МОЦНТТУМ

Миколаївське т/в МАН України

20.11.2020

Математичний гурток. Заняття №1

Матриці 2x2

та їх застосування

Керівник Воробйова А.І.

завідувач відділенім математики Миколаївського тв МАН кандидат фіз-мат наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем, секція прикладної та вищої математики, ЧНУ ім Петра могили

Миколаївське т/в МАН України

Миколаївський обласний Центр науково-технічної творчості учнівської молоді

Математичний гурток для слухачів Миколаївського територіального відділення Малої академії наук України відділення математики

від 20.11.2020

Керівник: Воробйова А.І.

Тема:

Матриці 2x2 та їх застосування.

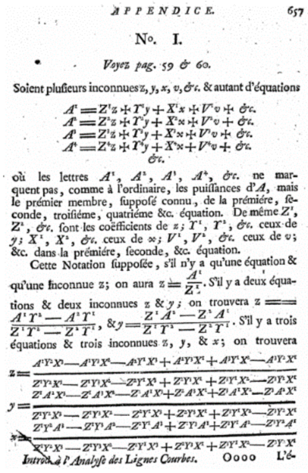
Миколаїв 2020

Зміст

ВСТУП

Вперше матриці з'явилися ще в давньому Китаї, називались тоді «магічними квадратами». Основним застосуванням матриць було розв'язування лінійних рівнянь. Також магічні квадрати були відомі трохи пізніше у арабських математиків, майже тоді з'явився принцип додавання матриць.

Після розвитку теорії визначників в кінці 17-го століття, Габріель Крамер почав розробляти свою теорію в 18-му ст. й опублікував «правило Крамера» в 1751 році. Приблизно в цей же проміжок часу з'явився «метод Гауса».



APPENDICE. 657

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient plusieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$A^1 = Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{\&c.}$$
$$A^2 = Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{\&c.}$$
$$A^3 = Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{\&c.}$$
$$A^4 = Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{\&c.}$$
&c.

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puissances d'A, mais le prémier membre, supposé connu, de la prémiére, seconde, troisiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. sont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, seconde, &c. équation.

Cette Notation supposée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$
$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Introd. à l'Analyse des Lignes Courbes. Oooo L'é-

Теорія матриць почала своє існування в середині XIX ст. в роботах Уільяма Гамільтона та Артура Келі. Фундаментальні результати в теорії матриць належать Карлу Вейєрштрасу, Фердинанду Георгу Фробеніусу та Марі Енмону Каміль Жордану. Сучасна назва "матриця" була введена Джеймсом Сильвестром в 1850 році.

Застосування матриць

Матриці широко застосовуються в математиці та фізиці для компактного запису та розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь та систем диференціальних рівнянь. При цьому кількість рядків матриці відповідає кількості рівнянь системи, а кількість стовпців — кількості невідомих величин. Матричний апарат дозволяє суттєво спростити розв'язок СЛАР (системи лінійних алгебраїчних рівнянь), звівши її до операцій над матрицями.

1. ОЗНАЧЕННЯ МАТРИЦІ. ТИПИ МАТРИЦЬ

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Означення. Матриця розмірів (*mxn)* – це прямокутна таблиця чисел з *m* рядків та *n* стовпців.

Позначається матриця так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для 2х2 матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс *i* в елементі a_{ij} означає номер рядка, а індекс *j*— номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=0$, $a_{11}=15$, $a_{22}=25$

Добуток числа рядків *m* на число стовпців *n* називають розмірністю матриці і позначають $m\times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m\times n$ матриці А, то пишуть $A_{m\times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною***. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її порядком.

Наприклад ми сьогодні розглянемо матриці другого порядку, тобто матриці розмірність 2×2.

Дві матриці $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ та $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $\left(a_{ij}\right)=\left(b_{ij}\right)$.

$$A=\begin{pmatrix}15 & -3\\ 0 & 25\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15 & -3\\ 0 & 25\end{pmatrix}\Leftrightarrow A=B.$$

Нульовою називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою O. $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$D=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=diag(2,3)$$

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається буквою Е. Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці А, якщо виконується умова

$A A^{-1} = A^{-1}A = E.$

2. ДІЇ НАД МАТРИЦЯМИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.

З матрицями можна здійснювати такі операції:

2.1. Множення на число

Приклад: $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},\ p=\frac{1}{2}, \text{тоді} \quad pA=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$

2.2. Додавання матриць.

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою C = A + B двох матриць $A_{m\times n}$ — (a_{ij}) і $B_{m\times n}$ = (b_{ij}) називається матриця $C_{m\times n}$= (c_{ij})=($a_{ij}+b_{ij}$).

Приклад: $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, \text{тоді} \quad A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

Справедливі такі властивості операцій:

а) A+ B = B + A — комутативність відносно додавання матриць; (переставний закон)

б) A + (B + C) — (A + B)+C — асоціативність відносно додавання матриць; (розподільний закон)

в) A + O = A; A - A = O — роль нульової матриці в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) α(βA) = (αβ) A — асоціативність відносно множення чисел;

д) α(A + B) = αA + αB — дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць; (розподільний закон)

е) (α + β) A — αA + βA — дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

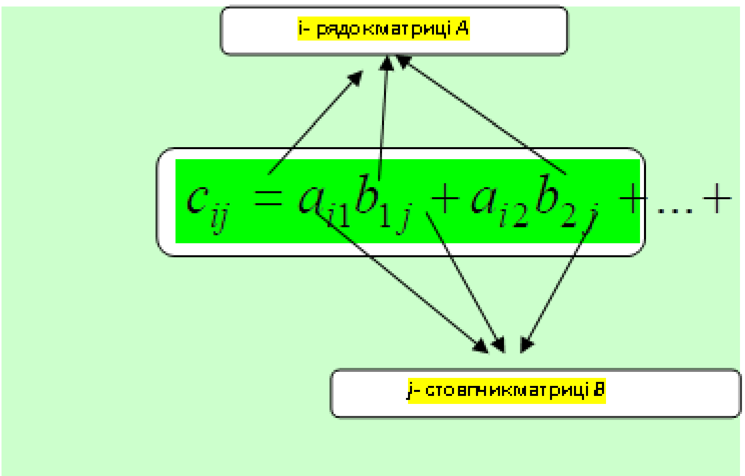
2.3. Множення матриць.

Приклад:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ \text{тоді}\qquad AB=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 11\\ 25 & 16\end{pmatrix}$$

Добутком матриці А розмірів $m\times k$ та матриці В розмірів $k\times n$ називається матриця С розмірів $m\times n$, яка позначається АВ. Елемент c_{ij} цієї матриці – це сума попарних добутків елементів *i*-го рядка матриці А та елементів *j*-го рядка матриці В, а саме: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ir}b_{rj}$ правило „рядок на стовпчик”.

Якщо А та В квадратні матриці однакового порядку, то їх завжди можна перемножити.



Справедливі такі властивості операцій множення матриць:

а) (АВ) С = А (ВС); асоціативність множення матриць.

б) (αA) B = A (αB) = α(AB);

в) (А + В) С = АС + ВС; дистрибутивність множення (лівосторонній закон)

г) С (А + В) = СА + СВ; дистрибутивність множення (правосторонній закон)

д) А • О = О • А = О; е) АЕ = ЕА = А;

е) в загальному випадку $A\cdot B\neq B\cdot A$; - не комутативність множення.

Зауважимо, що в школі вивчаються комутативні математичні операції. В перше я ознайомився з не комутативними математичними об’єктами.

3. СИСТЕМА ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДВОХ ЗМІННИХ.

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими x_1 x_2, ..., x_n називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots. m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i — вільними членами системи (*).

Система рівнянь (*) називається однорідною, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

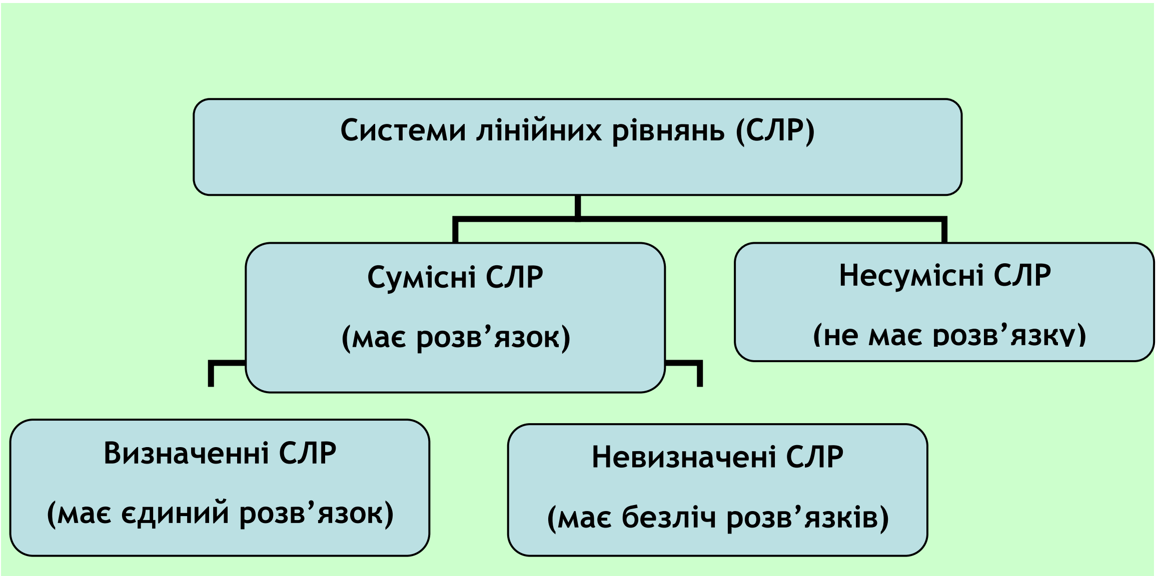
Множина чисел a1, a2, ..., an називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д. Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису a, b, c число a вважається першим, b— другим, c — третім, в запису b, a, c першим е число b, другим — число a і третім — число c.

Упорядкований набір n чисел ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) називається розв'язком системи (*), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (*) в тотожності.

Сумісна система називається невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.



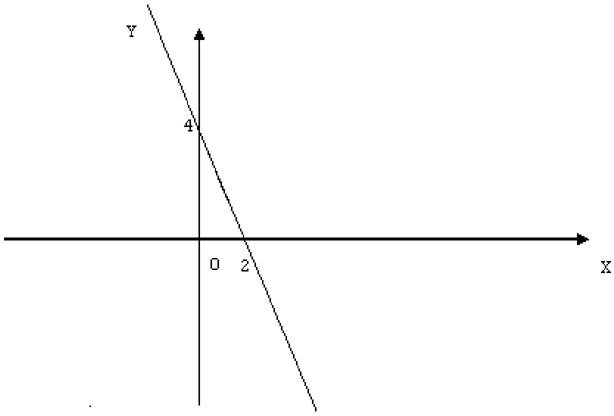
<u>3.1. Розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних та їх геометрична інтерпретація.</u>

Розглянемо лінійне рівняння

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = -2x + 4$$

З геометричної точки зору це рівняння прямої. Побудуємо її за двома точками

x	0	2
y	4	0



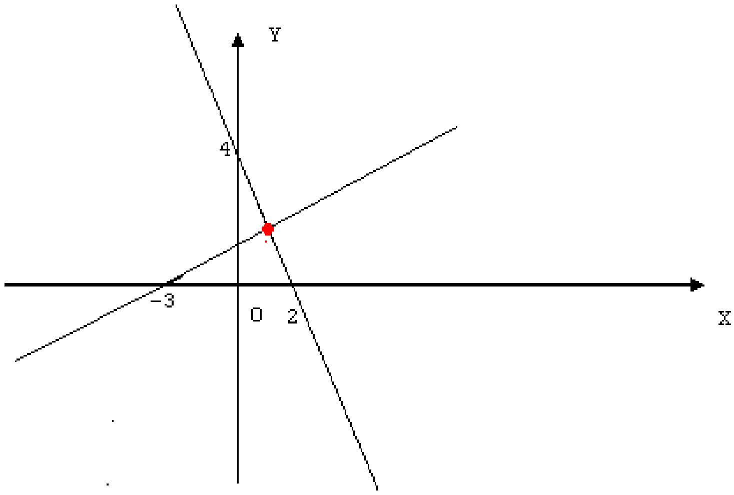
Розв'язками рівняння є безліч упорядкованих пар (x,y) точок прямої.

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = 3. \end{cases}$$

(1)

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

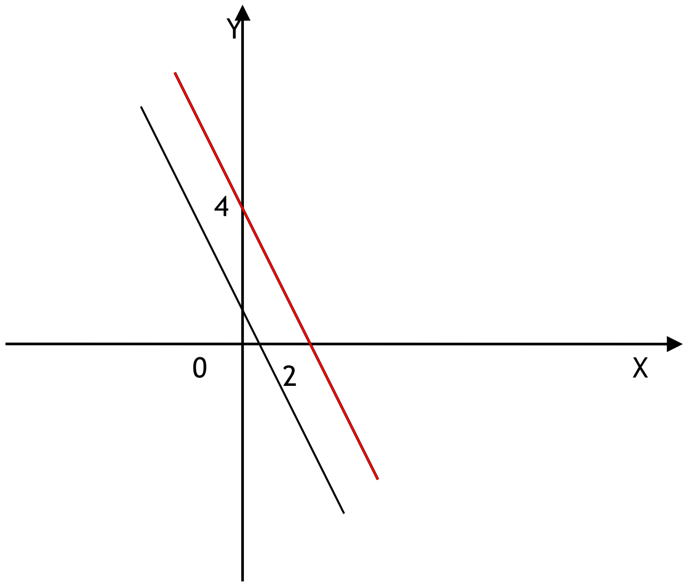


Перетин прямих дає єдиний розв'язок даної системи (1,2)

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 3. \end{cases} \qquad (2)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

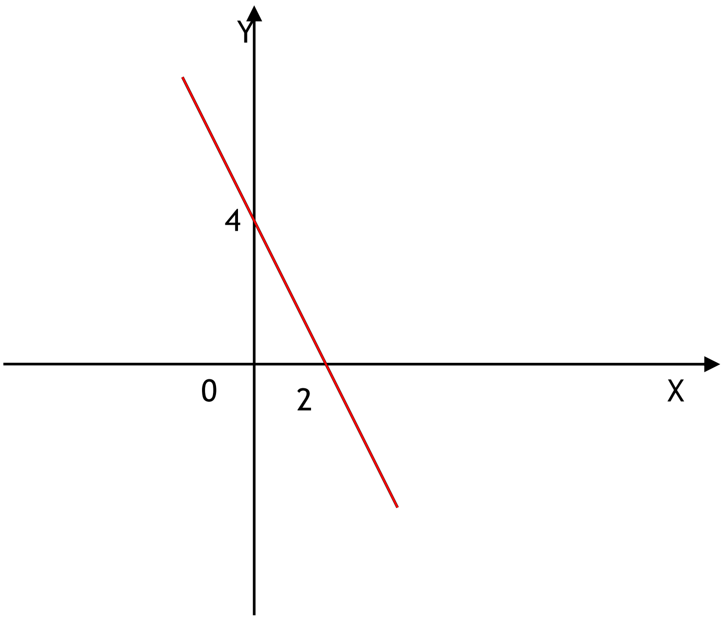


Прямі не перетинаються - отже немає розв'язку

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 8. \end{cases} \qquad (3)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих, які збігаються. Побудуємо їх.



Отже система має безліч розв'язків.

3.2. Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (\ )$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи ( ): спочатку помножимо перше рівняння на a22. Друге — на —a12, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на a21, а друге — на —a11 і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{112}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Систему ( ) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи ( ), називається визначником системи. Визначники Δy та Δx утворюються з визначника Δвідповідно заміною стовпців при невідомих x та y вільними членами.

4. АЛГЕБРА МАТРИЦЬ В ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧАХ.

4.1. Матриця реалізації.

Продаж товарів двох видів (α, β) здійснюють два магазини (1, 2). Обсяги реалізації цих товарів (в кількості шт.) кожним магазином представлено у вигляді матриць (таблиць) на початку доби (А) та на при кінці доби (В)

	товар типу α	*товар типу* β
магазин №1	320	60
магазин №2	200	90

$$\begin{array}{c|cc} & \text{товар типу } \alpha & \text{товар типу } \beta \\ \hline \text{магазин №1} & \otimes & * \\ \text{магазин №2} & \oplus & \propto \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 320 & 60 \\ 200 & 90 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 220 & 30 \\ 180 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 320 & 60 \\ 200 & 90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 220 & 30 \\ 180 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 30 \\ 20 & 60 \end{pmatrix}$$

4.2. Випуск готової продукції

Вироби	Продуктивність підприємств шт. /день		Витрати сировини, кг/шт.	
	1	2	I	II
α	6	10	5	3
β	4	3	10	4

	Час роботи підприємств (дн.)		Ціна сировини (грн./кг)	
	100	200	170	30

Потрібно визначити: а) сумарну продуктивність кожного підприємства по кожному з виробів за весь виробничий період); б) потреби кожного підприємства у різних типах сировини; в) розміри кредитування підприємств для закупівлі сировини.

Розглянемо матрицю А, що характеризує продуктивність підприємств, матрицю В – витрат сировини і С – матрицю цін, тоді

Продуктивність підприємств Вид виробу

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \end{array} \text{ Вид виробу } \quad B = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \end{array} \text{ Вид сировини}$$

C= (30 20).

а) Кожний стовпчик матриці А відповідає денній продуктивності окремого підприємства з кожного виду продукції. Щоб отримати річну продуктивність j-го підприємства (j=1,2), потрібно помножити j-тий стовпець матриці А на кількість робочих днів цього підприємства. Час роботи кожного з підприємств запишемо у вигляді діагональної матриці

$$T = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Тоді загальна продуктивність за виробничий період є добуток матриць А.Т:

$$AT = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 2000 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$$

Підприємства вироби

б) Витрати сировини кожного підприємства є добуток B.(AT):

$$B.AT = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 & 2000 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 & 16000 \\ 3400 & 8400 \end{pmatrix}$$

в) Вартість річного запасу сировини одержуємо як добуток матриці цін C на матрицю витрат B(AT):

$$D = C.(B.(AT)) = (30\ 20) \begin{pmatrix} 7000 & 16000 \\ 3400 & 8400 \end{pmatrix} = (274000\ 648000).$$

Отже, величини кредитування j-го підприємства на закупівлю сировини визначаються компонентами матриці D.

4. ВПРАВИ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ.

Завдання1. Розв'язати системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими.

1. $\begin{cases} -2x+4y=0 \\ 5x-y=4 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x+5y=16 \\ 4y=12 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x-3y=2 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x-y=4 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} 4x-5y=0 \\ -3x+2y=1 \end{cases}$;

Завдання 2. Розв'язати систему двох однорідних лінійних рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases};$$

Завдання 3. При якому значенні k система має безліч розв'язків?

$$\begin{cases} 5x-k\,y=3 \\ \frac{5}{2}x+y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Завдання 4. При якому значенні k система не має розв'язків?

$$\begin{cases} 3x-k\,y=9 \\ 2x+7y=4 \end{cases}.$$

Завдання 5. Дано матриці A, B. Потрібно виконати дії над матрицями:

а) $3A+2B$; б) $AB-BA$.

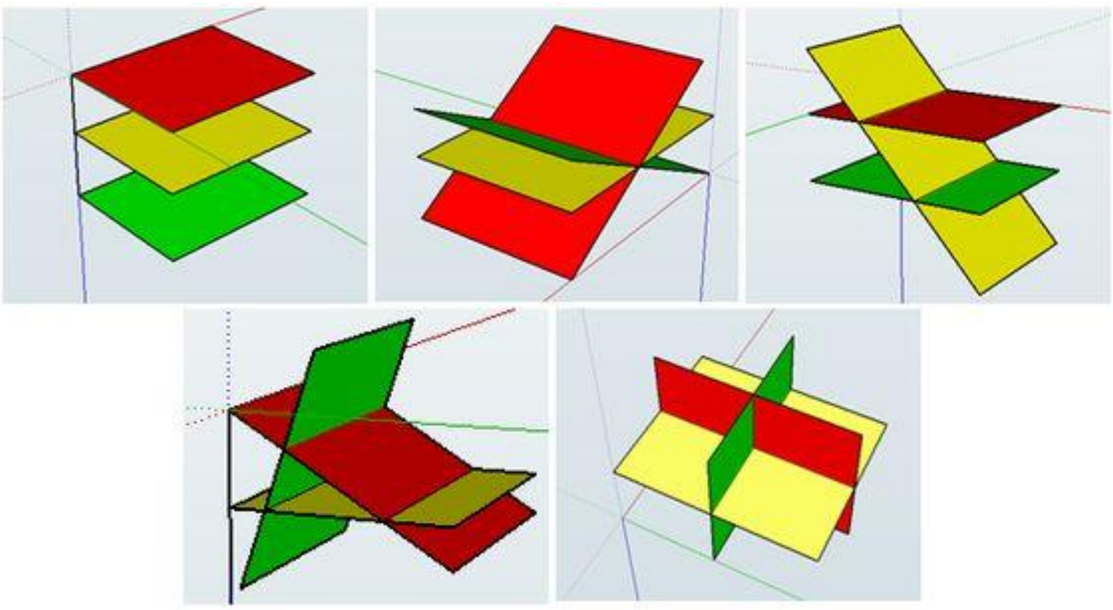
№ п/п	*A*	*B*
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

5. ЮНОМУ ДОСЛІДНИКУ.

Ти ознайомився з новим математичним об'єктом- матрицею, розібрався яким чином виконуються операції додавання та множення матриць, множення матриць на число.

Підчас заняття виникли запитання:

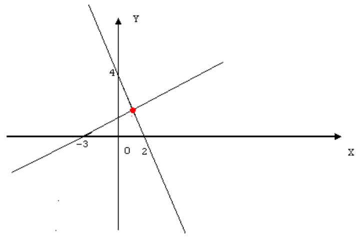
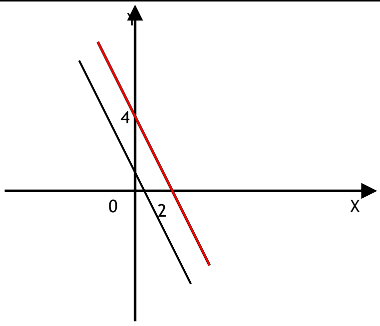
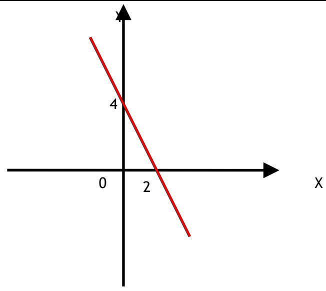
- Яким чином здійснити розв'язок матричного рівняння *AX=B* ?
- Чи існує ділення матриць?
- Чи кожні матриці можна перемножити?
- Чи є матриці що комутують при множені, тобто виконується умова ***AB=BA*** ?
- Які типи матриць існують?
- В яких ще розділах математики використовують матриці?
- Ім'я яких математиків пов'язані з теорією матриць?
- Яким чином можна представити геометричну інтерпретацію розв'язків системи лінійних рівнянь з трьома невідомими?

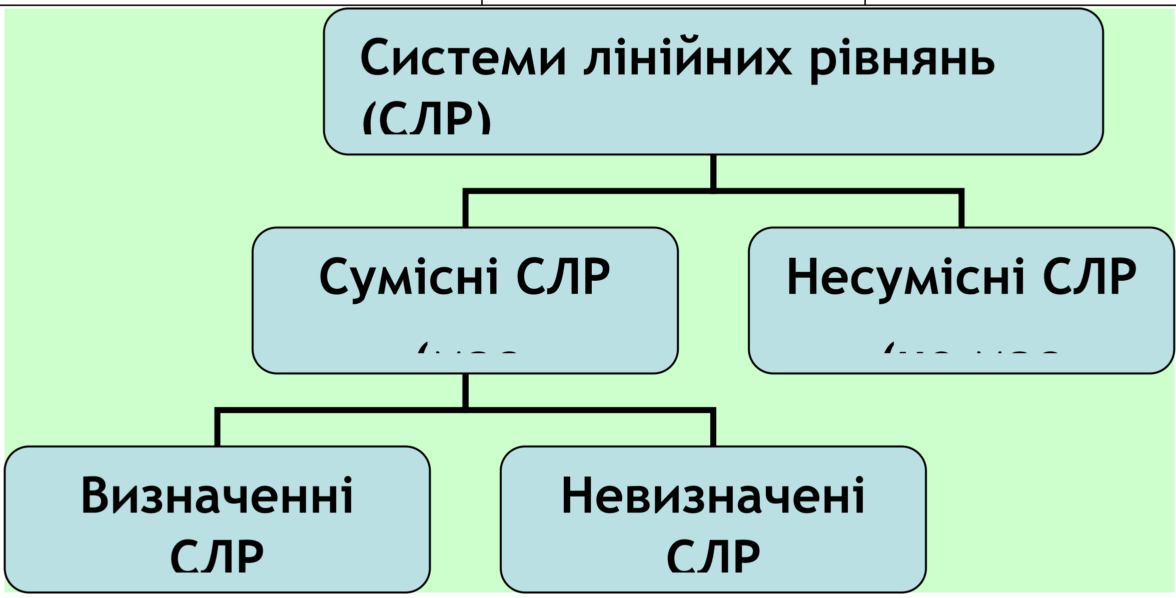


ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА.

1. Бродський Я.С. Матриці другого порядку та їх застосування. - Київ: Рад. шк., 1987р., вип.18- с. 119-139.
2. Головина Л. Й. Линейная алгебра и некоторые ее приложения.- М. : Наука, 1985.— 392 с.
3. ОльшанскийА.Ю. Умножение симметрий и преобразований. – Соросовский образовательный журнал, №5,1996, с.115-120.
4. Брусникин В.А. Матрицы как линейные операторы. –Соросовский образовательный журнал, №6, 2000, с.102-10.
5. Р. Беллман. Введення в теорію матриць. "Наука". М. 1969,38с.,118с.
6. Габріель Крамер https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer/

ВИКОРИСТАННЯ ОНЛАЙН-ДОШКИ MIRO

		
$\begin{cases} 2x+y=4, \\ x-2y=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 4x+2y=3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 4x+2y=8. \end{cases}$



$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

<u>Означення.</u> Матриця розмірів (*mxn*) – це прямокутна таблиця чисел з *m* рядків та *n* стовпців. Позначається матриця так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ або $$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для 2х2 матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Додавання матриць

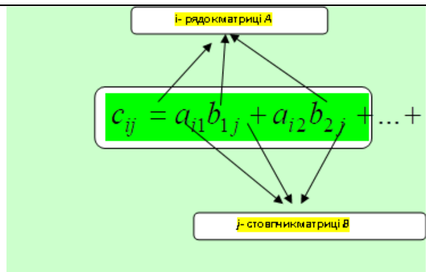
$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

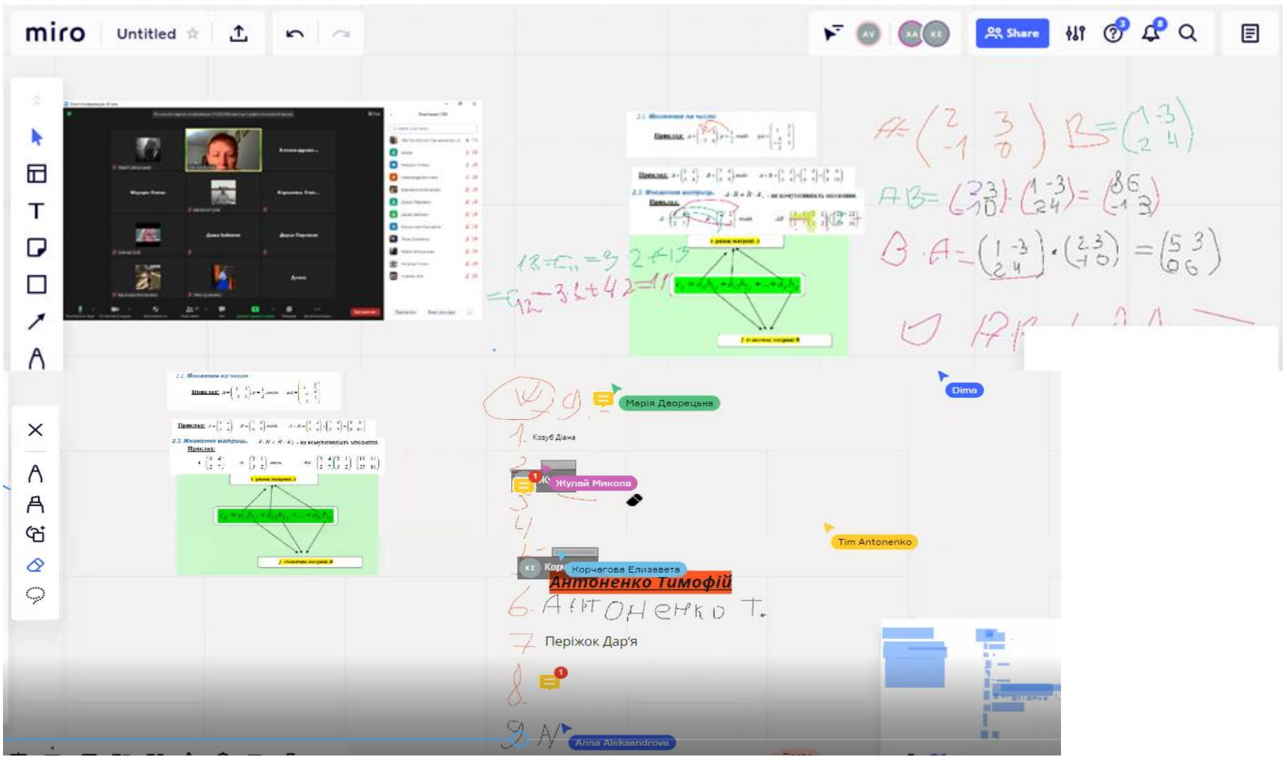
Множення на число

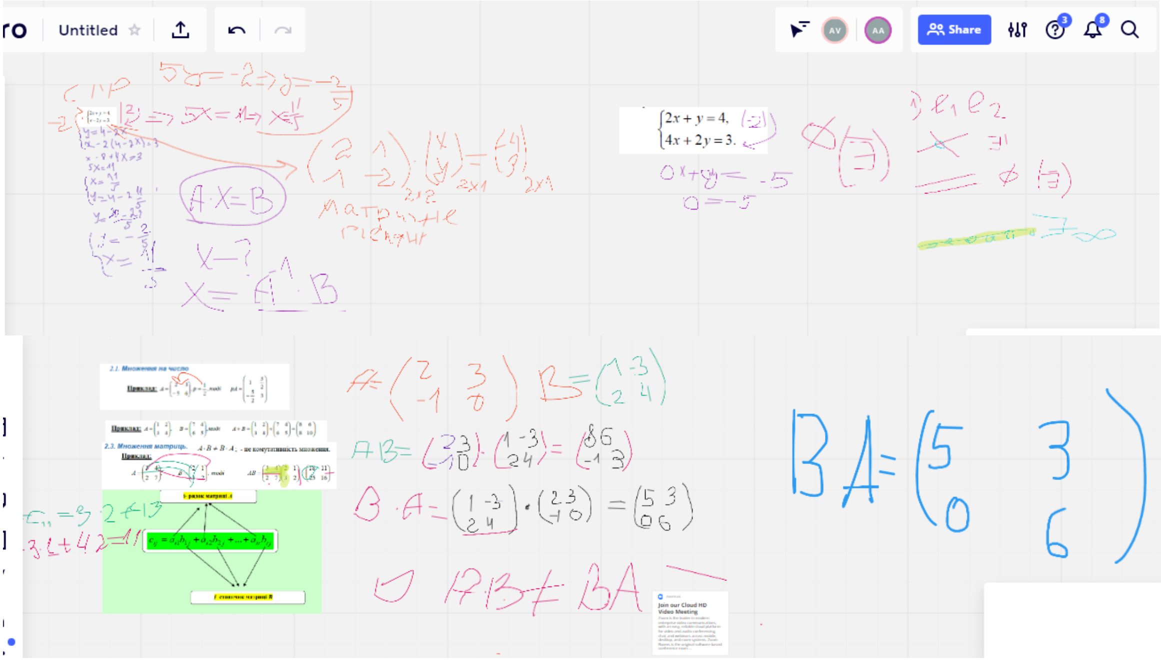
$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},\ p=\frac{1}{2},\ \text{тоді} \qquad pA=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

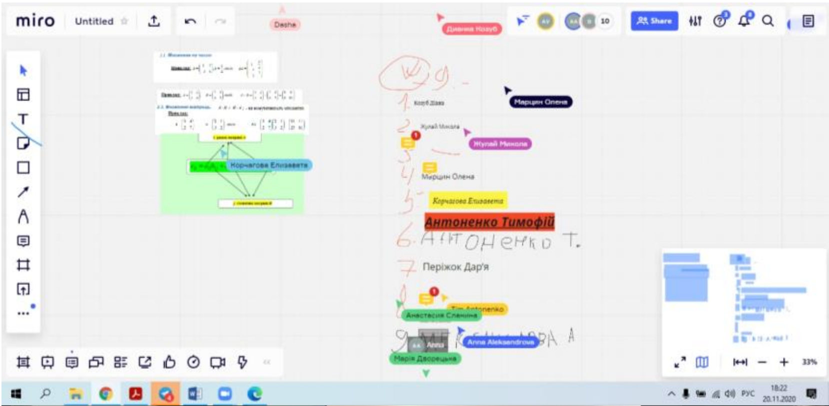
Множення матриць

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$$






Untitled
Share
$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 4x+2y=3. \end{cases}$
A·X=B
X=A⁻¹·B
AB≠BA


miro
Untitled
Share
Антоненко Тимофій
Перікоп Дар'я