Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки Миколаївської облдержадміністрації

Миколаївське територіальне відділення Малої академії наук України

Відділення: математика

Секція: математика

Властивості чисел Фібоначчі вищого порядку

Роботу виконав:

Шпилька Владислав Сергійович, учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки Миколаївської міської ради

Науковий керівник: Крисинська Ірина Володимирівна, вчитель Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Науковий консультант:

Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили

Миколаїв 2020

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Тези

науково-дослідницької роботи

Властивості чисел Фібоначчі вищого порядку

Шпилька Владислав Сергійович, учень 11 класу Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки.

Науковий керівник: Крисинська Ірина Володимирівна, вчитель Миколаївського муніципального колегіуму імені Володимира Дмитровича Чайки

Вперше послідовність чисел відомих тепер, як числа Фібоначчі зустрічаються у книзі Леонардо із Пізу (Л. Фібоначчі) «Liberabacci», яка була написана у 1202р. На винятковість цієї послідовності математики звернули увагу відразу. Протягом століть вчені знаходили різноманітні властивості цієї послідовності.

Задачі з числами Фібоначчі систематично пропонують на різноманітних олімпіадах та турнірах юних математиків. І не випадково з 1963 року результати таких досліджень публікуються в журналі The Fibonacci Quarterly.

Сама така задача XX Всеукраїнського турніру юних математиків ім. Ядренка М.Й. спонукала нас зайнятися пошуком нових властивостей цих чисел.

У минулі роки в роботі були сформулювані і довені низка властивостей пов’язаних зі спеціальним впорядкуванням чисел Фібоначчі та Трібоначчі.

У даній роботі розглянуто числа Фібоначчі n-го порядку й узагальнені декілька властивостей чисел Фібоначчі.

Метою нашої роботи є побудова нової послідовності точок виду $A_m(F_m^n; F_{m+1}^n; \dots; F_{m+p-1}^n)$ та доведення властивостей, які з нею пов’язані.

В подальшому планується продовжити дослідження гіпотези, яка пов'язана з розрахунком міри фігур в n-мірному просторі, координати вершин яких є числа Фібоначчі n-го порядку зі спеціальним впорядкуванням.

ЗМІСТ

ВСТУП

Вперше задача, розв'язок якої приводить до знаменитої послідовності 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …, була опублікована в 1202 р. у книзі Леонардо із Пізу (Л. Фібоначчі) «Liberabacci».

Під послідовністю чисел Фібоначчі ми розуміємо числову послідовність ($F_{n,}$ n≥1), яка задається рекурентно

$F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$

Зразу зауважимо, що початкові умови: $F_1 = F_2 = 1$, в залежності від методик дослідження послідовності (F_n); та її області визначення (n≥0), або (n є Z) можуть змінюватись, наприклад: $F_0 = 0$; $F_1 = 1$, тоді $F_n = F_{n-1} + F_{n-2,}$ n≥2

Майже зразу математики звернули увагу на цю числову послідовність – послідовність чисел Фібоначчі. Було відкрито і доведено ряд властивостей чисел цієї послідовності.

Числа Трібоначчі, Фібоначчі n-го порядку, як і числа Фібоначчі, використовуються в деяких задачах при знаходженні центра мас, комбінаторики, генерації псевдовипадкових чисел надлишкових системах числення, які використовуються в теорії алгоритмів та криптографії.

До останніх відкритів слід віднести встановлення зв`язку чисел Фібоначчі з випадковими подіями – блукання на площині.

Детальну інформацію з цієї теми, можна отримані у роботах [1,3,5,6].

У минулі роки в роботі були сформулювані і довені низка властивостей пов'язаних зі спеціальним впорядкуванням чисел Фібоначчі та Трібоначчі.

У даній роботі ми розглядали числа Фібоначчі n-го порядку й узагальнили декілька властивостей, які були доведені раніше.

Метою нашої роботи є побудова нової послідовності точок виду $A_m(F_m^n; F_{m+1}^n; \dots; F_{m+p-1}^n)$ та доведення властивостей, які з нею пов'язані.

В подальшому планується продовжити дослідження гіпотези, яка пов'язана з розрахунком міри фігур в n-мірному просторі, координати вершин яких є числа Фібоначчі n-го порядку зі спеціальним впорядкуванням

Відповідно до поставленої мети визначено *завдання,* які спрямовані на її досягнення:

- Поглибити знання про числа Фібоначчі;
- Навчитися використовувати числа Фібоначчі та застосовувати іх для розв'язання задач та побудови узагальнень;
- Познайомитися з властивостям чисел Фібоначчі вищого порядку
- Запропонувати геометричну інтерпретацію цих чисел.

Об`єкт дослідження: Послідовності, що будуються на спеціальному впорядкуванню чисел Фібоначчі n-го порядку.

Предмет дослідження є задача про належність точок (A_m) до одного підпростору.

В дослідженні доведені властивості пов'язані зі спеціальним впорядкуванням чисел Фібоначчі вищого порядку.

Особистий внесок: запропоновано розв'язки задач, сформульовані гіпотези та узагальнення з даної теми, зроблені просування щодо розрахунку міри фігур в n-мірному просторі, координати вершин яких є числа Фібоначчі n-го порядку зі спеціальним впорядкуванням.

ЧАСТИНА І. ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ,ТРІБОНАЧЧІ ТА ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ.

1.1. Означення чисел Фібоначчі та їх найпростіші властивості.

Означення: Члени числової послідовності (F_n, $n \geq 1$, $n \in N$), яка задається рекурентно

$F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $F_1 = F_2 = 1$ називаються числами Фібоначчі.(1.1.1)

Розглянемо деякі властивості чисел Фібоначчі, які використовуються в роботі.

Властивість 1. Сума членів послідовності Фібоначчі з непарними індексами дорівнюєF_{2n} :$F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$

Властивість 2. Сума членів послідовності Фібоначчі з непарними індексами дорівнює $F_{2n+1} - 1$:

$$F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Властивість 3. Для будь-якого n та m виконується наступна рівність :

$$F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$$

Властивість 4. Для будь-якого n виконується наступна рівність :

$$F_n^2=F_{n-1}F_{n+1}+(-1)^{n+1}$$

Властивість 5 Для будь-якого n виконується наступна рівність :

$F_nF_{n+3}-F_{n+1}F_{n+2} = (-1)^n$ [3].

1.2. Означення чисел Трібоначчі та їх властивості.

Числа Трібоначчі своєю назвою завдячує молодому математику Марку Фейнбергу, який написав статтю в журналі Fibonacci Quarterly (жовтень, 1963) у віці 14 років.

Згідно з [10] введемо означення чисел Трібоначчі.

Означення: Члени числової послідовності (t_n, $n \geq 1$), яка задається рекурентно

$t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}$, $t_0 = 0$, $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, . (1.2.1)

називаються числами Трібоначчі

Деякі властивості чисел Трібоначчі:

Для доведення властивостей чисел Трібоначчі введемо вектор:

$\omega_n = (t_{n+2}, t_{n+1}, t_n)$ і матрицю ***A***

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так як:

$$\begin{pmatrix} t_{n+2} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} + t_n + t_{n-1} \\ t_{n+1} \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{n+1} \\ t_n \\ t_{n-1} \end{pmatrix}$$

то $\omega_n = A\omega_{n-1}$, отже $\omega_n = A^n\omega_0$. Для звичайних чисел Фібоначчі елементами степені аналогічної матриці є самі числа Фібоначчі. Степінь введеня матриці А має трохи складніший вид. Надалі ми будемо розглядати числа Трібоначчі і с від'ємними $t_2 = t_1 + t_0 + t_{-1}$, то $t_{-1} = 1$, як то $\omega_{-1} = (0,0,1)^T$.

Лемма 1. Справедлива формула:

$$A^n = \begin{pmatrix} t_{n+2} & t_n + t_{n+1} & t_{n+1} \\ t_{n+1} & t_{n-1} + t_n & t_n \\ t_n & t_{n-2} + t_{n-1} & t_{n-1} \end{pmatrix}$$

Так як $A = (\omega_1 \ \ \omega_0 + \omega_{-1} \ \ \omega_0)$, то

$$A^n = A^{n-1} \cdot A = A^{n-1}(w_1 \quad w_0 + w_{-1} \quad w_0) =$$
$$= (A^{n-1}\, w_1 \quad A^{n-1}\, w_0 + A^{n-1}\, w_{-1} \quad A^{n-1} w_0) =$$
$$= (w_n \quad w_{n-1} + w_{n-2} \quad w_{n-1})$$

Що й потрібно було довести.

Так як $|A| = 1$, то $|A^n| = 1$. Із отриманої в лемі 1 формули для степені матриці А випливає тотожність, яка є аналогом тотожності Кассіні для чисел Фібоначчі.

Властивість 1. Справедлива тотожність:

$$t_n^3 - 2t_{n-1}t_nt_{n+1} + t_{n-2}t_{n+1}^2 + t_{n-1}^2t_{n+1} - t_{n-2}t_nt_{n+2} = 1 \quad (1.2.2)$$

Властивість 2. Справедлива тотожність:

$$t_{n+m} = t_{n+1}t_{m+1} + t_nt_m + t_nt_{m-1} + t_{n-1}t_m$$

Так як:

$A^{n+m-2} = A^{n-1} \cdot A^{m-1}$, то

$$\begin{pmatrix} t_{n+m} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{n+1} & t_{n-1}+t_n & t_n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{m+1} & * & * \\ t_m & * & * \\ t_{m-1} & * & * \end{pmatrix}$$

$t_{n+m} = t_{n+1}t_{m+1} + t_n t_m + t_n t_{m-1} + t_{n-1}t_m$ (1.2.3)

що й потрібно було довести[6].

1.3.Елементи векторної алгебри.

1.3.1. Поняття матриці і визначника, означення, основні властивості.

Означення: Матриця — математичний об'єкт, записаний у вигляді прямокутної таблиці чисел, над матрицями визначають операції: додавання, віднімання, множення матриць та множення матриці на скаляр. Як правило, матриці представляються двовимірними (прямокутними) таблицями.

Матрицею розміру **m**×**n** (m-на-n,або mn-матрицею) називається множина з **m**×**n** елементів $\mathbf{a_{ij}}$, розміщених у вигляді прямокутної таблиці з **m** рядків і **n**стовпців, а **m** і **n** — її розмірністю:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

де $\mathbf{a_{ij}}$ – елемент матриці; **i**– номер рядка; **j** – номер стовпця.

Означення:Квадратною матрицею порядку **n** називається матриця, яка має **n** рядків та **n** стовпчиків.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Означення:Визначник або детермінант — це число; вираз складений за певним законом з n^2 елементів квадратної матриці. Одна з найважливіших характеристик квадратних матриць.

1. Визначник 2×2 матриці

Щоб знайти визначник 2*2 матриці, множимо елементи головної діагоналі та віднімаємо добуток елементів побічної діагоналі $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$=ad-bc.

2. Визначник 3×3 матриці

Щоб знайти визначник 3 × 3 матриці, будуємо шість добутків таким чином:

$$\Delta= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

ЧАСТИНА ІІ. НОВІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ТА ТРІБОНАЧЧІ.

2.1.ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЕЛ ФІБОНАЧЧІ ЗВ`ЯЗАНИХ З ЇХ ВПОРЯДКУВАННЯМИ.

2.1.1. Постановка задачі. Для випадку двухвимірного простору.

В попередніх роботах було доведено ряд властивостей чисел Фібоначчі зв'язаних з їх спеціальним впорядкуванням.

Ми побудували послідовність упорядкованих пар (A_n, n≥1, n є N), таку що $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$, m≥0, n≥1, n є N.

Означення:

Впорядковані пари (F_{m+2n-1}; F_{m+2n}) будемо називати точками простору R^2та позначати : $A_1, A_2, ..., A_n$,. $A_n = (F_{m+2n-1}; F_{m+2n}),\ m - const$

Також була розв'язна задача XX Всеукраїнського турніру юних математиків [4]:

1. Доведіть, що для кожного m≥0 площа трикутника $A_1A_2A_3$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ дорівнює 0,5.

2. Доведіть, що для кожного m≥0 площа чотирикутника $A_1A_2A_3A_4$ з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$,$A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$, $A_3(F_{m+5}; F_{m+6})$ є трапеція площа якої дорівнює 2,5.

3. Доведіть, що площа многокутника $A_1A_2 ...A_n$, n ≥3, з вершинами $A_1(F_{m+1}; F_{m+2})$, $A_2(F_{m+3}; F_{m+4})$, … , $A_n(F_{m+2n-1}; F_{m+2n})$ не залежить від вибору число m≥0, та знайдіть цю площу.

Доведення яких ми представили в нашій роботі в 2018 році [7]

Для зручності, узагальнюючи ці задачі ми сформували наступні властивості чисел Фібоначчі та довели їх:

__**Властивість 1.**__ Будь-які три послідовні точки із послідовності (A_n) не колінеарні.

Властивість 2. Трикутник із вершинами у трьох послідовних точках послідовності *(A_n)* має одну і ту ж площу (не залежить від вибору першої із трьох точок, тобто від індексу m) і дорівнює ½.

Властивість 3. Будь-які чотири послідовні точки послідовності (A_n) такі, що: $A_mA_{m+3}||A_{m+1}A_{m+2}$ *і* $A_mA_{m+1}\nparallel A_{m+4}A_{m+3}$

Властивість 4. Площа трапеції $A_mA_{m+1}A_{m+2}A_{m+3}$ не залежить від першої точки (індекса m).

Властивість 5. Площа n-кутника $A_1A_{2\ldots}A_n$ не залежить від вибору 1-ої точки (індекса *m*).

2.1.2. Постановка задачі. Для випадку тривимірного простору.

В процесі роботи надрозв'язанням властивостей 1-5 ми висунули гіпотезу, щодо розширення властивостей з використанням чисел Трибоначчі та переносу міркувань у трьохвимірний простір R^3. Доведення даної гіпотези було представлено в нашій роботі в минулому році [9].

Будемо також розглядати послідовність *(B_n)* n≥1, n є N. Члени якої впорядковані трійки $B_n(F_{m+3n-2}; F_{m+3n-1}; F_{m+3n})$, які є точками простору R^3.

Властивість 6.Будь-які чотири послідовних точки послідовності (B_n)лежать в одній площині.

Будемо також розглядати послідовність *(C_n)* n≥1, n є N. Члени якої впорядковані трійки $C_n(t_{m+3n-2}; t_{m+3n-1}; t_{m+3n})$, які є точками простору R^3.

Властивість 7.Піраміда із вершинами у чотирьох послідовних точках послідовності *(C_n)* має один і той же об'єм (не залежить від вибору першої із чотирьох точок, тобто від індексу m) і дорівнює ⅓

Слід зауважити, що досліджуючи в цьому році властивості, пов'язані з числами Фібоначчі вищого порядку, було запропоновано альтернативне доведення властивості 6 чисел Фібоначчі.

Доведення, яке було представлене в 2018 році:

Розглянемо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, ; $\overrightarrow{A_1A_3}$; $\overrightarrow{A_1A_4}$та за правилом трикутника підрахуємо отриманий визначник третього порядку:

$$\Delta=(\overrightarrow{A_1A_2},\quad \overrightarrow{A_1A_3},\quad \overrightarrow{A_1A_4})=\begin{vmatrix} F_{m+4}-F_{m+1} & F_{m+5}-F_{m+2} & F_{m+6}-F_{m+3} \\ F_{m+7}-F_{m+1} & F_{m+8}-F_{m+2} & F_{m+9}-F_{m+3} \\ F_{m+10}-F_{m+1} & F_{m+11}-F_{m+2} & F_{m+12}-F_{m+3} \end{vmatrix}=$$

$$(F_{m+4}-F_{m+1})(F_{m+8}-F_{m+2})(F_{m+12}-F_{m+3})+(F_{m+5}-F_{m+2})(F_{m+9}-F_{m+3})(F_{m+10}-F_{m+1})++(F_{m+7}-F_{m+1})(F_{m+11}-F_{m+2})(F_{m+6}-F_{m+3})-(F_{m+10}-F_{m+1})(F_{m+8}-F_{m+2})(F_{m+6}-F_{m+3})-(F_{m+7}-F_{m+1})(F_{m+5}-F_{m+2})(F_{m+12}-F_{m+3})--(F_{m+4}-F_{m+1})(F_{m+11}-F_{m+2})(F_{m+9}-F_{m+3})$$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$$\Delta=(F_{m+4}F_{m+8}-F_{m+4}F_{m+2}-F_{m+8}F_{m+1}-F_{m+7}F_{m+5}+F_{m+7}F_{m+2}++F_{m+1}F_{m+5})(F_{m+12}-F_{m+3})+(F_{m+5}F_{m+10}-F_{m+5}F_{m+1}-F_{m+2}F_{m+10}-F_{m+11}F_{m+4}++F_{m+11}F_{m+1}+F_{m+2}F_{m+4})(F_{m+9}-F_{m+3})+(F_{m+7}F_{m+11}-F_{m+7}F_{m+2}-F_{m+1}F_{m+11}--F_{m+8}F_{m+10}+F_{m+8}F_{m+1}+F_{m+2}F_{m+10})(F_{m+6}-F_{m+3})$$

Винесемо спільні множники за дужки:

$$\Delta=(F_{m+8}(F_{m+4}-F_{m+1})+F_{m+2}(F_{m+7}-F_{m+4})-F_{m+5}(F_{m+7}-F_{m+1}))(F_{m+12}--F_{m+3})+(F_{m+10}(F_{m+5}-F_{m+2})-F_{m+11}(F_{m+4}-F_{m+1})+F_{m+4}F_{m+2}--F_{m+5}F_{m+1}))(F_{m+9}-F_{m+3})+(F_{m+2}(F_{m+10}-F_{m+7})-F_{m+1}(F_{m+11}-F_{m+8})++F_{m+7}F_{m+11}-F_{m+8}F_{m+10}))(F_{m+6}-F_{m+3})$$

Застосуємо властивість $F_{n+m}=F_{n-1}F_m+F_nF_{m+1}$:

$$\Delta=((F_mF_7+F_{m+1}F_8)(F_mF_3+F_{m+1}F_4-F_{m+1})+(F_m+F_{m+1})(F_mF_6+F_{m+1}F_7-{}_mF_3--F_{m+1}F_4)-(F_mF_4+F_{m+1}F_5)(F_mF_6+F_{m+1}F_7-F_{m+1}))(F_mF_{11}+F_{m+1}F_{12}-F_mF_2--F_{m+1}F_3)+((F_mF_9+F_{m+1}F_{10})(F_mF_4+F_{m+1}F_5-F_m-F_{m+1})-(F_mF_{10}+F_{m+1}F_{11})(F_mF_3++F_{m+1}F_4-F_{m+1})+(F_mF_3+F_{m+1}F_4)(F_m+F_{m+1})-(F_mF_4+F_{m+1}F_5)F_{m+1})(F_mF_8++F_{m+1}F_9-F_mF_2-F_{m+1}F_3)+((F_m+F_{m+1})(F_mF_9+F_{m+1}F_{10}-F_mF_6-F_{m+1}F_7)--F_{m+1}(F_mF_{10}+F_{m+1}F_{11}-F_mF_7-F_{m+1}F_8)+(F_mF_6+F_{m+1}F_7)(F_mF_{10}+F_{m+1}F_{11})-(F_mF_7++F_{m+1}F_8)(F_mF_9+F_{m+1}F_{10}))(F_mF_5+F_{m+1}F_6-F_mF_2-F_{m+1}F_3)=$$

$$=((13F_m+21F_{m+1})(2F_m+3F_{m+1}-F_{m+1})+(F_m+F_{m+1})(8F_m+13F_{m+1}-2F_m-3F_{m+1})--(3F_m+5F_{m+1})(8F_m+13F_{m+1}-F_{m+1}))(89F_m+144F_{m+1}-F_m-2F_{m+1})+((34F_m++55F_{m+1})(3F_m+5F_{m+1}-F_m-F_{m+1})-(55F_m+89F_{m+1})(2F_m+3F_{m+1}-F_{m+1})+(2F_m++3F_{m+1})(F_m+F_{m+1})-(3F_m+5F_{m+1})F_{m+1})(21F_m+34F_{m+1}-F_m-2F_{m+1})+((F_m+$$

$+ F_{m+1})(34F_m + 55F_{m+1} - 8F_m - 13F_{m+1}) - F_{m+1}(55F_m + 89F_{m+1} - 13F_m -$

$- 21F_{m+1}) + (8F_m + 13F_{m+1})(55F_m + 89F_{m+1}) - (13F_m + 21F_{m+1})(34F_m +$

$+ 55F_{m+1}))(5F_m + 8F_{m+1} - F_m - 2F_{m+1}) = ((13F_m + 21F_{m+1})(2F_m + 2F_{m+1}) + (F_m +$

$+ F_{m+1})(6F_m + 10F_{m+1}) - (3F_m + 5F_{m+1})(8F_m + 12F_{m+1}))(88F_m + 142F_{m+1}) + ((34F_m +$

$+55F_{m+1})(2F_m + 4F_{m+1}) - (55F_m + 89F_{m+1})(2F_m + 2F_{m+1}) + (2F_m + 3F_{m+1})(F_m + F_{m+1}) -$

$- (3F_m + 5F_{m+1})F_{m+1})(20F_m + 32F_{m+1}) + ((F_m + F_{m+1})(26F_m + 42F_{m+1}) - F_{m+1}(42F_m +$

$+68F_{m+1}) + (8F_m + 13F_{m+1})(55F_m + 89F_{m+1}) - (13F_m + 21F_{m+1})(34F_m + 55F_{m+1}))(4F_m + +$
$6F_{m+1})$

Розкриємо дужки , отримаємо:

$\Delta = (26F_m^2 + 26F_mF_{m+1} + 42F_mF_{m+1} + 42F_{m+1}^2 + 6F_m^2 + 10F_mF_{m+1} + 6F_mF_{m+1} +$

$+10F_{m+1}^2 - 24F_m^2 - 36F_mF_{m+1} - 40F_mF_{m+1} - 60F_{m+1}^2)(88F_m + 142F_{m+1}) + (68F_m^2 +$

$+110F_mF_{m+1} + 136F_mF_{m+1} + 220F_{m+1}^2 - 110F_m^2 - 110F_mF_{m+1} - 178F_mF_{m+1} - 78F_{m+1}^2 +$

$+ 2F_m^2 + 2F_mF_{m+1} + 3F_mF_{m+1} + 3F_{m+1}^2 - 3F_mF_{m+1} - 5F_{m+1}^2)(20F_m + 32F_{m+1}) + 26F_m^2 +$

$+ 42F_mF_{m+1} + 26F_mF_{m+1} + 42F_{m+1}^2 - 42F_mF_{m+1} - 68F_{m+1}^2 + 440F_m^2 + 712F_mF_{m+1} +$

$+ 715F_mF_{m+1} + 1157F_{m+1}^2 - 442F_m^2 - 715F_mF_{m+1} - 714F_mF_{m+1} - 1155F_{m+1}^2)(20F_m +$

$+ 32F_{m+1}) = (8F_m^2 + 8F_mF_{m+1} - 8F_{m+1}^2)(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40F_m^2 - 40F_mF_{m+1} +$

$+ 8F_m^2)(20F_m + 32F_{m+1}) + (24F_m^2 + 24F_mF_{m+1} - 24F_m^2)(4F_m + 6F_{m+1})$

Винесемо спільний множник за дужки та застосуємо властивість

$F_n^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$:

$\Delta = (8(F_{m-1}F_{m+1} + F_mF_{m+1} - F_{m+1}^2 + (-1)^m))(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40(F_m^2 + F_mF_{m+1} -$

$-F_{m+1}^2 + (-1)^m))(20F_m + 32F_{m+1}) + (24(F_m^2 + F_mF_{m+1} - F_{m+1}^2 + (-1)^m))(4F_m + 6F_{m+1}) =$

$= (8(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m - F_{m+1}) + (-1)^m))(88F_m + 142F_{m+1}) + (-40(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m -$

$-F_{m+1}) + (-1)^m))(20F_m + 32F_{m+1}) + (24(F_{m+1}(F_{m-1} + F_m - F_{m+1}) + (-1)^m))(4F_m + 6F_{m+1})$

Розкриємо дужки, отримаємо:

$\Delta = (-1)^m(704F_m + 1136F_{m+1} - 800F_m - 1280F_{m+1} + 96F_m + 144F_{m+1}) = 0$

Так як, мішаний добуток дорівнює нулю, точки $A_1A_2A_3A_4$ лежать на одній площині.

Альтернативне доведення:

Розглянемо матрицю A в якій запишемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$,$\overrightarrow{A_1A_4}$

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} \\ \overrightarrow{A_1A_3} \\ \overrightarrow{A_1A_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+4}\text{-}F_{m+1} & F_{m+5}\text{-}F_{m+2} & F_{m+6}\text{-}F_{m+3} \\ F_{m+7}\text{-}F_{m+1} & F_{m+8}\text{-}F_{m+2} & F_{m+9}\text{-}F_{m+3} \\ F_{m+10}\text{-}F_{m+1} & F_{m+11}\text{-}F_{m+2} & F_{m+12}\text{-}F_{m+3} \end{pmatrix}$$

Легко бачити, що третій стовпчик є лінійною комбінацією першого і другого стовпчика, так як $F_{m+6}\text{-}F_{m+3} = (F_{m+4} + F_{m+5}) - (F_{m+1} + F_{m+2}) = F_{m+4}\text{-}F_{m+1} + F_{m+5}\text{-}F_{m+2}$. Аналогічно з $F_{m+9}\text{-}F_{m+3}$ і $F_{m+12}\text{-}F_{m+3}$. Таким чином, за означенням, ранг матриці A дорівнює 2. А це означає, що вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$. Отже, вектори компланарні, тому точки теж компланарні.

ЧАСТИНА III. ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ N-ГО ПОРЯДКУ ТА ЇХ ВЛАСТИВІСТЬ.

3.1.Поняття рангу матриці, означення лінійного векторного простору та підпростору.

3.1.1. Означення рангу матриці та мінору.

Нехай дана матриця:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

яка містить s рядків і n стовпчиків, причому s і n не зв'язані між собою. Стовпці цієї матриці розглядаються, як s-мірні лінійні вектори.

Означення:Ранг системи стовпчиків, тобто максимальних лінійно незалежних стовпчиків матриці A називають рангом цієї матриці.

Зрозуміло, що подані таким чином рядки матриці A можна розглядати, як n-мірні вектори, ранг системи рядків матриці дорівнює рангу системи її стовпців, тобто дорівнює рангу цієї матриці.[8]

Означення: Мінором k-го порядку матриці A називається визначник матриці, утворений елементами на перетині k стовпців та k рядків.

3.1.2. Означення лінійного простору та підпростору.

Нехай дана сукупність V довільних елементів **x**,**y**,**z**, …, в якій визначено дві операції: операція «додавання» і операція «множення на число з поля K». Припустимо, що ці операція завжди можна виконати, і вони однозначні в V**,** і для будь-яких елементів **x**, **y**, **z** із V і чисел α, β із K:

1.) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
2.) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
3.) Існує такий елемент 0 в R, що добуток числа 0 на будь-який елемент xіз R дорівнює елементу $\vec{0}$:
    $0 * \boldsymbol{x} = \vec{0}$
4.) $1 * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$
5.) $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
6.) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$
7.) $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$

Означення:Сукупність елементів V, в якій завжди можна виконатидві операції: «додавання» і «множення на число з поля К», причому ці операції задовольняють постулатам 1-7, ми будемо називати векторним простором(над полем К), а самі елементи векторами.

Означення:Підмножина L лінійного простору V називають лінійним підпростором цього простору, якщо вона є простором, щодо визначених у V операцій додавання векторів та множення векторів на число. Кажуть, що лінійний підпростір породжений векторами $\mathbf{a_1; a_2; \dots; a_k}$, якщо

L–це множина всіх лінійних комбінацій цих векторів.[8]

3.2 Означення чисел Фібоначчі n-го порядку.

Згідно з [11] введемо означення чисел Фібоначчі n-го порядку.

Розглянемо послідовність (F_m^n), яка задана рекуретно такими співвідношеннями:

$F_0^n = F_1^n = \cdots = F_{n-2}^n = 0,\ F_{n-1}^n = 1$

$n \geq 2, m \geq 0, n, m \in \mathbb{N}$

$F_{m+n+1}^n = F_m^n + F_{m+1}^n + \cdots + F_{m+n}^n$

Члени цієї послідовності назвемо числами Фібоначчі n-го порядку.

3.3. Властивісті чисел Фібоначчі n-го порядку

Нехай (A_m) – послідовність точок з простору $\mathbb{R}^p$: $A_m(F_m^n; F_{m+1}^n; \dots; F_{m+p-1}^n)$

Зауважимо, що n≤p-1, p≥3, n≥2.

$\mathbb{R}^p$–лінійний простір над полем дійсних чисел.

$\mathbb{R}^p$={$\vec{a}$,L,+}

Властивість 1: Вектори {$\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, …,$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$} утворюють підпростір Lпростору $\mathbb{R}^p$.

Доведення

Розглянемо матрицю A в якій запишемо координати векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, … ,$\overrightarrow{A_1A_n}$

$$A=\begin{pmatrix}\overrightarrow{A_1A_2}\\ \overrightarrow{A_1A_3}\\ \dots\\ \overrightarrow{A_1A_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_2^n-F_1^n & F_3^n-F_2^n & \dots & F_{n+1}^n-F_n^n & \dots & F_{p+1}^n-F_p^n\\ F_3^n-F_1^n & F_4^n-F_2^n & \dots & F_{n+2}^n-F_n^n & \dots & F_{p+2}^n-F_p^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ F_{n+1}^n-F_1^n & F_{n+2}^n-F_2^n & \dots & F_{2n}^n-F_n^n & \dots & F_{p+n}^n-F_p^n\end{pmatrix}$$

Оскільки $F_1^n=F_2^n=\dots=F_{n-1}^n=0; F_n^n=F_{n+1}^n=1$

Маємо:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & F_{p+1}^n-F_p^n\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \dots & F_{p+2}^n-F_p^n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & F_{n+2}^n-F_2^n & \dots & F_{2n-1}^n-F_{n-1}^n & F_{2n}^n-F_n^n & \dots & F_{p+n}^n-F_p^n\end{pmatrix}$$

Так як матриця A має n рядків, то очевидно, що ранг даної матриці менше або дорівнює n.

Розглянемо мінор даної матриці:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & F_{n+2}^n-F_2^n & \dots & F_{2n-1}^n-F_{n-1}^n & F_{2n}^n-F_n^n\end{pmatrix}$$

Виконаємо такі елементарні перетворення: від першого рядка віднімемо другий. Отримаємо:

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0 & -1\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & F_{n+2}^n-F_2^n & \dots & F_{2n-1}^n-F_{n-1}^n & F_{2n}^n-F_n^n\end{pmatrix}$$

Очевидно, що ми отримали найбільший ненульовий мінор, а це означає, що ранг матриці дорівнює n.

Це означає, що L є підпростором простору $\mathbb{R}^p$, породжений векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, …,$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$

Властивість 2:Послідовність точок (A_m) ⊂L.

Вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, …,$\overrightarrow{A_1A_n}$ є базисом цього підпростору.

Доведення

Допишемо до матриці A знизу рядок $\overrightarrow{A_1A_k}$:

$$A = \begin{pmatrix} \overrightarrow{A_1A_2} \\ \overrightarrow{A_1A_3} \\ \dots \\ \overrightarrow{A_1A_n} \\ \overrightarrow{A_1A_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2^n - F_1^n & F_3^n - F_2^n & \dots & F_{n+1}^n - F_n^n & \dots & F_{p+1}^n - F_p^n \\ F_3^n - F_1^n & F_4^n - F_2^n & \dots & F_{n+2}^n - F_n^n & \dots & F_{p+2}^n - F_p^n \\ \vdots & \vdots & & \ddots \ \vdots & & \ddots \ \vdots \\ F_{n+1}^n - F_1^n & F_{n+2}^n - F_2^n & & F_{2n}^n - F_n^n & & F_{p+n}^n - F_p^n \\ F_k^n - F_1^n & F_{k+1}^n - F_1^n & \dots & F_{k+n-1}^n - F_n^n & \dots & F_{p+k-1}^n - F_p^n \end{pmatrix}$$

Лема:Для будь-якого вектора$\overrightarrow{A_1A_j}$ $(a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_i;\ a_{i+1};\ \dots;\ a_p)$,i>n,справджується, що$a_i = a_{i-1} + a_{i-2} + \dots + a_{i-n}$.

$$a_i = F_{j+i-1} - F_i$$

За означенням чисел Фібоначчі n-го порядку, маємо:

$$\begin{aligned} F_{j+i-1} - F_i &= F_{j+i-2} + F_{j+i-3} + \dots + F_{j+i-n-1} - (F_{i-1} + F_{i-2} + \dots + F_{i-n}) \\ &= (F_{j+i-2} - F_{i-1}) + (F_{j+i-3} - F_{i-2}) + \dots + (F_{j+i-n-1} - F_{i-n}) \end{aligned}$$

З цього випливає, що $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} + \dots + a_{i-n}$.

За лемою будь-який стовпчик матриці починаючи з n+1 дорівнює n попередніх. Отже, будь-який стовпчик є лінійною комбінацією перших n стовпчиків, а це означає, що ранг цієї матриці дорівнює n, оскільки вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_2}$, …,$\overrightarrow{A_1A_n}$ лінійно незалежні, тоді вектор $\overrightarrow{A_1A_k}$ є лінійною комбінацію цих векторів. Тоді послідовність точок $(A_m) \subset L$, а вектори $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, … ,$\overrightarrow{A_1A_n}$ є базисом цього підпростору.

ВИСНОВКИ

Ми сформували і довели ряд властивостей чисел Фібоначчі n-го порядку, зв’язаних із їх спеціальним впорядкуванням.

Робота складається з вступу, трьох розділів, висновку та списку літератури.

В першому розділі було розглянуто загальновідомі властивості чисел Фібоначчі, які булі використані для доведення нових. Також було розглянуто декілька властивостей чисел Трібоначчі.

В другому розділі було сформульовано і доведено низка властивостей пов’язаних зі спеціальним впорядкуванням чисел Фібоначчі та Трібоначчі. Досліджуючи в цьому році властивості, пов’язані з числами Фібоначчі вищого порядку, було запропоновано альтернативне доведення властивості 6 чисел Фібоначчі, а саме те, що будь-які чотири точки послідовності (B_n.) є компланарними. Також було запропоновано геометричну інтерпретацію цих чисел.

В третьому розділі ми розглянули числа Фібоначчі n-го порядку, сформулювали та довели нові їх властивості.

Робота містить оригінальні результати. Результати роботи розширюють знання про властивості чисел Фібоначчі вищого порядку. Зауважимо, що звичайні числа Фібоначчі мають порядок 2. Випадки $n=3,n=4$ ретельно досліджені, що не можна сказати про числа Фібоначчі порядку $n>4$. Тому вивчення даних властивостей може дати поштовх до нових досягнень в областях математики та інформатики і бути використані при теоретичних дослідженнях. Крім того ми запропонували векторний підхід до досліджень властивостей послідовності (F_n), що також може бути використано в подальшому.

В подальшому планується продовжити дослідження гіпотези, яка пов’язана з розрахунком міри фігур в n-мірному просторі, координати вершин якої є числа Фібоначчі n-го порядку зі спеціальним впорядкуванням.

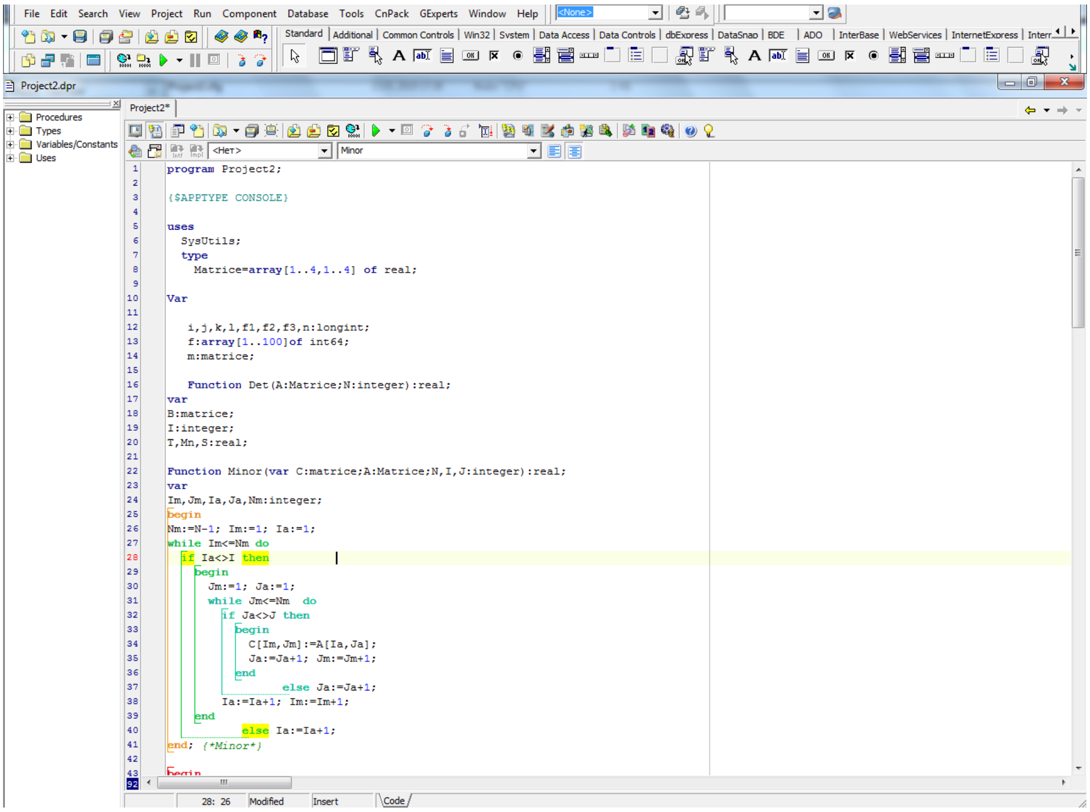
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

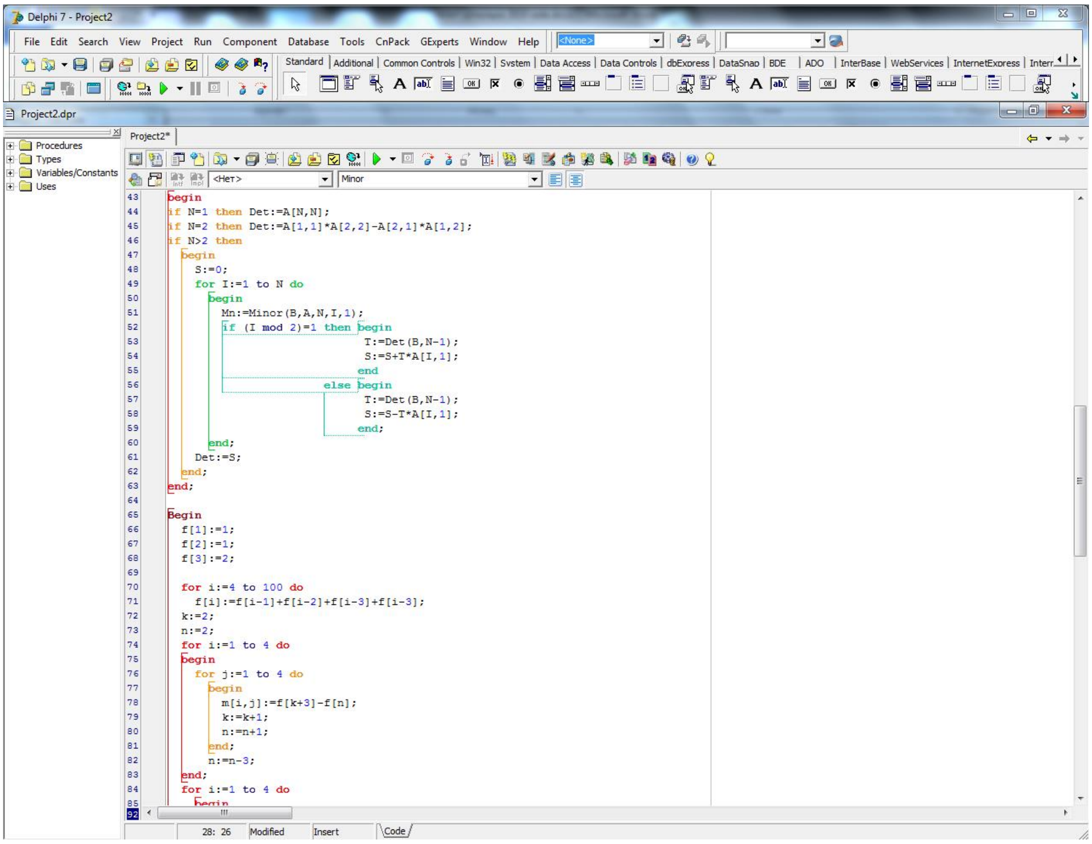
1. Бродський, Я. С. Мовою матриць [Текст] / Я. С.Бродський, А. К. Сліпенко. - Львів : Каменяр, 2008. - 113с.
2. Булдигін В. В., Алєксєєва І. В.,. Гайдей В. О, Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б. «Лінійна алгебра та аналітична геометрія».за ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу http://matan.kpi.ua/public/files/Posibnyk %20LA+AG.pdf
3. Воробьев Н.Н., Числа Фибоначчи. (Популярныелекции по математике, вып. 5). М., Наука.—144с.
4. Завдання XX-го Всукраїнського турніру юних математиків, Електронний ресурс]. – Режим доступу–http://tym.in.ua/2017/06/23/list/
5. Послідовність Фібоначчі – Вікіпедія, Електронний ресурс]. – Режим доступу–https://uk.wikipedia.org/wiki/Послідовність_Фібоначчі
6. Иванов О.А., Иванова В.В. Алгебраические методы исследования свойств чисел Трибоначчи. Современные проблемы математических и естественных наук в мире / Сборник научных трудов по итогам международной научно-практической конференции. № 2. Казань, 2015. 85 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу–http://izron.ru/articles /sovremennye-problemy-matematicheskikh-i-estestvennykh-nauk-v-mire-sbornik-nauchnykh-trudov-po-itogam/sektsiya-6-matematicheskaya-logika-algebra-i-teoriya-chisel-spetsialnost-01-01-06/algebraicheskie-metody-issledovaniya-svoystv-chisel-tribonachchi/
7. Шпилька В.С. Нові властивості чисел Фібоначчі. Науково-дослідницька робота Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України. - Рукопис, Миколаїв 2018—25с
8. А.Г. Курош. Курс высшей алгебрыМ.: Наука, 1965. - 431 с.

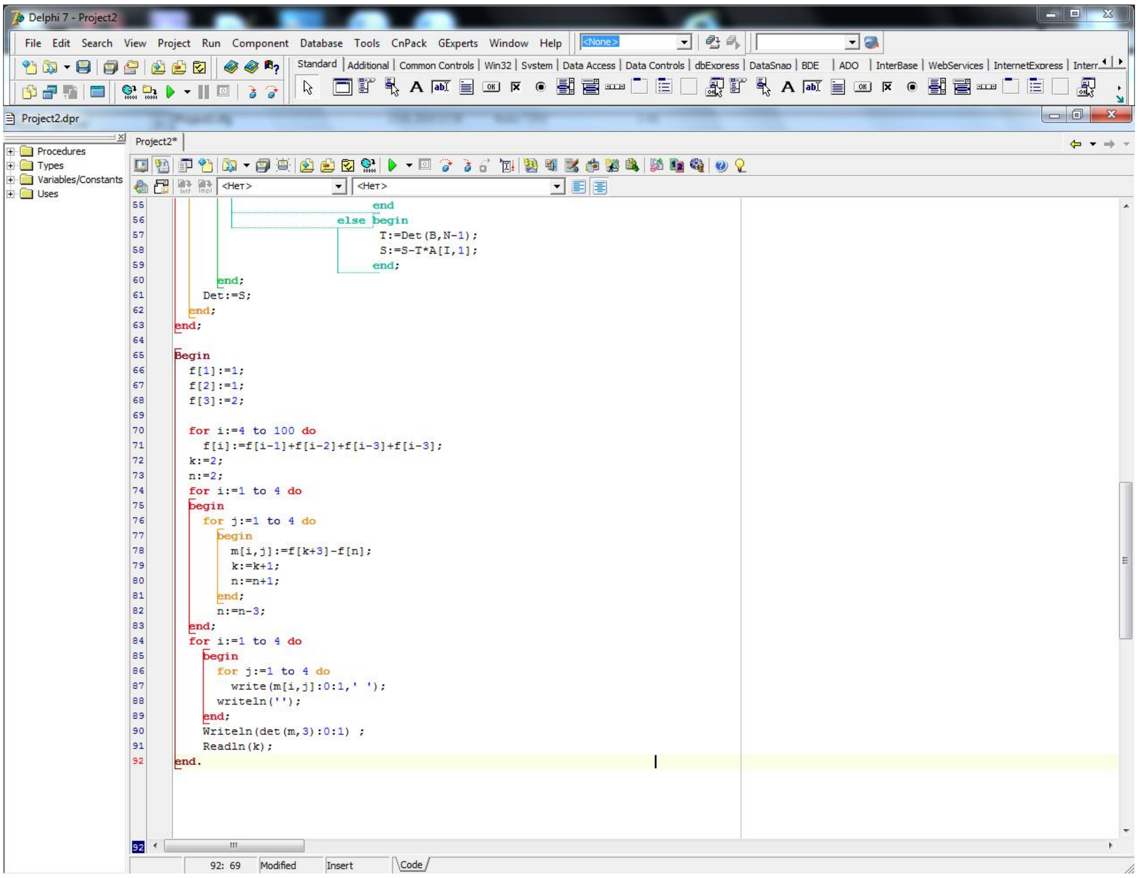
9. Шпилька В.С.Геометричні інтерпретації чисел Фібоначчі і Трібоначчі Науково-дослідницька робота Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України. -Рукопис, Миколаїв 2019—29с
10. Feinberg M. “Fibonacci-Tribonacci.” Fibonacci Quart. 1.1963.p. 71-74
11. Noe, T.D.Primes in Fibonacci n-step and Lucas n-step sequences IT.D: Noe, J.V. Post//Journal of Integer Sequences.-2005.-Vol.8-05.4.4.

ДОДАТОК

Програма пошуку мішаного добутку векторів зі спеціально заданими координатами.




Delphi 7 - Project2
File Edit Search View Project Run Component Database Tools CnPack GExperts Window Help
Project2.dpr
Procedures
Types
Variables/Constants
Uses
Project2*
Minor
begin
if N=1 then Det:=A[N,N];
if N=2 then Det:=A[1,1]*A[2,2]-A[2,1]*A[1,2];
if N>2 then
begin
S:=0;
for I:=1 to N do
begin
Mn:=Minor(B,A,N,I,1);
if (I mod 2)=1 then begin
T:=Det(B,N-1);
S:=S+T*A[I,1];
end
else begin
T:=Det(B,N-1);
S:=S-T*A[I,1];
end;
end;
Det:=S;
end;
end;
Begin
f[1]:=1;
f[2]:=1;
f[3]:=2;
for i:=4 to 100 do
f[i]:=f[i-1]+f[i-2]+f[i-3]+f[i-3];
k:=2;
n:=2;
for i:=1 to 4 do
begin
for j:=1 to 4 do
begin
m[i,j]:=f[k+3]-f[n];
k:=k+1;
n:=n+1;
end;
n:=n-3;
end;
for i:=1 to 4 do
28: 26 Modified Insert
Code


Delphi 7 - Project2
File Edit Search View Project Run Component Database Tools CnPack GExperts Window Help
Project2.dpr
Procedures
Types
Variables/Constants
Uses
Project2*
end
else begin
T:=Det(B,N-1);
S:=S-T*A[I,1];
end;
end;
Det:=S;
end;
end;
Begin
f[1]:=1;
f[2]:=1;
f[3]:=2;
for i:=4 to 100 do
f[i]:=f[i-1]+f[i-2]+f[i-3]+f[i-3];
k:=2;
n:=2;
for i:=1 to 4 do
begin
for j:=1 to 4 do
begin
m[i,j]:=f[k+3]-f[n];
k:=k+1;
n:=n+1;
end;
n:=n-3;
end;
for i:=1 to 4 do
begin
for j:=1 to 4 do
write(m[i,j]:0:1,' ');
writeln('');
end;
Writeln(det(m,3):0:1) ;
Readln(k);
end.
92: 69 Modified Insert
Code