Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

9 клас.

I рівень

1.

Побудувати графік функції $y=\frac{x^2-10x+25}{x-5}-\frac{2x-x^2}{x}$

▼***Розв'язання:***

Область визначення функції: $x\epsilon(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)$.

Перетворимо праву частину рівняння:

$$\frac{(x-5)^2}{x-5}-\frac{x(2-x)}{x}=x-5-2+x=2x-7$$

маємо y=2x-7

▼***<u>Відповідь</u>*****:** y=2x-7, $x\epsilon(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;+\infty)=R\setminus\{0;5\}$

2.

Вкладник поклав до банку 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 2%. У кінці другого року на рахунку було 11880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

▼***Розв'язання:***

$$10000+\frac{10000x}{100}+\left(\frac{10000+10x}{100}(x+2)\right)=11880\Rightarrow$$

$$x^2+202x+200=1880\Rightarrow$$

$$x^2+202x-1680=0,\ \sqrt{D}=\sqrt{47524}\Rightarrow D=218,$$

$$x=8;x=-210$$

▼***<u>Відповідь</u>*****:** 8%

3.

Розв'язати нерівність:

$$\frac{x^2-7x+12}{(x-2)^2}\geq 0$$

Розв'язання:

$$\begin{cases}(x^2-7x+12)(x-2)^2 \geq 0\\ (x-2)^2 \neq 0\end{cases} \quad \begin{cases}x^2-7x+12 \geq 0\\ x \neq 2\end{cases} \quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x \geq 4\\ x \leq 3\end{array}\right.\\ x \neq 2\end{cases}$$

▼ ***Відповідь:*** $x \epsilon (-\infty;2) \cup (2;3] \cup [4;+\infty)$.

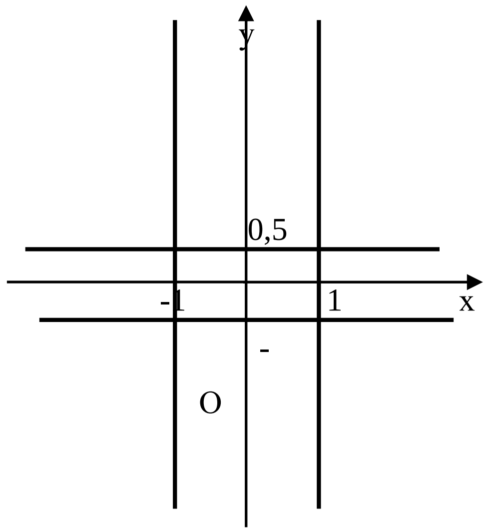
II рівень

1.

Зобразити на координатній площині множину розв'язків рівняння
$2|xy| + 1 = |x| + 2|y|$.

▼ ***Розв'язок:***

За властивістю модуля: $|xy| = |x| \cdot |y|$.



$2|xy| + 1 = |x| + 2|y|$:

$2|x||y| + 1 - |x| - 2|y| = 0$

$|x|(2|y| - 1) - (2|y| - 1) = 0$

$(2|y| - 1)(|x| - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}2|y|-1=0,\\ |x|-1=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2|y|=1,\\ |x|=1.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}y=0{,}5\\ y=-0{,}5\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right.$$

Зобразимо на координатній площині множину точок, координати яких є розв'язками рівняння

▼ ***Відповідь:*** $\left[\begin{array}{l}y=0{,}5\\ y=-0{,}5\\ x=1\\ x=-1\end{array}\right.$

2. Знайдіть всі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} = 2018 - 2a$.

▼ ***Розв'язок:***

$\overline{abcd}$ = 1000a + 100b + 10c + d, де a – одноцифрове число від 1 до 9, b, c, d – одноцифрові числа від 0 до 9

$\overline{abc}$ = 100a + 10b + c
$\overline{ab}$ = 10a + b
Тобто, $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab}$ = 1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b =
= 1110a + 111b + 11c + d
Маємо рівняння
1110a + 111b + 11c + d = 2018 – a
1111a + 111b + 11c + d = 2018
За умовою a$\neq$0
Тепер методом підбору розв'яжемо рівняння:

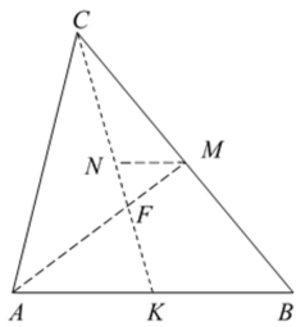
1) a не може дорівнювати 2 або бути більшим за 2, бо тоді 1111$\cdot$ 2+ 111b + 11c + d = 2222 + 111b + 11c + d $>$ 2018, отже, a = 1
2) b не може бути 7 або 9,
   якщо b = 7, то 1111 + 111$\cdot$ 7 + 11c + d $<$ 2018
   якщо b = 9, то 1111 + 111 $\cdot$ 9 + 11c + d $>$ 2018
   отже, b = 8.
3) c не може бути 0 або більшим за 2,
   якщо c = 0, то 1111 + 888 + 11 $\cdot$ 0 + d $<$ 2018
   якщо c = 2, то 1111 + 888 + 11 $\cdot$ 2 + d $>$ 2018
   отже, c = 1
4) d не може бути меншим за 6 або більшим за 8,
   якщо d = 6, то 1111 + 888 + 11 + 1 $\cdot$ 6 $<$ 2018
   якщо d = 8, то 1111 + 888 + 11 + 1 $\cdot$ 8 $>$ 2018
   отже, d = 7

Чотирьох цифровим числом, для якого виконується рівність – 1817
$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab}$ = 2018 – a
1817+181+18=2018-2=2016
▼***Відповідь:*** 1817

III рівень

1 .

На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.



▼***Розв'язок:***
Проведемо MN – середню лінію ΔBCK. Тоді

$\angle AKF = \angle AFK = \angle NFM = \angle FNM$,

тому ΔFMN – рівнобедрений.
Звідси $FM = MN = \frac{1}{2} BK$.
▼***Відповідь:*** $MF : BK = 1 : 2$.

2.

Довести, що якщо p - просте число ($p > 2$), то чисельник дробу, що дорівнює сумі S=$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$ ділиться на p .

▼ ***Розв'язання:***

Знайдемо суми $1+\frac{1}{p-1}=\frac{p+1-1}{p-1}=\frac{p}{p-1}$,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}=\frac{p}{2(p-2)}, \ldots.$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}=\frac{p}{3(p-3)}$$

$\ldots S=\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2(p-2)}+\cdots=p(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2(p-2)}+\cdots) \vdots p$, так як знаменник після додавання дробів становитиме $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(p-1)=(p-1)!$, що є взаємно простим з р, тому р з чисельника дробу скоротити неможливо.
Відповідь: твердження доведено.

Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1.

Скільки кілограмів 20-відсоткового і скільки кілограмів 50-відсоткового сплавів міді треба взяти, щоб отримати 30 кг 30-відсоткового сплаву?

▼ **Відповідь:** 20кг, 10кг

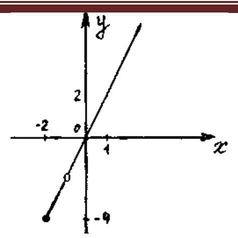
2.

Знайдіть найменше значення виразу $\frac{x^4-15x^2+9}{x^2}$, якщо $x > 0, y > 0$.

3.

Побудуйте графік функції $y=\frac{x^2-x-2}{x+1}+\left(\sqrt{x+2}\right)^2$.

.▼ ***Розв'язок:***



▼***Відповідь:***

II рівень

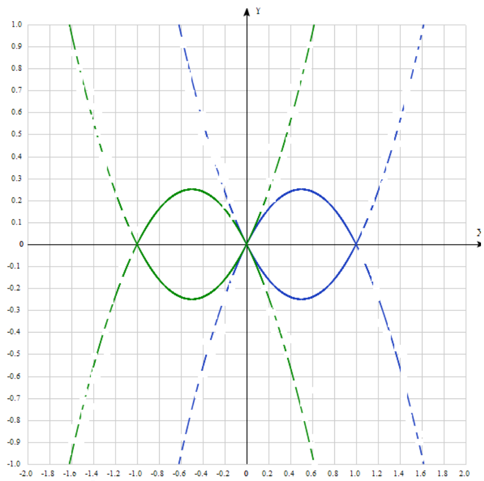
1.

На координатній площині Oxy схематично зобразити множину точок, для координат $(x;y)$ яких справджується рівність $|y|+x^2=\sqrt{|x|-|y|}$.

▼***Розв'язок:***

Шукана множина симетрична відносно обох осей координат, бо рівність не змінюється при заміні x на $-x$ чи y на $-y$, тому достатньо зобразити її у першій чверті, а потім скористатися симетрією. Матимемо $y+x^2=\sqrt{x-y}$. Зазначене рівносильне системі

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ y^2+(2x^2+1)y+x^4-x=0 \end{cases}.$$



Розв'язуючи квадратне рівняння, дістанемо $y=x-x^2$ або $y=-x^2-x-1$. Другий випадок суперечить нерівностям $x\ge 0, y\ge 0$, тому вийде, що $y=x-x^2$, де $0\le x\le 1$ – дуга параболи, що знаходиться у першій чверті. Остаточну відповідь дістанемо із симетрії (вийде крива, схожа на ∞).

2.

2. На стороні AB трикутника ABC відмітили точку K. Відрізок CK перетинає медіану AM у точці F. Відомо, що $AK = AF$. Знайдіть відношення $MF : BK$.

▼***Розв'язок:***

▼ **Відповідь:**

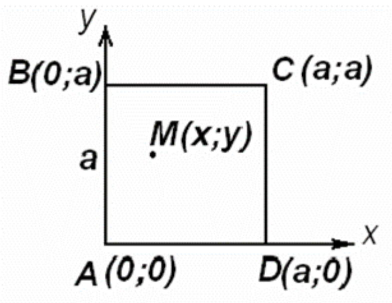
III рівень

1.

В середині квадрата *ABCD* існує така точка *M*, що *MA*=7, *MB*=13, *MC*=17. Знайдіть довжини сторони і діагоналі квадрата.

▼***Розв'язок:*** Нехай *AB* і *AD* – осі координат.
AB=a, M(x;y) . A(0;0), B(0;a), C(a;a). Тоді

$x^2 + y^2 = 49,$



▼ **Відповідь:** $12\sqrt{2}см, \quad 24см.$

2.

Знайти трицифрові числа, що дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

▼***Розв'язок:***

Нехай $\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{abc}} = 100\boldsymbol{a} + 10\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ число, що необхідно знайти. Згідно умови маємо $\overline{\boldsymbol{abc}} = \boldsymbol{a}! + \boldsymbol{b}! + \boldsymbol{c}!$. Проведемо аналіз лівої та правої частини умови.

1) $7! = 5040$, отже число M не перевищує 666 і жодна з цифр не перевищує 5.

2) Одна з цифр дорівнює 5, бо $4! + 4! + 4! = 72$.

3) $\boldsymbol{a} \le 3$, бо $\overline{\boldsymbol{abc}} \le 5! + 5! + 5! = 360$ (неважко показати, що $a = 1$).

Продовжуючи аналіз для $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$, отримаємо, що шукане число $\boldsymbol{M} = 145$.

▼ **Відповідь:** 145

Відділення комп'ютерних наук, економіки та технічних наук

Контрольна робота з математики

11 клас.

1.Рівень.

1.

До розчину, який містив 20 г солі, додали 100 г води, після чого концентрація розчину зменшилася на 10%. Скільки грамів води містив розчин спочатку?

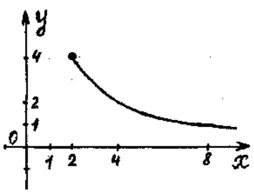
Розв'язання:

Відповідь: 80г

2.

Побудуйте графік функції $y = \frac{\left(\sqrt{x-2}\right)^2}{2-x} + \frac{x+8}{x}$.

▼***Розв'язок:***



▼ **Відповідь:**

3.

При якому значенні параметра a рівняння $\left|\sqrt{|x|}-1\right| = a$ має три корені?

▼***Розв'язок:***

▼ **Відповідь:** $a = 1$

II рівень

1.

При якому найбільшому цілому значенні a система нерівностей

$\begin{cases} y < -x^2, \\ y > a \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

▼ **Відповідь:** (1; 2), (2; 1)

2.

Знайдіть всі такі чотирицифрові числа $\overline{abcd}$, для яких виконується рівність $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} = 2018 - 2a$.

Розв'язання

$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$, де a – одноцифрове число від 1 до 9, b, c, d – одноцифрові числа від 0 до 9

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

$\overline{ab} = 10a + b$

Тобто, $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} = 1000a + 100b + 10c + d + 100a + 10b + c + 10a + b =$
$= 1110a + 111b + 11c + d$

Маємо рівняння

$1110a + 111b + 11c + d = 2018 - a$

$1111a + 111b + 11c + d = 2018$

За умовою $a \neq 0$

Тепер методом підбору розв'яжемо рівняння:

5) a не може дорівнювати 2 або бути більшим за 2, бо тоді $1111 \cdot 2 + 111b + 11c + d = 2222 + 111b + 11c + d > 2018$, отже, a = 1
6) b не може бути 7 або 9,
   якщо b = 7, то $1111 + 111 \cdot 7 + 11c + d < 2018$
   якщо b = 9, то $1111 + 111 \cdot 9 + 11c + d > 2018$
   отже, b = 8.
7) c не може бути 0 або більшим за 2,
   якщо c = 0, то $1111 + 888 + 11 \cdot 0 + d < 2018$
   якщо c = 2, то $1111 + 888 + 11 \cdot 2 + d > 2018$
   отже, c = 1
8) d не може бути меншим за 6 або більшим за 8,
   якщо d = 6, то $1111 + 888 + 11 + 1 \cdot 6 < 2018$
   якщо d = 8, то $1111 + 888 + 11 + 1 \cdot 8 > 2018$
   отже, d = 7

Чотирьох цифровим числом, для якого виконується рівність – 1817

$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} = 2018 - a$

1817+181+18=2018-2=2016

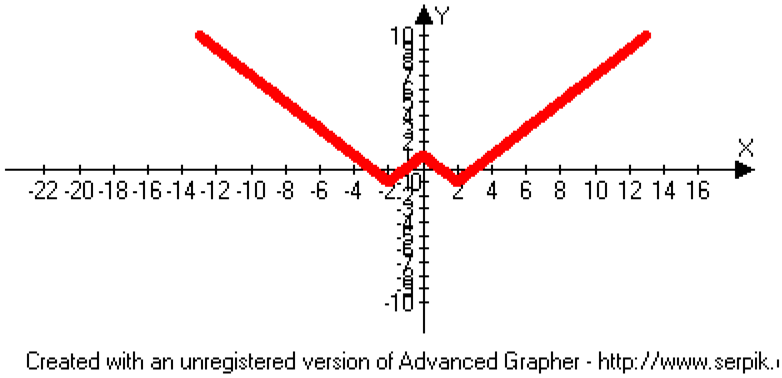
III рівень

1.

Знайти множину значень функції : $f(x) = g(\sqrt{25 - g^2(x)})$, де $g(x) =$
$= ||x| - 2| - 1$.

▼***Розв'язок:*:**

1) Визначимо, яких значень може набувати g(x): $25 - g^2(x) \geq 0$, $g^2(x) \leq 25$; g(x) є [0;5].
2) Побудуємо графік функції $g(x) = \left|\left|x\right| - 2\right| - 1$.

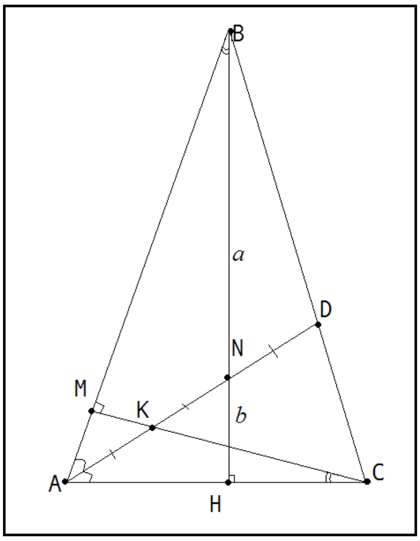


3) На проміжку [0;5] функція g(x)= $\left|\left|x\right| - 2\right| - 1$ набуває значень від -1 до 2. Так як $\sqrt{25 - g^2(x)}$ є [0;5], то область значень f(x) = g(t), де t=$\sqrt{25 - g^2(x)}$, є такою: [-1;2].

▼***Відповідь*:** **E(f(x)):**[-1;2].

2.

Дві висоти трикутника ділять бісектрису внутрішнього кута на три рівних частини. Знайти величину кута трикутника, з якого проведено бісектрису.



Розв'язок: Нехай $BN = a$, $NH = b$. CM, BH - висоти, AD — бісектриса.

Для трикутника ABH маємо:

$(a+b)^2 + \dfrac{b^2x^2}{a^2} = x^2$. Тоді отримаємо, що $AB = a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$, $AH = b\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. З подібності трикутників ANH і AKM маємо $MK = \dfrac{b}{2}$,

$\boldsymbol{AM} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{2}\sqrt{\dfrac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}}$. З подібності трикутників $\boldsymbol{AMC}$ і $\boldsymbol{AHB}$ маємо $\dfrac{\boldsymbol{AM}}{\boldsymbol{AH}} = \dfrac{\boldsymbol{AC}}{\boldsymbol{AB}} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\boldsymbol{BD}}{\boldsymbol{DC}} = 2$. З трикутника $\boldsymbol{ADC}$ маємо $\dfrac{\boldsymbol{HC}}{\boldsymbol{AH}} = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{2}{3} = 1$, $\dfrac{\boldsymbol{HC}}{\boldsymbol{AH}} = \dfrac{3}{4}$. Отже, $\cos\angle \boldsymbol{BAC} = \dfrac{2}{7}$.

Відділення математики

Контрольна робота з математики

9 клас.

І рівень

1.

При якому значенні параметра a рівняння $(|x|-2)^2 - 1 = a$ має три корені?

▼***Відповідь:*** $a = 3$

2.

Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\dfrac{8x+9-x^2}{|x-5|(2-x)}}$.

▼***Відповідь:*** $[-1;\ 2)\cup[9;\ +\infty)$

3.

Зобразити на координатній площині множину розв'язків рівняння
$2|xy| + 1 = |x| + 2|y|$.

▼***Розв'язок:***

За властивістю модуля: $|xy| = |x|\cdot|y|$.

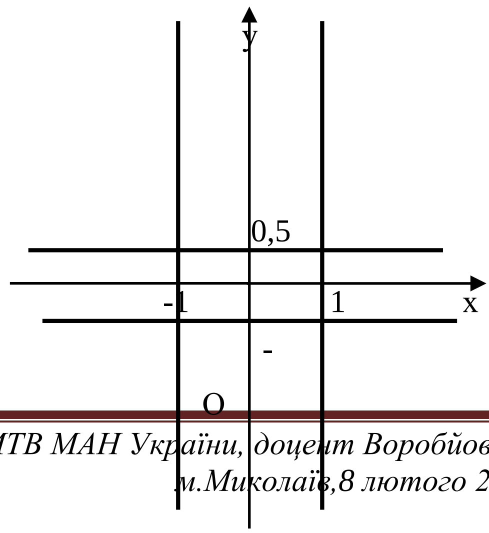
$2|xy| + 1 = |x| + 2|y|$:

$2|x||y| + 1 - |x| - 2|y| = 0$

$|x|(2|y| - 1) - (2|y| - 1) = 0$

$(2|y| - 1)(|x| - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2|y| - 1 = 0, \\ |x| - 1 = 0. \end{array}\right.$



$$\left[\begin{array}{l} 2|y| = 1, \\ |x| = 1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0{,}5 \\ y = -0{,}5 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Зобразимо на координатній площині множину точок, координати яких є розв'язками рівняння

▼***Відповідь:*** $\left[\begin{array}{l} y = 0{,}5 \\ y = -0{,}5 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$

II рівень

1.

При якому найменшому цілому значенні a система нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 9, \\ y \le a \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

▼***Відповідь:*** (4; 2), (–4; –2)

2.

2. Спростити вираз $\sqrt{(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 + 10(x + \frac{1}{x})^2 + 5}$

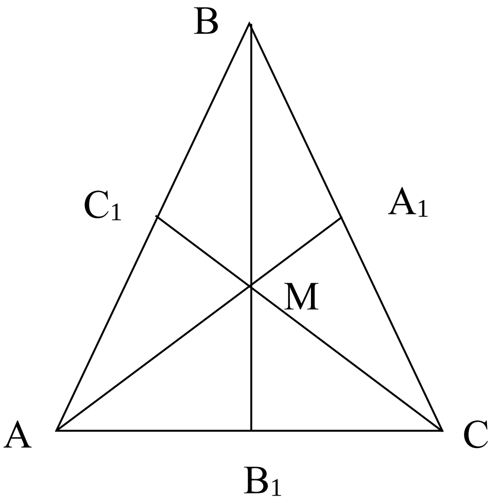
III рівень

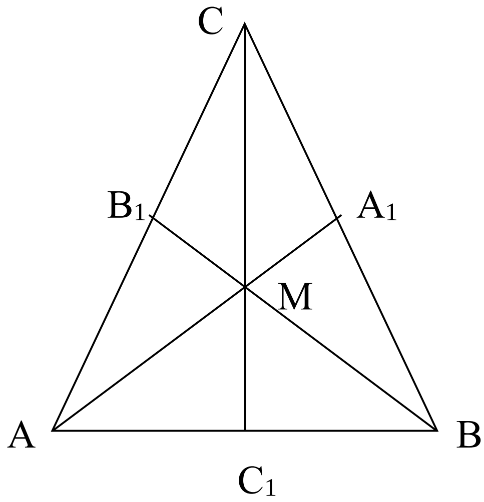
1.

Знайдіть кути рівностороннього трикутника ABC, якщо відомо, що сума кутів ABB_1 и BAA_1 дорівнює 60°, де A_1 и B_1 – середини сторін BC та AC відповідно.

Розвязок . Можливі два випадка: 1) трикутник ABC рівнобедрений з основою AC, 2) трикутник ABC рівнобедрений з основою AB .
Проведемо медіану CC_1 точку перетину медіани позначимо M. Тоді, за теоремою про суму кутів для трикутника ABM знаходимо $\angle AMB$=120°. Оскільки трикутник ABC рівнобедрений, то серед кутів ABM, BMC та CMA є два рівних. Величина одного з трьох кутів ABM, BMC, CMA дорівнює

120°. Тоді третій з цих кутів також дорівнює або 120°=360°-2·120°, або $\frac{360°-120°}{2}=120°$. отже всі три кути дорівнюють 120°. Тоді $\angle BMA_1$=180°–120°=60°, а відрізок MA_1 в результате є і бісектрисою, і медіаною трикутника BMC, отже, і висотаю. Отже AA_1 – медіана та висота трикутника ABC. Аналогічно і для відрізків BB_1 и CC_1. Тоді трикутник ABC – рівносторонній і все його кути рівні 60°.





2. При яких значеннях m , система має принаймні один дійсний розв'язок. $\begin{cases} mx^2+2017x+1=0, \\ x^2+mx+2017=0, \\ 2017x^2+x+m=0 \end{cases}$

Відділення математики

Контрольна робота з математики

10 клас.

І рівень

1.

При якому значенні параметра a рівняння $\left|(x-1)^2-2\right|=a$ має три корені?

▼ **Відповідь:** a = 2

2.

2. Спростити вираз $\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x+\frac{1}{x})^2+5}$

3.

Розв'язати нерівність $\frac{1-x^4}{x^2+3x+2}\ge 0$.

▼ **<u>Відповідь:</u>** $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 1]$

II рівень

1.

При якому найменшому цілому значенні a система нерівностей $\begin{cases}|x|+|y|\le a,\\ y>5\end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

▼***<u>Відповідь</u>:*** (1; 2), (2; 1)

2

2. Зобразити на координатній площині множину розв'язків рівняння $2|xy|+1=|x|+2|y|$.

III рівень

1.

При яких значеннях m , система має принаймні один дійсний розв'язок.

$$\begin{cases} mx^2+2017x+1=0,\\ x^2+mx+2017=0,\\ 2017x^2+x+m=0 \end{cases}$$

Розв'язання

Додавши рівняння системи отримаємо:

$$(mx^2+mx+m)+(2017x^2+2017x+2017)+(x^2+x+1)=0$$

$$m(x^2+x+1)+2017(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=0$$

$$(x^2+x+1)(m+2017+1)=0$$

$$(x^2+x+1)(m+2018)=0$$

Так як множник x^2+x+1 дійсних коренів не має, то підходить тільки $m=-2018$. При цьому всі три рівняння будуть мати спільний дійсний корінь x =1

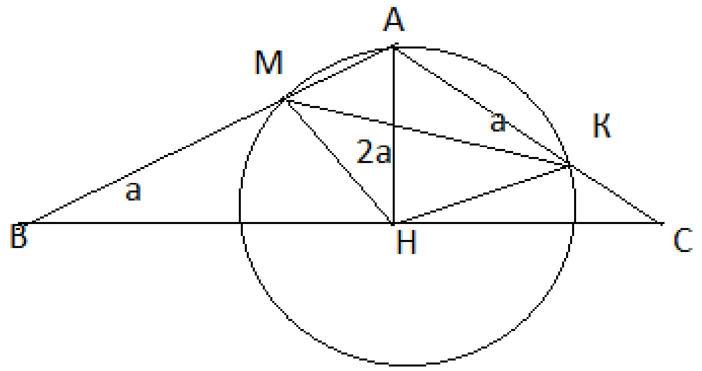
Відповідь: при $m=-2018$

2.

У трикутнику АВС кут А тупий. АН – висота трикутника. Коло з центром Н та радіусом АН перетинає АВ і АС у точках М і К відповідно. Доведіть, що АМ·АВ=АК·АС.

<u>1 спосіб</u>
<u>Розв'язання.</u>

Позначимо ∠ АКМ=а, тоді ∠ АНМ =2а. Трикутник АНМ рівнобедрений, тому ∠ МАН=90-а



отже ∠АВН=а, тому сума ∠ АВН і ∠ МКС=180^0 . Отже, ВМКС вписаний в коло для якого АВ і АС січні . За властивістю січних АМ·АВ=АК·АС**.**

<u>2 спосіб Розв'язання.</u>

Нехай Δ АВС – даний, $\angle A$ - тупий, АН - висота, коло з центром Н і радіусом НА перетинає сторону АВ в т.М, АС - в т.К, ВС – в точках Р і N.

Розглянемо ΔAMK і ΔACB. В них $\angle A$ — спільний, $\angle AMK$ – вписаний, $\angle AMK = \frac{1}{2} \cup AK$.

$\angle ABC$ — кут між січними, тому

$\angle ACB = \frac{1}{2}(\cup PMA - \cup KN) = \frac{1}{2}(\cup AKN - \cup KN) = \frac{1}{2} \cup AK$

$\angle AMK = \angle ACB$

Тоді $\Delta AMK \sim \Delta ACB$ (за двома кутами)

Звідси $\frac{AM}{AC} = \frac{AK}{AB}$ або $AM \cdot AB = AK \cdot AC$, що й потрібно було довести.

Відділення математики

Контрольна робота з математики

11 клас.

1. рівень.

1.

Сума трьох чисел, що утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 3. Якщо до першого й третього чисел додати по 4, а до другого додати 3, то одержані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.

▼***Розв'язок:***

▼***Відповідь:***. – 2; 1; 4 або 4; 1; – 2

2.

Спростити вираз $\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x+\frac{1}{x})^2+5}$

Розв'язання

$\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x+\frac{1}{x})^2+5}=\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x^2+2+\frac{1}{x^2})+5}=\ =$
$\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x^2+\frac{1}{x^2}+2)+5}$

Введемо заміну : $x^2+\frac{1}{x^2}=z$

$\sqrt{z^2+10(z+2)+5}=\sqrt{z^2+10z+20+5}=\sqrt{(z+5)^2}=|z+5|$

Перейдемо до заміни: $|z+5|=\left|x^2+\frac{1}{x^2}+5\right|=x^2+\frac{1}{x^2}+5$ Отже,

$\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})^2+10(x+\frac{1}{x})^2+5}=x^2+\frac{1}{x^2}+5$

Відповідь: $x^2+\frac{1}{x^2}+5$

3.

Сколько корней имеет квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, если известно, что $p–q>1$?

▼ **Відповідь:** *Ответ*: два корня.

▼***Розв'язок:*:**

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+px+q$.

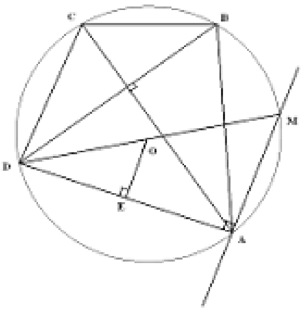
Поскольку $f(-1)=1-(p-q)<0$, а ветви параболы направлены вверх, то график функции $y=f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух точках, а, следовательно, данное уравнение имеет два корня.

II рівень

1.

1. Навколо чотирикутника ABCD описано коло з центром в точці O. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні. Знайдіть довжину сторони BC , якщо відстань від точки O до сторони AD дорівнюю

5 Около четырехугольника *ABCD* описана окружность с центром в точке *O*. Диагонали четырехугольника перпендикулярны. Найдите длину стороны *BC*, если расстояние от точки *O* до стороны *AD* равно 1.



Ответ: BC=2

Решение:

Пусть $OE\perp AD$, тогда $OE=1$. Проведем через точку A прямую перпендикулярную AD, которая пересекают окружность в точке M. Тогда DM – диаметр и $DO=OM$. Так как $\angle DBA=\angle DMA$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), $\angle MDA=90°-\angle DMA$ и $\angle CAB=90°-\angle DBA$, то $\angle CAB=\angle MDA$. Следовательно, дуга AM равна дуге BC и $BC=AM$. ΔMDA подобен ΔODE (по двум равным углам) с коэффициентом подобия ½, значит $2OE=AM=BC=2$.

Рекомендации по проверке.

Доказано подобие ΔOED и ΔCBA: 2 балла

2.

2. При якому найменшому цілому значенні a система нерівностей $\begin{cases} y>2x-4, \\ y<2x-a \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

III рівень

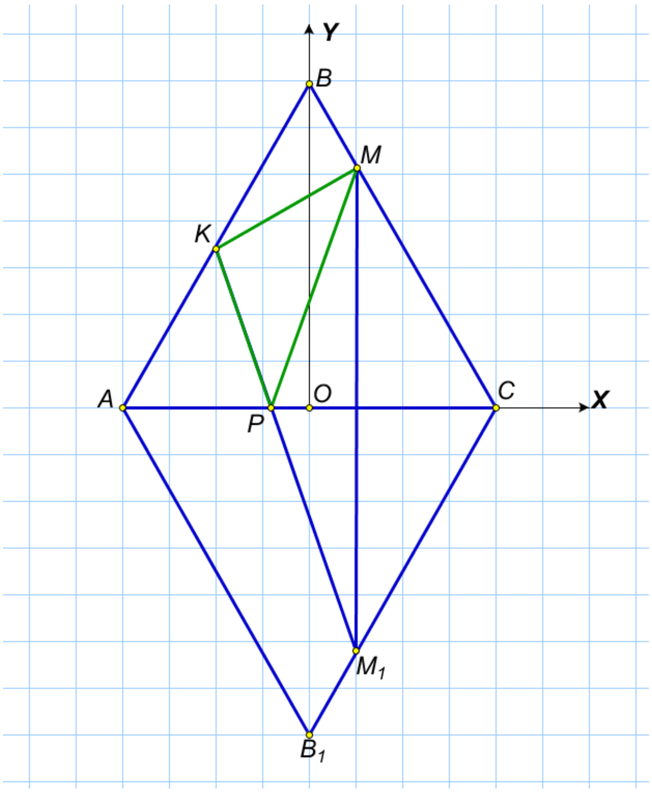
1.

Трикутник ABC – рівносторонній. Точка K – середина AB, точка M належить стороні BC, точка P – стороні AC, причому BM:CM=1:3. Знайдіть відношення AP:CP, якщо периметр трикутник KMP є мінімально можливим.

Розв'язання:

Позначимо сторону трикутника і введемо систему координат, як показано на рисунку.

Відобразимо даний трикутник симетрично відносно осі абсцис.



$P_{\Delta KMP} = KM + KP + PM = KM + KP + PM_1$

Отже, периметр буде найменшим, якщо точки K, P, M_1 лежать на одній прямій.

Складемо рівняння прямої KM_1:

$K(-a; a\sqrt{3}), M\left(\frac{a}{2}; \frac{3a\sqrt{3}}{2}\right).$

Тоді

$M_1\left(\frac{a}{2}; -\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right).$

Рівняння прямої запишемо у вигляді

$y = kx + b.$

Для знаходження коефіцієнтів маємо систему:

$$\begin{cases} a\sqrt{3} = -ak + b, \\ -\frac{3a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}k + b. \end{cases}$$

Віднімемо рівняння:

$k = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Тоді $b = -\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Рівняння прямої $y = -\frac{5\sqrt{3}}{3}x - \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ордината точки P дорівнює нулю, тому її абсциса $x = -\frac{2}{5}a$.
Оскільки

$AP = -\frac{2}{5}a + 2a = \frac{8a}{5}$, $CP = 2a + \frac{2}{5}a = \frac{12a}{5}$,

то

$AP:CP = \frac{8a}{5}:\frac{12a}{5} = 2:3.$

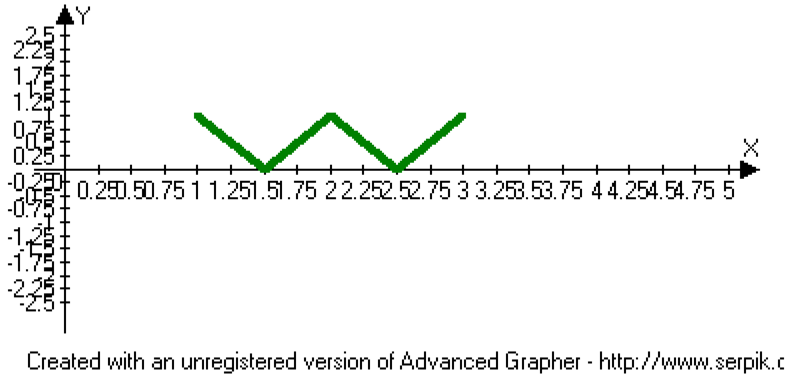
<u>Відповідь:</u> $2:3$.

2.

Знайти всі трійки (a,b,c), для яких множина розв'язків нерівності $\left|\left|a\sqrt{x}+b\right|+c\right| \geq 1$ має рівно три спільні точки з відрізком $[1;9]$.

Розв`язання

1) Введемо заміну x = t^2. Тоді t = $\sqrt{x}$; x є [1;9]; t є [1; 3].
   Отже, необхідно знайти всі трійки (a,b,c), для яких нерівність $\left|\left|at+b\right|+c\right| \geq 1$, має рівно три корені на відрізку [1; 3].
2) Для кожної такої трійки буде існувати ще одна, у якої знаки a і b протилежні. Вважаємо, що a >0. Побудуємо графік функції y=$\left|\left|at+b\right|+c\right|$ при t є [1; 3].



Оцінимо ситуацію:

1) Кінці ламаної повинні знаходитися в точках (1;1) і (3;1)
2) Точки заломлення яких є три повинні належати проміжку (1;3) і середня повинна мати ординату 1, інакше множина розв'язків буде мати нуль, 1 або безліч розв'язки з проміжком [1;3].

3)Для побудови такого графіка потрібно дотриматись умов:
||a + b|+ c|=1; ||3a + b|+ c|=1; |c|=1, a>0,b<0, c<0
Отже c =-1;=>
|a+b|=0 або|a+b|=2
|3a+b|=0 або|3a+b|=2
Розв'язавши системи отримаємо, що
a=1 b=-1 або a=1 b=-3 або a=2 b=-4
Зробимо перевірку, отримаємо що тільки a=2 b=-4 задовільнять умову задачі, також за означенням вище розв'язками будуть a=-2 b=4
Відповідь: (2;-4;-1) та (-2;4;-1)

При якому найменшому цілому значенні a система нерівностей $\begin{cases} y > 2x-4, \\ y < 2x-a \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

▼Розв'язок:

▼ Відповідь: (–3; 1), (1; –3) (1; 1).