньо довга і не поміщається у рядку, то Maple автоматично перенесе її у наступний рядок. В одному рядку можна вводити кілька команд, відокремлених крапкою з комою чи двокрапкою.

За замовчуванням результати виконання команди відображаються у вигляді звичного математичного запису. Отриману формулу чи її частину можна скопіювати в область введення (вона відобразиться у формі синтаксису мови Maple, якщо у цій формі відображається вміст області введення).

Крім груп обчислень, на робочому листі можуть бути коментарі, які створюються за допомогою команд меню Maple чи кнопок панелі інструментів. Коментарем є також частинарядка в області введення, яка починається з символу #.

Треба мати на увазі, що у пам'яті комп'ютера під час сеансу роботи з робочим листом зберігаються всі результати виконання команд, навіть якщо самі команди або результати їх роботи після цього були видалені (звичайно, якщо не вживати спеціальних заходів для знищення цієї інформації). Водночас, після відкриття робочого листа у пам'яті комп'ютера немає результатів обчислень, хоча вони є на робочому листі у відповідних областях виведення.

Maple вміє працювати з цілими числами, звичайними дробами, алгебричними коренями, числами з плаваючою крапкою та комплексними числами. В арифметичних виразах можна використовувати операції піднесення до степеня (^), множення (*), ділення (/), додавання (+), віднімання (-), факторіал (!). Порядок виконання цих операцій є стандартним, а для його зміни використовують круглі дужки.

У виразах можна використовувати такі сталі: Pi – число π = 3 . 1415926 . . . , I – уявна одиниця $i = \sqrt{-1}$, infinity – нескінченність ∞ та деякі інші. Знак % позначає результат виконання попередньої операції. Його також можна використовувати у виразах.

Два вирази, поєднані знаком =, є рівнянням. Нерівність складається з двох виразів, поєднаних знаками >, <, >= або <=.

Вирази, рівняння, нерівності та інші об'єкти можна присвоювати змінним операцією присвоювання (:=). Кожна змінна Maple має ім'я, яке може складатися з латинських букв, цифр і символу підкреслення, але першим символом імені цифра бути не може. Великі і малі букви розрізняються. Змінна, ім'я якої збігається з ім'ям грецької букви, відображається відповідною грецькою буквою. Змінна, якій нічого не присвоєно, трактується як невідома. Існують системні змінні, яким від самого початку щось присвоєно. Наприклад, системна змінна Order визначає, до якого порядку малості потрібно розвивати функції у ряди. Системна змінна Digits визначає необхідну кількість значущих цифр при обчисленнях з десятковою крапкою.

Функції системи Maple

Основні можливості Maple реалізовані за допомогою функцій, які також називають ***командами***. Кожна команда Maple (а їх є декілька тисяч) має назву і кілька аргументів, які записуються у круглих дужках через кому після назви команди. У деяких випадках аргументами команди можуть бути ***множини*** – послідовності виразів через кому у фігурних дужках – і ***списки*** – послідовності виразів через кому у квадратних дужках. В додатках терміни «множина» і «список» вживаються саме в цьому сенсі. Останні необов'язкові аргументи команди, які мають вигляд ключового слова або рівності «ключове слово=властивість», називають ***опціями***. Деякі команди мають необов'язкові аргументи, які записуються у квадратних дужках перед круглими. Результат дії команди можна присвоїти змінній, використати у виразі, він може бути аргументом іншої команди. У протилежному разі результат виконання команди просто відобразиться в області виведення (якщо команда завершується крапкою з комою).

У таблиці наведено команди для основних математичних функцій.

Функція	Команда Maple
sin x	sin(x)
cos x	cos(x)
tg x	tan(x)
ctg x	cot(x)
sec x	sec(x)
cosec x	csc(x)
arcsin x	arcsin(x)
arccos x	arccos(x)
arctg x	arctan(x)
arcctg x	arccot(x)
e^x	exp(x)
ln x	ln(x)
lg x	log10(x)

$\log_a x$	log[a](x)
|x|	abs(x)
sgn x	signum(x)
$\sqrt{x}$	sqrt(x)
$\sqrt[n]{x}$	surd(x,n)
[x] (ціла частина)	floor(x)

{x} (дробова частина)	frac(x)
sh x	sinh(x)
ch x	cosh(x)
th x	tanh(x)
cth x	coth(x)

Для диференціювання функції за змінною 1, змінною 2 І т.д. використовується **команда diff**(вираз, змінна1, змінна2 , . . .) .

Для спрощення виразів використовують **команду**

simplify(вираз , опція) .

Опцією може бути припущення assume=властивість, яке накладається на невідомі, наприклад, assume=real.

Для розв'язування рівнянь та нерівностей призначена універсальна **команда solve**(рівняння, змінна). Розв'язуючи системи рівнянь, використовують формат

solve({рівняння1, рівняння2, . . . }, {змінна1, змінна2, . . . }).

Команда solve знаходить точні розв'язки рівняння чи системи. Якщо точні розв'язки знайти неможливо, то використовують команду fsolve для відшукання десяткових наближень коренів рівняння. Її формат відрізняється від формату команди solve можливістю задавати в якості третього (необов'язкового) параметра опцію, якою може бути проміжок, що містить шуканий корінь рівняння. Він задається як числовий діапазон у формі a..b. Для алгебричних рівнянь можна використовувати також опцію complex, яка дозволяє знаходити всі комплексні розв'язки рівняння.

Команда dsolve для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь та їх систем.

Команда plot(функція, змінна, діапазон значень, опції) дозволяє побудувати графік функції однієї змінної. Замість змінної може бути рівність вигляду x=a..b, де x – незалежна змінна, a, b – мінімальне і максимальне значення, для яких будується графік. Діапазон значень має вигляд c..d, є необов'язковим аргументом і визначає частину осі ординат, яка відображатиметься на графіку. Команда може мати багато необов'язкових аргументів – опцій, найчастіше з яких використовують такі: color задає колір лінії кривої (наприклад, black, green, blue, red); scaling=constrained означає, що масштаб є однаковим по обидвом осям координат; опція numpoints задає кількість точок, по яким будується графік.

Аналогічна **команда plot3d**(функція, змінна1=діапазон1, змінна2=діапазон2, опції) дозволяє побудувати частину поверхні, що є графіком функції двох змінних.

Не всі команди пакета Maple містяться в основній бібліотеці. Більшість команд, які реалізують спеціальні можливості Maple, знаходяться у додаткових пакетах (бібліотеках). В останніх версіях програми цих пакетів є понад 100. Пакети DEtools і PDEtools містять додаткові команди для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними відповідно. Пакет plots також містить одну команду для графічного відображення розв'язків диференціальних рівнянь. Для використання команди з певного пакета його спочатку треба підключити командою with(пакет) або використовувати лише одну команду пакета за допомогою синтаксису пакет[команда](аргументи).

Розглянемо **команду odeplot** з пакета plots, за допомогою якої можна побудувати інтегральну криву – графік розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.. Формат команди: plots[odeplot](proc, xrange, опції).

Процедура proc для числового розв'язування задачі Коші повинна бути попередньо створеною командою dsolve з опц ією type=numeric. Аргумент xrange задає діапазон зміни незалежної змінної у формі x=xmin..xmax. Опції цієї команди аналогічні до опцій команди plot.

Розглянемо **команду DEplot** з пакета DEtools. За допомогою цієї команди можна наближено зінтегрувати одне звичайне диференціальне рівняння або систему таких рівнянь та зобразити відповідну інтегральну криву чи її проекцію на задану площину. Формат команди:

DEtools[DEplot](deqns, vars, trange, inits, xranges, опції).

Тут deqns – рівняння чи множина рівнянь, vars – шукана функція або їх множина, trange – діапазон зміни незалежної змінної у вигляді t=a..b, де t – ім'я незалежної змінної, a і b – межі діапазону її зміни. Початкові умови задаються параметром-списком inits, елементами якого є списки. Кожен елемент-список визначає інтегральну криву (чи її проекцію) диференціального рівняння або системи, що відображається на графіку. Кількість елементів-списків параметра inits відповідає кількості інтегральних кривих. Параметри xranges (їх може бути стільки, скільки є невідомих функцій у системі) задають діапазони зміни невідомих функцій і використовуються для завершення процесу інтегрування. Вони мають вигляд x(t)=x1..x2.

Параметри xranges не є обов'язковими. Для автономної системи двох диференціальних рівнянь першого порядку або одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно похідної, будується додатково поле напрямів, визначене цією системою чи рівнянням. Для такої системи (рівняння) задавати початкові умови inits необов'язково, але замість них треба вказувати параметри xranges.

Опції задаються у вигляді рівностей. Серед кількох десятків опцій найчастіше використовують такі: linecolor задає колір ліній розв'язків (наприклад, black, green, red); scene задається у вигляді двоелементного списку шуканих функцій чи незалежної змінної і визначає, що виводиться на графіку (scene=[x(t),y(t)] означає, що по горизонтальній осі графіка відображається функція $x(t)$, а по вертикальній – $y(t)$); stepsize задає крок зміни незалежної змінної для відображення точок графіка; scaling=constrained означає, що масштаб є однаковим по обидвом осям координат.

Розглянемо команду PDEplot з пакета PDEtools, яка будує інтегральну поверхню рівняння з частинними похідними першого порядку, що проходить через задану криву. Формат команди:

PDEtools[PDEplot](PDE, inits, srange, опції).

Тут PDE – рівняння з частинними похідними першого порядку відносно невідомої функції n, $n > 1$, змінних. Початкові умови задаються параметром inits у вигляді списку з $n + 1$ елементів, які визначають у параметричній формі криву у (n+1)-вимірному просторі, через яку проходить інтегральна поверхня диференціального рівняння. Елементи повинні бути виразами, які залежать від $n - 1$ параметра. Параметром srange задається список діапазонів або діапазон зміни кожного параметра, який використовується у початкових умовах, у вигляді s=s1..s2, t=t1..t2 і т. д. Зокрема, у випадку двох незалежних змінних список inits повинен містити три вирази, залежні від одного параметра. Майже всі опції є аналогічними до опцій команди DEplot пакета DEtools. Одна з найважливіших додаткових опцій xi=ximin..ximax дозволяє задати діапазон, що обмежуватиме частину поверхні, яку потрібно відобразити. Кількість таких опцій може бути від 0 до $n + 1$. Без цих опцій необмежену поверхню відобразити неможливо. Для кращого відображення поверхні можна використовувати опцію numchar, яка задає кількість точок з початкових умов, через які проходять криві, що формують інтегральну поверхню. За замовчуванням numchar=20 для $n = 2$, що може бути недостатнім для акуратного відображення складної поверхні.

Практична частина.

<u>Приклад №1:</u>

Дані матриці $A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Транспонувати матрицю В та додати матриці $\mathrm{A}^{-1} + \mathrm{B}^{\tau}$

<u>Рішення:</u>

> restart; with(LinearAlgebra);

> print(`Задаємо матриці`); A:=Matrix(2,2,[[1,3],[2,1]]); B:=Matrix(3,2,[[2,1],[-1,0], [1,0]]); C:=Matrix(3,3,[[2,1,0],[-2,-1,0], [3,2,-1]]); E:=IdentityMatrix(3);

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> print(`Вичисляємо матрицу A1, обернену до матриці A`); A1:=MatrixInverse(A);

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

> B1:=Transpose(B); C1:=MatrixMatrixMultiply(A1, B1);

$$B1 := \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ñ1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

> print(`Додаємо матриці C и E`); C2:=MatrixAdd(C,E);

$$C2 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Завдання для самоконтролю

Варіант	Завдання
1	Дані матриці $A, B, C:$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Обрахувати матрицю $D = A \cdot B^T \cdot C^{-1}$;
2	Дані матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $D = A^{-1} \cdot B^T \cdot (C + E)$, де E – одинична матриця;
3	Дані матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C = A^{-1} \cdot B^T \cdot B^{-1}$. Показати, що $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
4	Дані матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю $C = B^{-1} \cdot (B^T - E) \cdot A$.

5	Дані матриці $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\\-2&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\a&b\\0&1\end{pmatrix}$. Знайти загальний вигляд матриці $D=\left(A^{-1}\cdot B^{T}\cdot C\right)^{-1}$.
6	Дані матриці $A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-2\\3&-2\\0&-1\end{pmatrix}$. Знайти, якщо можливо, матрицю $C=\left(A\cdot A^{T}\right)^{-1}+B\cdot B^{T}$.
7	Дані матриці $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\2&1&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\2&-1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$. Знайти матриці: 1) A^{-1} (зробити перевірку); 2) $D=A^{T}\cdot B\cdot\left(2C+E\right)$.
8	Дані матриці A,B,C: $A=\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\-2&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\2&0&0\end{pmatrix}$. Знайти матрицю $D=A\cdot B^{T}\cdot C^{-1}$;
	Дані матриці $A=\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\\3&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&0\\-2&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$. Знайти матрицю $D=A^{-1}\cdot B^{T}\cdot\left(C-2E\right)$;

Завдання №4 Функція рішення диференційних рівнянь $dsolve$ та приклади її застосування

Мета: Ознайомити учнів з функцією для рішення простих диференційних рівнянь або системи диференційних рівнянь (задача Коші), $dsolve$, розкрити та охарактеризувати різні форми її запису, познайомитися з різними рівнями рішення диференційних рівнянь, а також на прикладах закріпити отримані знання.

Тип роботи:

Вивчення та закріплення нового матеріалу.

Структура роботи:

IX. Організаційний момент.

X. Вивчення нового матеріалу.

  a. Функція рішення диференційних рівнянь $dsolve$.

  b. Рівні рішення диференційних рівнянь.

  c. Приклади рішення диференційних рівнянь.

XI. Підсумки роботи.

<u>Хід роботи</u>

VII. Організаційний момент.

VIII. Вивчення нового матеріалу.

Maple дозволяє вирішувати поодинокі диференціальні рівняння і системи диференціальних рівнянь як аналітично, так і в чисельному вигляді. Розробником системи оголошено про суттєве розширення засобів вирішення диференціальних рівнянь і про підвищення їх надійності в сенсі находження рішень для більшості класів диференціальних рівнянь.

Теоретична частина.

1. Функція розв'язання диференційних рівнянь $dsolve$.

Для вирішення системи простих диференціальних рівнянь (задача Коші) використовується функція $dsolve$ в різних формах запису:

$$dsolve(ODE)$$
$$dsolve(ODE, y(x), extra\_args)$$
$$dsolve(\{ODE, ICs\}, y(x), extra\_args)$$
$$dsolve(\{sysODE, ICs\}, \{funcs\}, extra\_args)$$

Тут ODE - одне звичайне диференціальне рівняння або система з диференціальних рівнянь першого порядку з зазначенням початкових умов, $y(x)$ - функція однієї змінної, ICs - вираз, що задає початкові умови, $\{sysODE\}$ - безліч диференціальних рівнянь, $\{funcs\}$ - множина невизначених функцій, $extra\_args$ - опція, що задає тип рішення.

Параметр $extra\_args$ задає клас розв'язуваних рівнянь. Відзначимо основні значення цього параметра:

- $exact$ - аналітичне рішення (прийнято за замовчуванням);
- $explisit$ - рішення в явному вигляді;
- $system$ - рішення системи диференціальних рівнянь;
- ICs - рішення системи диференціальних рівнянь з заданими початковим умовами;
- $formal\ series$ - рішення в формі статечного многочлена;
- $integral\ transform$ - рішення на основі інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є та ін .;
- $series$ - рішення у вигляді ряду з порядком, вказаним значенням змінної $Order$;
- $numeric$ - рішення в чисельному вигляді.

Можливі й інші опції, докладний опис можна знайти в довідці по цій функції, за допомогою команди $?dsolve$.

Для вирішення завдання Коші в параметри $dsolve$ треба включати початкові умови, а при вирішенні крайових задач - крайові умови. Якщо Maple здатна знайти рішення при числі початкових або крайових умов менше порядку системи, то в рішенні будуть з'являтися невизначені константи виду $\_C1, \_C2$ і т. д. Вони ж можуть бути при аналітичному рішенні системи, коли початкові умови не задані. Якщо рішення знайдено в неявному вигляді, то в ньому з'явиться параметр _T. За замовчуванням функція $dsolve$ автоматично вибирає найбільш підходящий метод розв'язання диференціальних рівнянь. Однак в параметрах функції $dsolve$ в квадратних дужках можна вказати бажаний метод рішення диференціальних рівнянь. Можливі наступні методи:

> `dsolve/methods`[1];

$$[quadrature, linear, Bernoulli, separable, inverse\_linear, homogeneous, Chini, lin\_sym, exact, Abel, pot\_sym]$$

Більш повну інформацію про кожен метод можна отримати, використовуючи команду $?dsolve, method$ і вказавши в ній конкретний метод. Наприклад, команда $?dsolve, linear$ викличе появу сторінки довідкової системи з докладним описом лінійного методу розв'язання диференціальних рівнянь.

Практична частина

2. Рівні рішення диференційних рівнянь.

Рішення диференціальних рівнянь може супроводжуватися різними коментарями, команда

$$infolevel[dsolve] := n:$$

де n - ціле число від 0 до 5 управляє рівнями детальності виведення. По замовченню задано $n = 0$. Значення $n = 5$ дає максимально детальний висновок.

Похідні при запису диференціальних рівнянь можуть задаватися функцією $diff$ або оператором диференціювання D. Вираз $sysODE$ повинен мати структуру множини і містити крім самої системи рівнянь їх початкові умови.

3. Приклади рішення диференційних рівнянь.

Рішення звичайного диференціального рівняння (ЗДР) Визначення простого ЗДР. Для визначення похідної, використовуйте команду $diff$.

> $ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2\,y(x) + 1$

$$ode := \frac{d^2}{dx^2} y(x) = 2\,y(x) + 1$$

Рішення ЗДР, ode.

> $dsolve(ode)$

$$y(x) = e^{\sqrt{2}\,x}\,\_C2 + e^{-\sqrt{2}\,x}\,\_C1 - \frac{1}{2}$$

Визначення початкових умов.

> $ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0$

$$ics := y(0) = 1, D(y)(0) = 0$$

Вирішення ode при початкових умовах ics.

> $dsolve(\{ode, ics\})$

$$y(x) = \frac{3}{4}\,e^{\sqrt{2}\,x} + \frac{3}{4}\,e^{-\sqrt{2}\,x} - \frac{1}{2}$$

Метод перетворення Лапласа

Обчислити рішення з використанням методу Лапласа перетворення.

> $sol := dsolve(\{ode, ics\}, y(x), method = laplace)$

$$sol := y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cosh(\sqrt{2}\,x)$$

Перевірте, чи задовольняє рішення **ЗДР** початкові умови (див odetest).

> $odetest(sol, [ode, ics])$

$$[0, 0, 0]$$

Обчислення рішення серії

Знайти рішення серії для однієї і тієї ж задачі.

> $series\_sol := dsolve(\{ode, ics\}, y(x), series)$

$$series\_sol := y(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + O(x^6)$$

> $odetest(series\_sol, [ode, ics], series)$

$[0, 0, 0]$

IX. Підсумки роботи.

Маючи слабке уявлення про диференційні рівняння загалом та не маючи жодного уявлення про систему Maple, яка містить в собі потужний математичний апарат для рішення великого спектру задач, сьогодні на уроці ми:

- отримали базове поняття про функцію, що допомагає вирішувати диференційні рівняння;
- ознайомилися з її основними параметрами, для вирішення різного роду ДР;
- вивчили різні рівні отримання точного рішення ДР;

розглянули різні приклади використання функції, а також вирішили декілька ДР самостійно та закріпили на практиці отриманні знання

Заняття №5 Рішення диференціальних рівнянь в частинних похідних

Мета: Ознайомити учнів з функцією для рішення простих диференційних рівнянь в частинних похідних, $pdsolve$, розкрити та охарактеризувати різні форми її запису, познайомитися з інструментальним пакетом розширення $PDEtool$, для візуалізації рішення, а також на прикладах закріпити отримані знання.

Тип роботи:

Вивчення та закріплення нового матеріалу.

Структура роботи:

XII. Організаційний момент.

XIII. Вивчення нового матеріалу.

  a. Функція $pdsolve$.
  b. Інструментальний пакет розширення $PDEtool$
  c. Приклади рішення диференційних рівнянь в частинних похідних.

XIV. Підсумки роботи.

<u>Хід роботи</u>

X. Організаційний момент.

XI. Вивчення нового матеріалу.

Теоретична частина.

1. **Функція $pdsolve$.**

В Maple є функція $pdsolve$ для рішення диференціальних рівнянь в частинних похідних. Вона може використовуватися в наступних формах запису:

$$pdsolve(PDE, f, HINT, INTEGRATE, build)$$

$$pdsolve(PDE\_system, func, HINT, other\_option)$$

$$pdsolve(PDE\_system, conds, numeric, other\_option)$$

$$pdsolve(PDE\_system, conds, type = numeric, other\_option)$$

Ця функція введена замість застарілої функції $pdesolve$. В функції $pdsolve$ використовуються наступні параметри:

- PDE - одиночне диференціальне рівняння з частинними похідними;
- PDE_system - система диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- $conds$ - початкові або граничні умови;
- f - невизначена функція або ім'я;
- $func$ - (опція) множина або список з невизначеними функціями або іменами;
- $HINT$ - (опція) рівність в формі $HINT = argument$, де аргумент може бути символом +,∗ , будь-яким алгебраїчним виразом або рядком $'strip'$;
- $INTEGRATE$ - (опція) задає автоматичне інтегрування для множини $ODEs$ (якщо PDE вирішується при поділі змінних;
- $build$ - опція, що задає спробу побудови явного вираження для неоп-ределенной функції, незалежно від спільності знайденого рішення;
- $numeric$ c - ключове слова, задає рішення в чисельному вигляді;
- $other\_option$ - інші опції.

2. Інструментальний пакет розширення $PDEtool$

Для вирішення диференціальних рівнянь в частинних похідних і їх візуалізації в Maple служить спеціальний інструментальний пакет $PDEtool$:

```
> with(PDEtools);
```

[*CanonicalCoordinates* , *ChangeSymmetry*, *CharacteristicQ*, *CharacteristicQInvariants* , *ConservedCurrentTest* , *ConservedCurrents* , *ConsistencyTest*, *D_Dx*, *DeterminingPDE*, *Eta_k*, *Euler*, *FromJet*, *InfinitesimalGenerator* , *Infinitesimals*, *IntegratingFactorTest* , *IntegratingFactors* , *InvariantSolutions* , *InvariantTransformation* , *Invariants*, *Laplace*, *Library*, *PDEplot*, *PolynomialSolutions* , *ReducedForm*, *SimilaritySolutions*, *SimilarityTransformation*, *SymmetrySolutions*, *SymmetryTest*, *SymmetryTransformation*, *TWSolutions*, *ToJet*, *build*, *casesplit*, *charstrip*, *dchange* , *dcoeffs* , *declare*, *diff_table* , *difforder* , *dpolyform*, *dsubs*, *mapde*, *separability*, *splitstrip*, *splitsys*, *undeclare*]

Наведемо визначення основних функцій його пакету:

- $build(sol)$ - конструює поліпшену форму рішення, отриманого функцією $pdsolve$;
- $casesplit(sys, 01,02, \dots)$ - перетворює форму диференціального рівняння;
- $charstrip(PDE, f)$ - знаходить характеристичну послідовність, що дає диференціальне рівняння першого порядку;
- $dchange(tr, expr, 01,02)$ - виконує заміну змінних в математичних виразах або функціях;
- $dcoefff(expr, y(x))$ - повертає коефіцієнти поліноміала диференціального рівняння;
- $declare(expr)$ і ін. - задає функцію для компактного її відображення;
- $difforder(a, x)$ - повертає порядок диференціала в алгебраїчному виразі a;
- $dpoluform(sys, no\_Fn, opts)$ - повертає поліноміальних форму для заданої системи sys не поліноміальних диференціальних рівнянь;
- $dsubs(deriv1 = a, \dots, expr)$ - виконує диференціальні підстановки в вираз $expr$;
- $mapde(PDE, info, f)$ - створює карту PDE в різних форматах $info$ з опціональним завданням імені невідомої функції f;

- $separability(PDE, F(x, y, \dots),'*')$ - визначає умови поділу для сум або множення PDE;
- $splitstrip(PDE, f)$ - розділяє характеристичну послідовність на несполучені ні піднабори;
- $splitsys(sys, func)$ - розділяє набори рівнянь (алгебраїчні і диференціальні) на несполучені піднабори;
- $undeclare(f(x), \dots)$ і ін. - скасовує завдання функції для компактного її відображення.

Практична частина.

3. Приклади рішення диференційних рівнянь в частинних похідних.

Приклад 1.

> $restart : with(PDEtools) :$

> $PDE := x \cdot diff(f(x,y), y) - diff(f(x,y), x) = \frac{f(x,y)^2 \cdot g(x)}{h(y)};$

$$PDE := x \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right) = \frac{f(x,y)^2 g(x)}{h(y)}$$

> $ans := pdsolve(PDE);$

$$ans := f(x,y) = \frac{1}{\int^{x} \frac{g(\_a)}{h\left(-\frac{1}{2}\_a^2 + \frac{1}{2}x^2 + y\right)} d\_a + \_F1\left(\frac{1}{2}x^2 + y\right)}$$

Приклад 2.

> $restart :$

> $PDE := S(x,y) \cdot diff(S(x,y), y, x) + diff(S(x,y), x) \cdot diff(S(x,y), y)$
> $= 1;$

$$PDE := S(x,y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} S(x,y) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} S(x,y) \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} S(x,y) \right) = 1$$

> $struc := pdsolve(PDE, HINT = f(x) \cdot g(y));$

$$struc := (S(x,y) = f(x)\,g(y))\ \&\text{where}\ \left[\left\{\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\_c_1}{f(x)}, \frac{d}{dy} g(y) = \frac{1}{2\,g(y)\,\_c_1}\right\}\right]$$

> *PDEtools[build](struc);*

$$S(x,y) = \frac{\sqrt{2\,\_c_1\,x + \_C1}\,\sqrt{\_c_1\,y + \_C2\,\_c_1^2}}{\_c_1}$$

> *pdsolve$\left(PDE, HINT = P(x,y)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$;*

$$S(x,y) = \sqrt{\_F2(x) + \_F1(y) + 2\,x\,y}$$

Приклад 3.

> *restart :*

> *PDE := diff(f(x,y,z),x) + diff(f(x,y,z),y)^2 = f(x,y,z) + z;*

$$PDE := \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\right)^2 = f(x,y,z) + z$$

> *pdsolve(PDE, HINT = strip);*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) + \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\right)^2 - f(x,y,z) - z = 0\right)\ \&\text{where}\ \left[\left\{\left\{f(\_s) = \_C4\,e^{\_s} - \_C5 + e^{2\,\_s}\,\_C1, x(\_s) = \_s + \_C6, y(\_s) = 2\,\_C3\,e^{\_s} + \_C2, z(\_s) = \_C5, \_p_1(\_s) = \_C4\,e^{\_s}, \_p_2(\_s) = \_C3\,e^{\_s}\right\}\right\}, \left\{\_p_1 = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z), \_p_2 = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\right\}\right]$$

>

```
myPDEsystem := [-y·diff(f(x,y,z,t),x) + z^2·diff(f(x,y,z,t),z)
    + 3·t·z·diff(f(x,y,z,t),t) - 3·t^2 - 4·f(x,y,z,t)·z = 0,  -y
    ·diff(f(x,y,z,t),y) - z·diff(f(x,y,z,t),z) - t·diff(f(x,y,z,
    t),t) + f(x,y,z,t) = 0,  -x·diff(f(x,y,z,t),y) - diff(f(x,y,
    z,t),z) = 0] :
 for eq in myPDEsystem do
     eq;
 od;
```

$$-y\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z,t)\right) + z^2\left(\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z,t)\right) + 3\,t\,z\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,y,z,t)\right) - 3\,t^2 - 4\,f(x,y,z,t)\,z = 0$$

$$-y\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z,t)\right)-z\left(\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z,t)\right)-t\left(\frac{\partial}{\partial t}f(x,y,z,t)\right)+f(x,y,z,t)=0$$

$$-x\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z,t)\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z,t)\right)=0$$

$> sol := pdsolve(myPDEsystem);$

$$sol := \left\{f(x,y,z,t)=\frac{3\,t^2\,x}{x\,z-y}+\frac{t^{3/2}\,\_C1}{\sqrt{x\,z-y}}\right\}$$

Підсумки роботи.

Маючи уявлення про диференційні рівняння та методи їх рішення за допомогою системи Maple, зокрема функцію *dsolve* , що допомагає вирішувати звичайні диференційні рівняння та системи таких рівнянь, сьогодні на уроці ми:

- Отримали нові базові знання про функцію *pdsolve*, що допомагає вирішувати диференційні рівняння в частинних похідних;
- ознайомилися з її основними параметрами, для вирішення різного роду ДР та інструментальним пакетом *PDEtool* ,який розширює основні можливості;
- розглянули різні приклади використання функції, а також вирішили декілька ДР самостійно та закріпили на практиці отриманні знання.

Заняття №6 Тривимірна графіка в Maple

Мета: Ознайомитися з основами роботи з тривимірною графікою в Maple

Хід заняття

1. Функція plot3d
2. Параметри функції plot3d
3. Побудова поверхонь з різними стилями
4. Побудова фігур в різних системах координат
5. Графіки параметрически заданих поверхонь
6. Масштабування тривимірних фігур і зміна кутів їх огляду

Теоретична частина

1. Функція plot3d

Тривимірними графіками називають графіки, що відображають функції двох змінних $z(x, y)$. Кожна точка z, таких графіків є висотою (аплікатою) точки, що лежить в площині XY і представленої координатами (x_i, y_i). Оскільки екран монітора комп'ютера в першому наближенні є плоским, то на ділі тривимірні графіки представляють собою спеціальні проекції об'ємних об'єктів.

Для побудови графіків тривимірних поверхонь **Maple** має вбудовану в ядро функцію **plot3d**. Вона може використовуватися в наступних форматах:

- plot3d (expr1, x = a..b, y = c..d, p)
- plot3d (f, a..b, c..d, p)
- plot3d ([exprf, exprg, exprh], s = a..b, t = c..d, p)
- plot3d ([f, g, h], a..b, c..d, p)

У двох перших формах **plot3d** застосовується для побудови звичайного графіка однієї поверхні, в інших формах - для побудови графіка з параметричної формою завдання поверхні. У наведених формах записи *f*, *g* і *h* - функції; *expr1* - вираз, що відображає залежність від *x* і *y*; *exprf*, *exprg* і *exprh*

- вираження, що задають поверхню параметрично; *s, t, a* й *b* - числові константи дійсного типу; *c* і *d* - числові константи або вирази дійсного типу; *x, y, s* і *t* - імена незалежних змінних; *p* - керуючі параметри.

2. Параметри функції plot3d

За допомогою параметрів *p* можна в широких межах управляти видом тривимірних графіків, виводячи або прибираючи лінії каркасною сітки, вводячи функціональне забарвлення поверхонь, змінюючи кут їх огляду і параметри освітлення, змінюючи вид координатних осей і т.д. Наступні параметри функції plot3d задаються аналогічно їх завданням для функції plot:

axesfont font color coords font labelfcnt linestyle

numpoints scaling style symbol thickness title titlefont

Однак функція plot3d має ряд додаткових специфічних параметрів:

- *ambientlight = [r, g, b]* - задає інтенсивність червоного (r), зеленого (g) і синього (b) кольорів підсвічування в відносних одиницях (від 0 до 1);
- *axes = f* - задає вигляд координатних осей (BOXED, NORMAL, FRAME і NONE, за замовчуванням NONE);
- *grid = [m, n]* - задає число ліній каркаса поверхні;
- *gridstyle = x* - задає стиль ліній каркаса x ('rectangular' або 'triangular');
- *labels = [x, y, z]* - задає написи по осях (X, Y і z - рядки, за замовчуванням порожні);
- *light = [phi, theta, r, g, b]* - задає кути, під якими розташований джерело освітлення поверхні, і інтенсивності складових кольору (r, g і b);
- *lightmodel = x* - задає схему освітлення (відповідно 'none', 'light1', 'light2', 'light3' і 'light4');
- *orientation = [theta, phi]* - задає кути орієнтації поверхні (за замовчуванням 45 °);
- *projections* - задає перспективу при огляді поверхні (r може бути числом 0 або 1, що задає включення або виключення перспективи, а також однією з рядків 'FISHEYE', 'NORMAL' або 'ORTHOGONAL' (це

відповідає чисельним значенням r, рівним 0, 0 , 5, або 1, причому за замовчуванням задано projection = ORTHOGONAL);

- *shading = s* - задає напрямки, за якими змінюється колір функціональної забарвлення (значення s можуть бути XYZ, XY, Z, ZGREYSCALE, ZHUE, NONE);
- *tickmarks = [l, n, m]* - задає характер маркування по осях x, y і z (числа l, n і m мають значення не менше 1);
- *view = zmin..zmax* або *view = [xmin..xmax, ymin, ymax, zmin..zmax]* - задає мінімальні і максимальні координати поверхні для її видимих ділянок.

Для тривимірних графіків можливе завдання безлічі типів координатних систем за допомогою параметра *coords = Тип_координатной_сістеми*. Оскільки на екрані монітора поверхню відображається тільки в прямокутній системі координат і характеризується координатами *x, y* і *z*, то для представлення поверхні, заданої в іншій системі координат з координатами *u*, *v* і *w*, використовуються відомі формули для перетворення *(u, v, w)* -> *(x, y, z)*. Їх можна знайти в довідці. Вид графіків тривимірних поверхонь дуже сильно розрізняється в різних координатних системах. За замовчуванням тривимірні графіки будуються в прямокутній системі координат - *rectangular*.

Практична частина

3. Побудова поверхонь з різними стилями

На рис. 1 показано два приклади найпростіших побудов графіків тривимірної поверхні. За замовчуванням в Maple будується поверхню з функціональної забарвленням і стилем style = patch (верхній малюнок). Функціональне забарвлення робить малюнки більш інформативними, але, на жаль, на малюнках в книзі вона перетворюється в забарвлення відтінками сірого кольору. На рис. 2 показано також контекстне меню правої кнопки миші, що показує можливе команди, що впливають на вигляд тривимірних графіків.

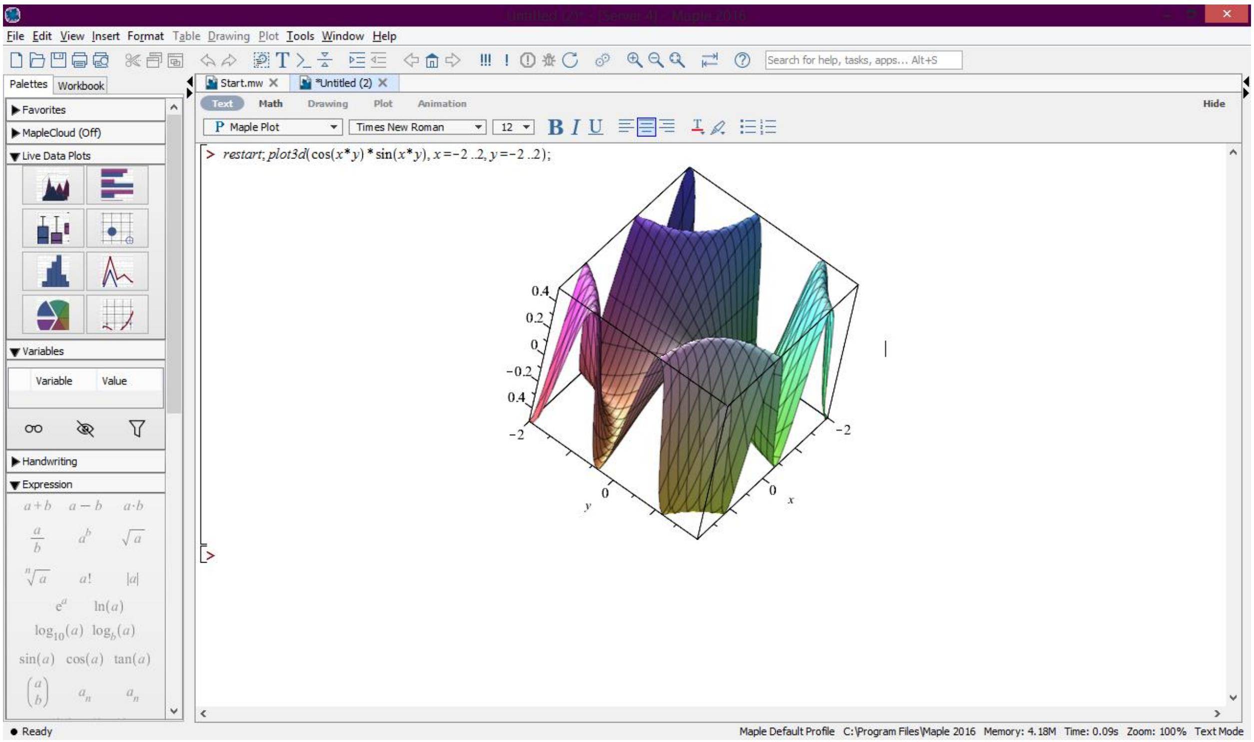


Рис. 1. Побудова простого графіка тривимірної поверхні

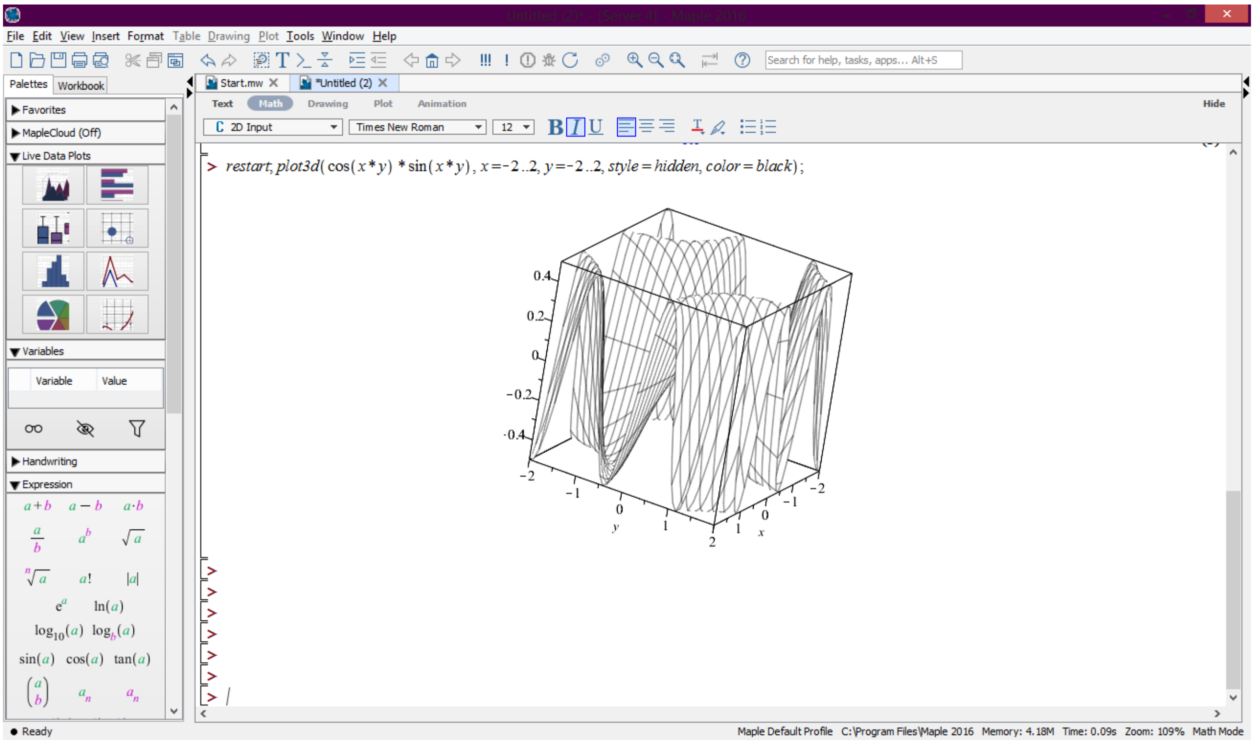


Рис. 2. Контекстне меню та стиль hidden

Параметр style = hidden будує каркасну поверхню з функціональним забарвленням тонких ліній каркаса і видаленням невидимих ліній. Щоб графік виглядав більш чітким, побудову в другому прикладі задано лініями чорного кольору з допомогою параметра *color* = *black* (див. рис. 2).

Крім значення *patch* для побудови тривимірних поверхонь можна задавати ряд інших стилів: *point* - крапками, *contour* - контурними лініями, *line* - лініями, *hidden* - лініями каркаса з видаленням невидимих ліній, *wireframe* - лініями каркаса з усіма видимими лініями, *patchnogrid* - з розфарбуванням, але без ліній каркаса, *patchcontour* - розфарбування з лініями рівного рівня.

Колір тривимірного графіка може задаватися (як і для двовимірного) параметром *color* = *c*, де *c* - колір. Можливо ще два алгоритму завдання кольору:

- HUE - алгоритм із завданням кольору у вигляді *color = f (x, y);*
- RGB - алгоритм із завданням кольору у вигляді *color = [exprr, exprg, exprb],* де вираження *exprr, exprg* і *exprb* задають відносну значимість (від 0 до 1) основних кольорів (червоного - *exprr*, зеленого - *exprg* і синього - *exprb*).

Вдалий вибір кутів огляду фігури і застосування функціональної забарвлення дозволяють додати побудовам тривимірних фігур дуже ефектний і реалістичний вигляд.

4. Побудова фігур в різних системах координат

Вид графіка тривимірної поверхні істотно залежить від вибору координатної системи. Рис. 3 показує приклад побудови нелінійного конуса в циліндричної системі координат. Для завдання такої системи координат використовується параметр *coords = cylindrical.*

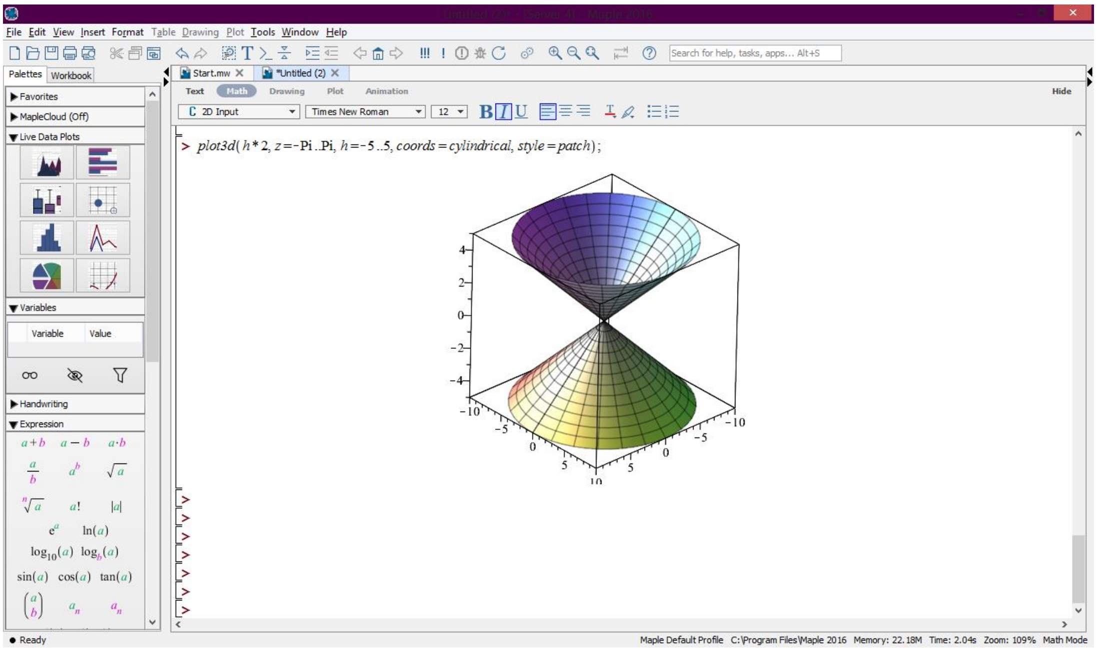


Рис. 3. Нелінійний конус в циліндричній системі координат

При побудові цієї фігури також використана кольорова функціональна забарвлення.

Наведемо ще один приклад побудови тривимірної поверхні - на цей раз в сферичної системі координат (рис. 4). Тут функція задана взагалі елементарно просто - у вигляді числа 1. Але, оскільки вибрана сферична система координат, в результаті будується поверхню кулі одиничного радіуса. Зверніть увагу на можливість побудови лише частини сфери за рахунок обмеження зміни змінних координатної системи.

> plot3d(1, t=Pi/3..2*Pi, p=0..Pi, coords=spherical);

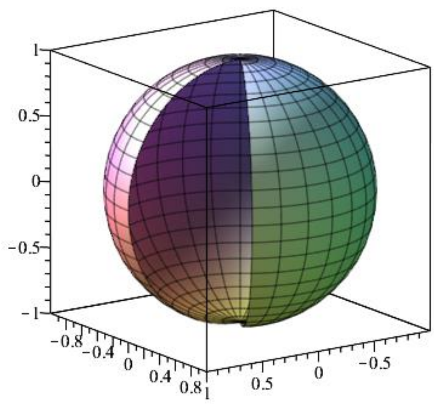


Рис. 4. Сферична тривимірна поверхня

5. Графіки параметрически заданих поверхонь

На рис. 5 показано побудову простого тороіда - циліндра, згорнутого в кільце. Тут також використаний прийом видалення частини фігури, що робить її подання більш наочним і барвистим. Крім того, введені параметри, що задають функціональне забарвлення.

Рис. 4. дає повне і наочне уявлення про цю фігуру - причому не тільки зовні, але і зсередини.

```
> plot3d( [30 + (7 + 2*cos(z)) *cos(t), 10 + (7 + 2*cos(z)) *sin(t), 2*sin(z) ], z=0..2*Pi, t=0..11*Pi/6, grid=[12, 24], style=patch,
    scaling=constrained);
```

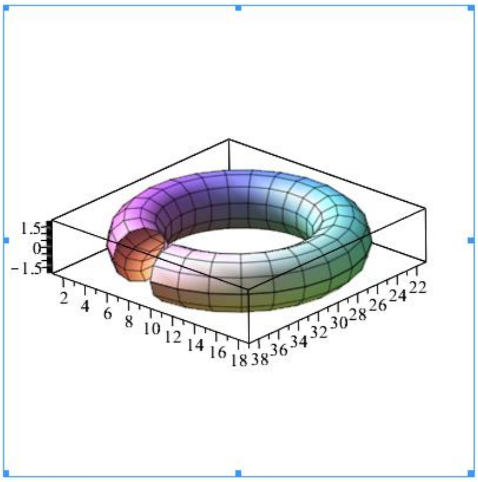


Рис. 4. Тороід

6. Масштабування тривимірних фігур та зміна кутів огляду

Корисно звернути увагу на параметр масштабу *scaling = constrained*, явно введену в документ рис. 4. Його можна було б і не вводити, оскільки цей параметр спочатку задається за замовчуванням. Він вирівнює масштаби уявлення фігури по осях координат, зазвичай використовується за умовчанням і дозволяє знизити до мінімуму геометричні спотворення фігур.

Завдання параметра *scaling = unconstrained* означає відмову від рівного масштабу по осях. Графік при цьому збільшується в розмірах, але стають помітні його спотворення по осях координат.

Дуже важливим є врахування кутів, під якими спостерігається тривимірна поверхня або об'єкт. Найпростіший і дуже зручний спосіб змінити кут огляду полягає в обертанні фігури на малюнку мишею, утримуючи ліву кнопку. При цьому можна повернути фігуру так, що її геометричні особливості будуть чітко видні.

У **Maple** є спосіб явно задати кути огляду за допомогою параметра *orientation = [theta, phi]*, де *theta* і *phi* - кути, через які задаються параметричні рівняння тривимірної фігури або поверхні. Рис. 5 дає приклад такого завдання фігури, яку можна назвати «квадратним» тором.

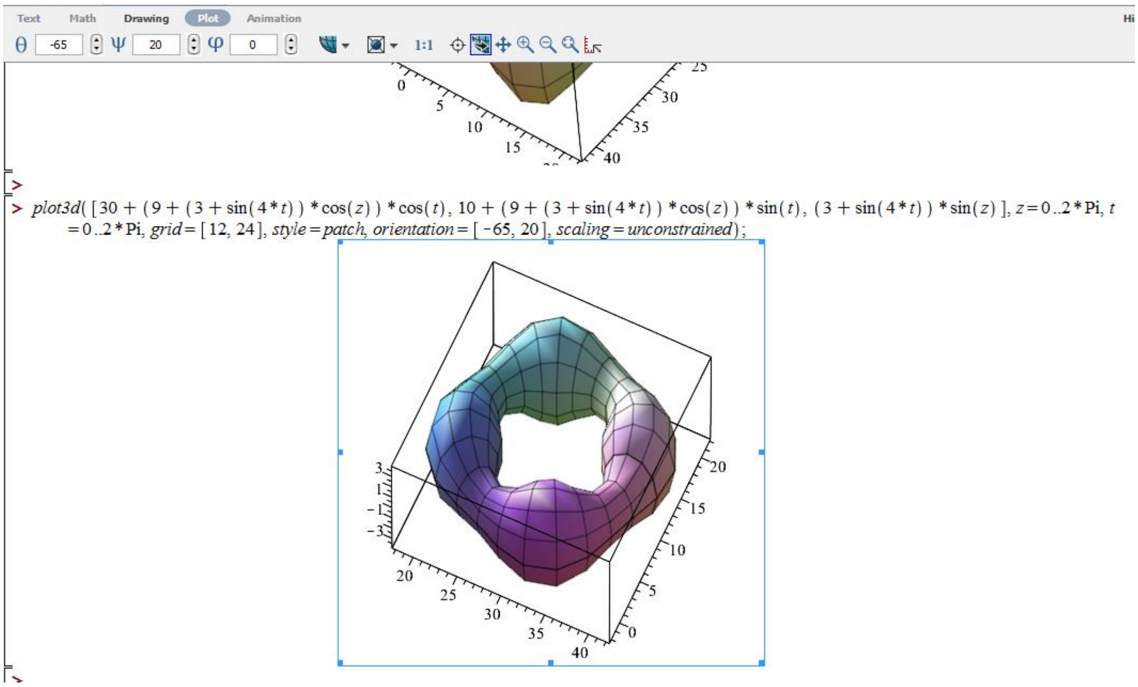


Рис. 5. Квадратний тор

Зверніть увагу, що значення заданих кутів огляду повторюються в полях кутів на контекстній панелі інструментів. Зрозуміло, останні будуть змінюватися, якщо почати обертати фігуру на малюнку мишею.

Висновок:

Середовище Maple надає широкі можливості для роботи з різними видами графіки, як двовимірної, так і тривимірної, ми розглянули деякі основні можливості, які можна використати при побудові поверхонь для відображення їх суті і правильного висвітлення особливостей.