Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки
Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика

Секція: математика

Рівняння та нерівності з параметрами

Роботу виконала:
Устичук Марія Віталіївна,
учениця 9 класу
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області
Науковий керівник:
Труш Галина Антонівна,
вчитель математики
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної та вищої
математики ЧДУ імені Петра Могили

Миколаїв – 2019

ТЕЗИ

Рівняння та нерівності з параметрами

Устичук Марія Віталіївна; Центральна загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів; 9 клас; Снігурівський район; Воробйова Алла Іванівна; кандидат фізико-математичних наук; доцент кафедри прикладної та вищої математики ЧДУ імені Петра Могили

Задачі з параметрами вважаються складними для розв'язання учнями через складність сприйняття умови і подальших аналітичних розрахунків [1]; ускладнену побудову графіка або математичної моделі; відсутність досконалого володіння курсом математики і високої логічної культури мислення у переважної більшості учнів [2]. Але вони так необхідні для розвитку логічного мислення учнів та формування уміння використовувати віртуальне середовище і комп'ютерні засоби для побудови графіків функцій.

У роботі представлені теоретичні відомості про основні типи рівнянь та нерівностей з параметрами, методи їх розв'язування та власні наукові дослідження з даної теми.

Мета роботи полягає в тому, щоб за допомогою алгебраїчного та графічних методів дослідити вплив параметра на зміну розв'язків рівняння чи нерівності та показати на практиці під час розв'язання рівнянь і нерівностей першого та другого степенів.

В результаті дослідження було розглянуто поняття рівняння з параметрами, основні типи задач з параметрами і загальні методи їх розв'язування; представлено власні розв'язання окремих задач з параметрами курсу алгебри 9 класу аналітичним та графічним методами з використанням програми динамічної математики GeoGebra Classic.

Отримані результати свідчать, що розв'язування рівнянь та нерівностей з параметрами передбачає обов'язкове дослідження існування розв'язку залежно від конкретних числових значень параметрів із області їх допустимих значень, а також знаходження всіх таких розв'язків.

ЗМІСТ

ВСТУП 4
РОЗДІЛ I. ОСНОВНІ ТИПИ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ТА ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ 6
1.1. Основні типи задач з параметрами. 6
2.1.Загальні методи розв'язування задач з параметрами 7
2.1.1.. Алгебраїчний (аналітичний) метод. 7
2.1.2. Графічний метод. Координатна площина (x; y). 8
РОЗДІЛ II. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРАМИ 11
РОЗДІЛ III. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРАМИ 14
3.1. Рівняння другого степеня з параметрами 14
3.2.. Нерівності другого степеня з параметрами 20
3.3. Системи рівнянь другого степеня з параметрами 23
ВИСНОВКИ 27
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 29
ДОДАТКИ 30
Додаток 1 Розв'язання рівнянь та нерівностей з параметром з курсу алгебри для учнів 9 класу [5]; 30

ВСТУП

> Те, що я встиг пізнати, – чудово.
> Сподіваюся, таке ж чудове те, що
> мені ще доведеться пізнати.
> (Сократ)

Перше рівняння з параметром я розв'язала у 5 класі з підручника А.Г. Мерзляка, де автор пропонує наступне завдання:

№279. Яке число треба підставити замість *a*, щоб коренем рівняння $(x + a) - 7 = 42$ було число 22?

І все ж таки я вважаю, що знайомство з параметром розпочалося на уроках алгебри у 7 класі під час розв'язування лінійних рівнянь. І на перший погляд мені здалося, що все дуже просто і ясно. Але порівнявши задачі з параметрами з іншими задачами, виявилося, що вони набагато складніші, бо для їх розв'язування необхідні ґрунтовні знання властивостей елементарних функцій, рівносильних перетворень рівнянь, нерівностей та їх систем. Одне й те саме рівняння можна розв'язати декількома різними способами і дослідити результат розв'язання за допомогою графіків. І я поринувши у світ цей незнайомий побачила: з одного боку параметр – це число, а з іншого – це невідоме. Кожна задача з параметром передбачає розв'язання цілого ряду різноманітних математичних задач. Для чого мені це потрібно? Для того, щоб підійматися до вершини пізнання шляхом участі у олімпіаді з математики та математичних конкурсах. А далі що? Задачі з параметрами сприяють розвитку творчих здібностей та логічного мислення, культури математичного мовлення, формуванню інтелектуальних умінь, навичок дослідження. Адже в умовах Нової української школи випускник повинен бути всебічно розвиненим, конкурентоспроможним, здатним до інновацій.

Задачі з параметрами відносять до задач, які вимагають вдумливого і всебічного дослідження, оскільки кожного разу потрібно знаходити всі можливі значення параметра, за яких задача має розв'язки. Спроба негайно розв'язати шляхом лише формальних перетворень досить часто призводить до суттєвих помилок, оскільки нехтування логічними міркуваннями або невміння виконувати аналіз задачі не дозволяє вичерпати усі можливі ситуації. Наявність параметра фактично додає ще одне невідоме в рівняння, нерівність, систему рівнянь, нерівностей. Тому такі задачі дозволяють формувати у учнів різноваріантність, повноту і винахідливість мислення. Задачі з параметрами дозволяють також глибше з'ясувати суть функціональної залежності.

Саме при розв'язуванні задач з параметром часто доречним стає звертання до графічного подання умови задачі. Воно дає можливість охопити усі дані в сукупності і відшукати найпростіший спосіб розв'язування. [3]

Актуальність даної проблеми полягає в тому, що через розв'язування рівнянь з параметрами лежить прямий шлях до подолання творчого рівня завдань ЗНО; можливість отримати максимальний бал під час складання та витримати конкуренцію вступу до ВНЗ. Також параметри тісно пов'язані з такими науками як фізика, астрономія, інформатика, економіка. Уміння розв'язувати задачі з параметрами допомагає досліджувати реальні процеси навколишнього світу. Задачі з параметрами нерідко з'являються у прикладних напрямках елементарної математики та в дослідницьких завданнях. Вони сприяють формуванню в учнів логічного мислення, розвитку вміння лаконічно та прозоро записувати розв'язання, перебирати всі можливі варіанти розташування графіків, що є основою для виховання юних дослідників природничих наук. [4]

Мета виконання науково-дослідницької роботи:

- дослідити яким чином введення параметра змінює розв'язки рівняння і нерівності та показати це за допомогою використання програми динамічної математики GeoGebra Classic.

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ТИПИ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРОМ ТА ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Рівняння з параметрами – це рівняння виду $f(x; a_1; a_2; a_3; \dots;\ a_n) = 0$, де х – шукане невідоме, а $a_1; a_2; a_3; \dots;\ a_n$ – змінні параметри.

Значення параметрів $a_1; a_2; a_3; \dots;\ a_n$, при яких вираз $f(x; a_1; a_2; a_3; \dots;\ a_n)$ має зміст при деяких значеннях х, називають допустимим.

Розв'язування рівнянь з параметрами визначається залежно від допустимих значень параметрів.

Розв'язати рівняння з параметром означає, що для кожного значення параметра *a* слід установити, чи має рівняння розв'язки, які залежать від параметра *a*.

1.1. Основні типи задач з параметрами.

Розглянемо основні типи задач з параметрами.

I. Рівняння (нерівність, система), які необхідно розв'язувати для всіх значень параметра або із заданого проміжку.

II. Рівняння (нерівність, система), в яких треба знайти кількість розв'язків в залежності від значень параметра;

III. Рівняння (нерівність, система), в яких необхідно знайти значення параметра, при яких рівняння має задану кількість розв'язків;

IV. Рівняння (нерівність, система), в яких необхідно знайти значення параметра, при яких множина розв'язків задовольняє задану умову. Іншими словами: задачі, в яких вимагається знайти усі значення параметра, за яких множина розв'язків рівняння (нерівності, системи) буде розташованою певним чином на числовій прямій. Наприклад знайти значення параметра *a*, для яких:

1). рівняння справджується для будь-якого дійсного значення змінної;

2). множина розв'язків рівняння міститься на заданому проміжку;

3). рівняння справджуються для будь-якого дійсного значення змінної, що належить заданому проміжку;

4). з одного рівняння витікає інше;

5). жоден розв'язок першого рівняння не є розв'язком другого і т. д.

Зрозуміло, що аналогічні задачі можна поставити і для нерівностей та систем. Задачі типу IV називають ще задачами з додатковими умовами.

2.1.Загальні методи розв'язування задач з параметрами

2.1.1.. Алгебраїчний (аналітичний) метод.

Продемонструємо алгебраїчний метод на прикладі.

Приклад 1.

Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння $|x+2| = ax$ (1).

За означенням модуля маємо

$\begin{cases} x+2 = ax, \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} -(x+2) = ax, \\ x+2 < 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} (a-1)x = 2, \\ x \geq -2 \end{cases}$ (2)

або $\begin{cases} (a+1)x = -2, \\ x < -2. \end{cases}$ (3).

Таким чином, рівняння (1) еквівалентне сукупності систем рівнянь (2) і (3)

Розглянемо спочатку систему (2): $x = \frac{2}{a-1}$ при $\frac{2}{a-1} \geq -2$; $\frac{a}{a-1} \geq 0$,

звідки $a \leq 0$ або $a > 1$.

Система (3) має розв'язок $x = \frac{-2}{a+1}$, якщо $\frac{-2}{a+1} < -2, \frac{1}{a+1} > 1, \frac{a}{a+1} < 0$,

звідки $-1 < a < 0$.

Отже, остаточно маємо $x_1 = \frac{2}{a-1}$, $a \leq 0, a > 1$; $x_2 = \frac{-2}{a+1}$, $-1 < a < 0$. **(рис.1)**

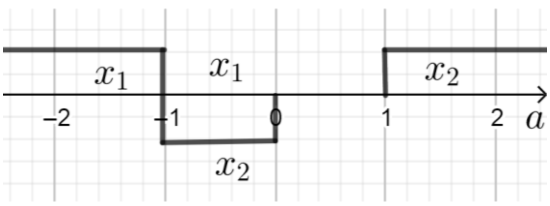


Рис.1

Відповідь: якщо $a \leq -1, a = 0, a > 1$ – один розв'язок $x = x_1$;

якщо $-1 < a < 0$ – два розв'язки $x = x_1, x = x_2$;

якщо $0 < a < 1$, розв'язків не існує.

2.1.2. Графічний метод. Координатна площина (x; y).

Приклад 2.

Скільки розв'язків має рівняння (1) залежно від параметра a?

Розглянемо графіки функцій: $$y = |x+2|, \quad (4)$$ $$y = ax. \quad (5)$$

Графік (4) нерухомий (статичний). Графік (5) рухомий (динамічний). Рівняння (5) визначає сукупність прямих, що проходять через точку (0;0).

В разі зміни параметра a від -∞ до +∞ пряма $y = ax$ обертається, починаючи від вертикального положення ліворуч від осі ординат, навколо початку координат, рухаючись проти годинникової стрілки **(рис. 2).**

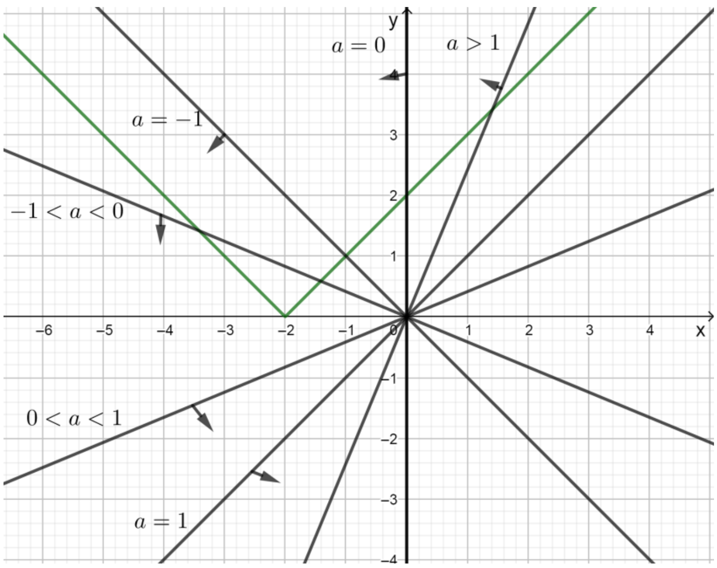


Рис.2

Очевидно, кількість розв'язків рівняння (1) буде визначатися кількістю точок перетину графіків (4) і (5). При $-\infty < a \leq -1$ пряма $y = ax$ перетинає нерухомий графік $y = |x+2|$ в одній точці, при подальшому зростанні параметра a до значення $a = 0$ у двох точках; при $a = 0$ в одній точці; при зростанні параметра a до значення $a = 1$ пряма $y = ax$ не має спільних точок з нерухомим графіком, при $a > 1$ графіки знову мають одну спільну точку.

Відповідь: якщо $0 < a \leq 1$, розв'язків не існує; якщо $-\infty < a \leq -1, a = 0, a > 1$ - один розв'язок; якщо $-1 < a < 0 -$ два розв$'$язки.

3. Графічний метод. Координатна площина *(x; a)*.

Приклад 3. За якого значення параметра *a* рівняння (1) не має розв'язків?

Розв'яжемо рівняння (4) відносно параметра *a*: $a = \frac{|x+2|}{x}$ (6). (Зауважимо, що $x = 0$ не є розв'язком рівняння (4).)

В прямокутній декартовій системі координат побудуємо графік функції (6), розглядаючи вісь ординат як вісь параметра *a*. Оскільки $a = \begin{cases} \frac{x+2}{x}, x \geq -2, \\ -\frac{x+2}{x}, \ x < -2, \end{cases}$ то $a = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x}, x \geq -2, \\ -1 - \frac{2}{x}, \ x < -2. \end{cases}$ Отже, графік функції (6) складається з відповідних ділянок гіпербол $a = 1 + \frac{2}{x}$ і $a = -1 - \frac{2}{x}$ **(рис. 3).** Побудуємо пряму *l*, яка визначається рівнянням $a = a_0$.

При зміні значень a_0 пряма *l* буде рухатись паралельно осі *x*.

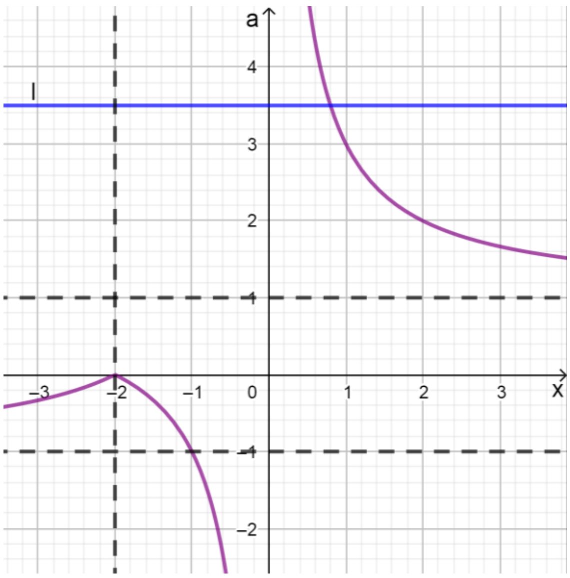


Рис.3

Якщо $0 < a \leq 1$, то точок перетину прямої *l* з графіком функції (6) не існує.

Відповідь: $0 < a \leq 1$.

Отже, можна зробити наступні висновки

1. Параметр – фіксоване, але невідоме число.
2. Розв’язати рівняння (нерівність, систему) з параметром – означає для кожного допустимого значення параметра знайти множину всіх коренів даного рівняння (множину всіх розв’язків даної нерівності, системи).
3. Основний принцип розв’язування задачі з параметром полягає у необхідності розгляду різних випадків залежно від певних значень параметра.
4. Відповідь до задачі з параметром формується у вигляді списку ділянок зміни параметра з поданням до кожної ділянки розв’язків задачі.
5. Складність задач з параметрами обумовлюється тим, що, як правило, разом із зміною параметра змінюються не лише коефіцієнти, але й ряд інших характеристик. Зокрема, може змінюватися степінь рівняння або нерівності, область допустимих значень і т. д. [3]

РОЗДІЛ II. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРАМИ

Задача 1. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1)x = a + 1$.

Розглянемо окремо три випадки щодо зміни параметра.

1). Якщо $a = -1$, то рівняння набирає вигляду $0 \cdot x = 0$.

Таке рівняння задовольняє будь - яке число.

2). Якщо $a = 1$, то $0 \cdot x = 2$. Це рівняння не має розв'язків.

3). Якщо $a \neq \pm 1$, то рівняння має єдиний розв'язок $x = \frac{1}{a-1}$.

Відповідь: Якщо $a = -1$, то x - будь- яке число; якщо $a = 1$, то розв'язків не існує; якщо $|a| \neq 1$, то $x = \frac{1}{a-1}$.

Задача 2. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\frac{x-a}{x-8a} < 0$ виконується для всіх x, що належать відрізку $[2; 4]$.

Задача полягає у відшуканні таких значень параметра a, при кожному з яких множина розв'язків нерівності містить проміжок $2 \leq x \leq 4$. Будемо розв'язувати дану нерівність методом інтервалів. З цією метою позначимо на числовій осі точки $x = a$ і $x = 8a$. Якби a було фіксоване, то задача б мала простий розв'язок. Але для задач з параметром характерним є те, що процес впорядкування коренів за зростанням відокремлюється в самостійний фрагмент розв'язку. Залежно від того яким може бути число a, точки $x = a$ і $x = 8a$ будуть відрізнятися своїм розташуванням на числовій осі і залежно від цього відрізнятимуться записи розв'язків нерівності **(рис. 4).**

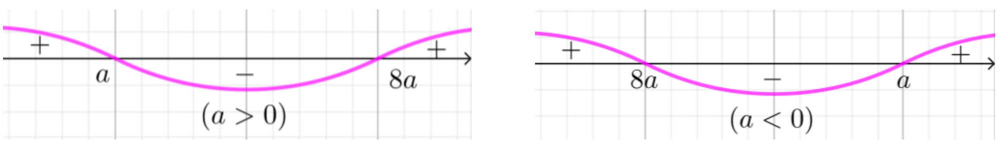


Рис. 4

Якщо $a = 0$, то $\frac{x}{x} < 0$, розв'язків не існує; якщо $a > 0$, то $a < x < 8a$. Якщо $a < 0$, то $8a < x < a$. У випадку $a < 0$ вихідну нерівність задовольняють лише від'ємні числа. Тому жодне з таких a не задовольняє умову задачі. У випадку $a > 0$ множина розв'язків містить відрізок $[2; 4]$, коли одночасно маємо $a < 2$ і $8a > 4$, тобто $\begin{cases} a < 2 \\ 8a > 4 \end{cases}$, звідки $\frac{1}{2} < a < 2$.

Відповідь: $\frac{1}{2} < a < 2$.

Задача 3. Розв'язати нерівність $|1 + x| \leq ax$.

1). $a = 0, |1 + x| \leq 0, x = -1$

2). $a > 0$. При $x \leq 0$ розв'язків не існує;

Нехай $x > 0$. Тоді $\begin{cases} -ax \leq 1 + x \leq ax, \ldots \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq (a-1)x, \\ x(a+1) \geq -1, \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ (1)

звідки за умови, що $a > 1$, дістаємо: $x \geq \frac{1}{a-1}$. Якщо ж $0 < a \leq 1$, то $(a-1)x \leq 0$, звідки $1 \leq 0$. Це означає, що система (1) є несумісною;

3). $a < 0$. При $x \geq 0$ розв'язків не існує. Нехай $x < 0$. Тоді $\begin{cases} (a-1)x \geq 1, \\ (a+1)x \geq -1, \\ x < 0, \\ a < 0. \end{cases}$ (2)

Якщо $-1 < a < 0$, то $a + 1 > 0, a - 1 < 0$.

Тому $\begin{cases} x \leq \frac{1}{a-1}, \\ x \geq -\frac{1}{a+1}, \\ x < 0, \\ a < 0, \end{cases}$ звідки $-\frac{1}{a+1} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$.

Якщо $a \leq -1$, то $a + 1 \leq 0$, $(a+1)x \geq 0$. Отже, система (2) буде рівносильна такій системі: $\begin{cases} a \leq -1, \\ x \leq -\frac{1}{a-1} \end{cases}$, звідки $-\infty < x \leq \frac{1}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a \leq -1$, то $-\infty < x \leq \frac{1}{a-1}$;

якщо $-1 < a < 0$, то $-\frac{1}{a+1} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$;

якщо $a = 0,$ то $x = -1;$

якщо $0 < a \leq 1,$ то розв'язків не існує;

якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a-1} \leq x < +\infty.$

Задача 4. Розв'язати нерівність $|3x - 1| < 2a - 3$ (1).

Розглянемо такі два випадки:

1). $2a - 3 \leq 0$, тоді $|3x - 1| < 0.$

Ліва частина останньої нерівності невід'ємна, тому нерівність розв'язків не має;

2). $2a - 3 > 0$; тоді нерівність (1) можна замінити подвійною нерівністю

$-(2a - 3) < 3x - 1 < 2a - 3,$

$3 - 2a < 3x - 1 < 2a - 3,$

$4 - 2a < 3x < 2a - 2,$

$$\frac{4 - 2a}{3} < x < \frac{2a - 2}{3}.$$

Відповідь: якщо $a \leq 1\frac{1}{2}$, то розв'язків нерівності не існує; якщо $a > 1\frac{1}{2}$, то $\frac{4-2a}{3} < x < \frac{2a-2}{3}$.

Отже, розв'язання рівнянь та нерівностей з параметром вимагає від учнів детального аналізу та дослідження їх виразів, незалежно від того який вони мають вигляд і яким способом будуть розв'язуватися.

РОЗДІЛ ІІІ. РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ З ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Рівняння другого степеня з параметрами

Задача 1. Розв'яжіть нерівність $ax^2 < 1$.

1). Якщо $a = 0$, то $0 \cdot x^2 < 1$. Ця нерівність є правильною при будь – якому дійсному x.

2). Якщо $a > 0$, то нерівність рівносильна нерівності $x^2 < \frac{1}{a}$, розв'язки якої складають проміжок $-\frac{1}{\sqrt{a}} < x < \frac{1}{\sqrt{a}}$.

3). Якщо $a < 0$, то ліва частина нерівності є число від'ємне при будь-якому x.

Відповідь: $a \leq 0$, то $-\infty < x < +\infty$; якщо $a > 0$, то $|x| < \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Задача 3. За яких значень параметра рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$ має один розв'язок?

1). Якщо $a = 0$, то рівняння перестає бути квадратним і $x = -\frac{1}{2}$.

2). Якщо $a \neq 0$, $D = 4(1 - a) = 0, a = 1$ і $x = -1$.

Відповідь: $a = 0$ або $a = 1$.

Задача 4. За яких *a* рівняння $\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$ має єдиний корінь?

Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Маємо $D = a^2 - 4 = 0,$ якщо $a = \pm 2$.

Проте цим усі шукані значення параметра *a* не вичерпуються. Справді, відшукаємо те значення параметра *a*, при якому один із коренів $x = -3$. Підставимо $x = -3$ в рівняння. Дістанемо $a = -\frac{10}{3}$. Отже при $a = -\frac{10}{3}, x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{1}{3}$. Корінь x_1 звичайно відкидаємо, тому $x_2 = -\frac{1}{3}$ буде єдиним коренем при $a = -\frac{10}{3}$.

Відповідь: $a = \pm 2$, $a = -\frac{10}{3}$.

Задача 6. За яких значень m число 1 лежить між коренями рівняння $x^2 - 2mx + 2m^2 - 4m + 3 = 0$.

Для того щоб число 1 знаходилось між коренями рівняння, необхідно і досить, щоб виконувалась умова $a \cdot f(1) < 0$, де $a = 1, f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 - 4m + 3, a \cdot f(1) = 1 - 2m + 2m^2 - 4m + 3 < 3,$ звідки $m^2 - 3m + 2 < 0, 1 < m < 2$.
Відповідь: $1 < m < 2$.

Задача 7. Знайти всі значення параметра *a,* при кожному з яких корені квадратного тричлена $x^2 + ax + 1$ різні і лежать на відрізку $[0; 2]$.

Дискримінант D квадратного тричлена $f(x) = x^2 + ax + 1$ дорівнює $D = a^2 - 4$. Для існування різних коренів необхідна умова $D > 0$, тобто $a^2 - 4 > 0$. З умови задачі випливає, що разом з коренями проміжку $[0; 2]$ повинна належати й абсциса вершини параболи $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a}{2}$ **(рис. 7).** Тому ще одну необхідну умову на

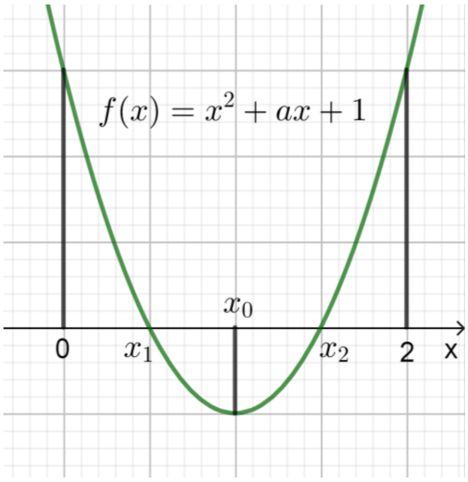


Рис.7

параметр дають нерівності $0 < -\frac{a}{2} < 2$. Коефіцієнт при x^2 заданого тричлена є додатним, тому точки 0 і 2, які лежать поза відрізками $[x_1; x_2]$, повинні задовольняти нерівності $f(0) = 1 \geq 0$ і $f(2) = 2a + 5 \geq 0$. (1)

Таким чином, шукані значення параметра *a* задовольняють систему нерівностей $a^2 - 4 > 0,\ 0 < -\frac{a}{2} < 2,\ 2a + 5 \geq 0$. Легко побачити, що ці умови є достатніми, тобто якщо параметр *a* задовольняє умови (1), то заданий квадратний тричлен має різні корені, що належать відрізку $[0; 2]$. Розв’язуючи систему нерівностей (1), знаходимо шукану множину значень параметра: $-2{,}5 \leq a \leq -2$.

Відповідь: $-2{,}5 \le a \le -2$.

Задача 10. Знайти такі a, за яких рівняння має три різні корені:

$x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$ (1).

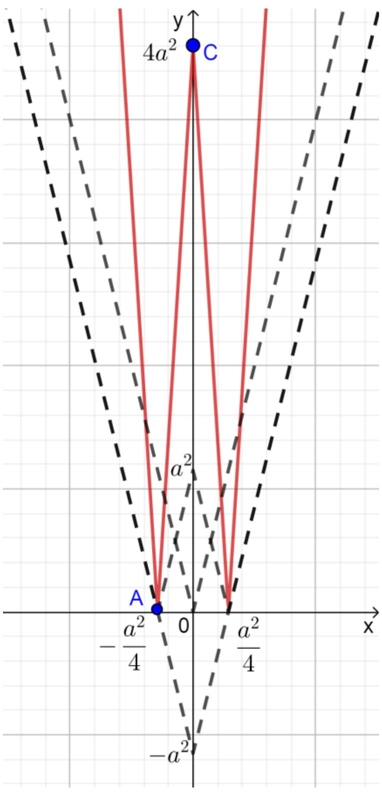
Побудуємо в декартовій системі координат графіки двох функцій **(рис.13)**:

$f(x) = x - \frac{a}{2}$ (2); $g(x) = 4|4|x| - a^2|$ (3).

Графік функції $g(x)$ побудований шляхом елементарних перетворень, виходячи з графіка функції $y_1 = 4|x|$: $y_1 = 4|x| \to y_2 = 4|x| - a^2 \to y_3 = |4|x| - a^2| \to g(x) = 4|4|x| - a^2|$.

Графіки функцій $f(x) = x - \frac{a}{2}$ з різних фіксованих значень параметра a утворюють сукупність прямих, паралельних прямій $y = x$.

Тепер одночасно розглянемо поведінку двох «динамічних» графіків у декартовій системі координат **(рис.14)**.



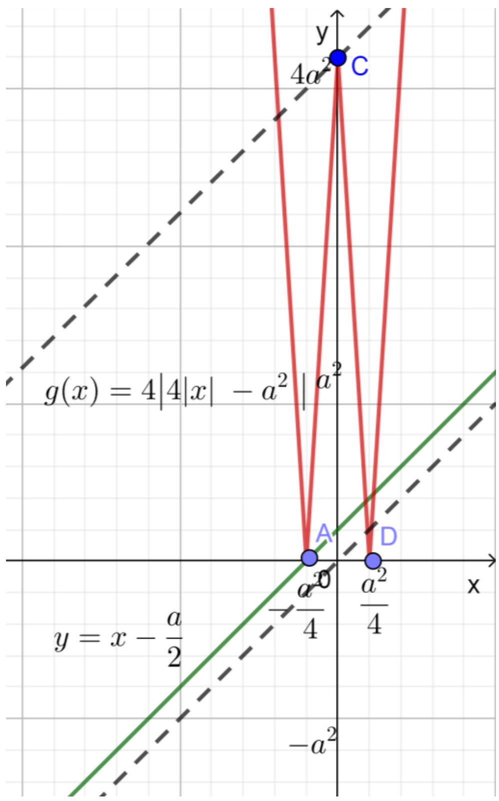


Рис. 13 Рис.14

З рис. 14 бачимо, що рівняння (1) матиме три розв'язки коли пряма $y = x - \frac{a}{2}$ буде проходити через точки $A(-\frac{a^2}{4}; 0)$ і $C(0; 4a^2)$.

Підставимо координати точки A у рівняння (2): $-\frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} = 0$ звідки $-a(a+2) = 0$;

При $a = 0$ рівняння (1) матиме лише один розв'язок. Якщо $a = -2$, то $x + 1 = 4|4|x| - 4|$, $x + 1 = \pm(16|x| - 16)$, звідки $x + 1 = 16|x| - 16$ (4) і $x + 1 = -16|x| + 16$ (5).

Розглянемо рівняння (4):

а) $\begin{cases} x + 1 = 16x - 16, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = 17, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $x = 1$;

б) $\begin{cases} x + 1 = -16x - 16, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = -17, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ x < 0, \end{cases}$ $x = -1$.

Перейдемо до розгляду рівняння (5):

в) $\begin{cases} x + 1 = -16x + 16, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = 15, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{15}{17}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $x = \frac{15}{17}$;

г) $\begin{cases} x + 1 = 16x + 16, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 15x = -15, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1, \\ x < 0, \end{cases}$ $x = -1$.

Розв'язок системи г) дорівнює розв'язку системи б).

Отже значення $a = -2$ є шуканим.

При $a = -2$ рівняння (1) має три корені: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = \frac{15}{17}$.

Тепер підставимо координати точки C в рівняння (2): $-\frac{a}{2} = 4a^2$; $a(8a + 1) = 0; a \neq 0$. При $a = -\frac{1}{8}$ рівняння (1) набирає вигляду $x + \frac{1}{16} = 4\left|4|x| - \frac{1}{64}\right|$.

$x + \frac{1}{16} = \pm(16|x| - \frac{1}{16})$, звідси $x + \frac{1}{16} = 16|x| - \frac{1}{16}$ (6) і $x + \frac{1}{16} = -16|x| + \frac{1}{16}$ (7).

Розглянемо рівняння (6):

а) $\begin{cases} x + \frac{1}{16} = 16x - \frac{1}{16}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 15x = \frac{1}{8}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{120}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $x = \frac{1}{120}$;

б) $\begin{cases} x + \frac{1}{16} = -16x - \frac{1}{16}, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = -\frac{1}{8}, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{1}{136}, \\ x < 0, \end{cases}$ $x = -\frac{1}{136}$.

Перейдемо до розгляду рівняння (7):

в) $\begin{cases} x + \frac{1}{16} = -16x + \frac{1}{16}, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 17x = 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ x \geq 0, \end{cases}$ $x = 0$;

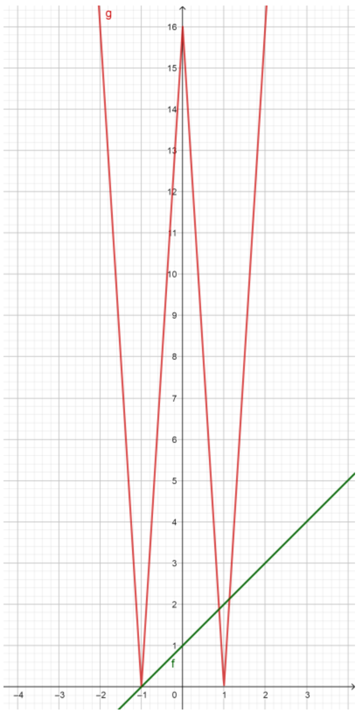
г) $\begin{cases} x + \frac{1}{16} = 16x + \frac{1}{16}, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 15x = 0, \\ x < 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ x < 0. \end{cases}$ – розв'язку не має.

Отже значення $a = -\frac{1}{8}$ є шуканим.

При $a = -\frac{1}{8}$ рівняння (1) має три корені: $x_1 = \frac{1}{120}$; $x_2 = -\frac{1}{136}$; $x_3 = 0$.

Відповідь: $a = -2$; $a = -\frac{1}{8}$.

Для більш глибокого розуміння суті задачі підставимо значення $a = -2$ і $a = -\frac{1}{8}$ у рівняння (1) і окремо для кожного з рівнянь $x + 1 = 16\big||x| - 1\big|$, $x + \frac{1}{16} = 4\left|4|x| - \frac{1}{64}\right|$ побудуємо графіки $f(x) = x + 1$ і $g(x) = 16\big||x| - 1\big|$ **(рис.15)** та $f(x) = x + \frac{1}{16}$ і $g(x) = 4\left|4|x| - \frac{1}{64}\right|$ **(рис.16)**.



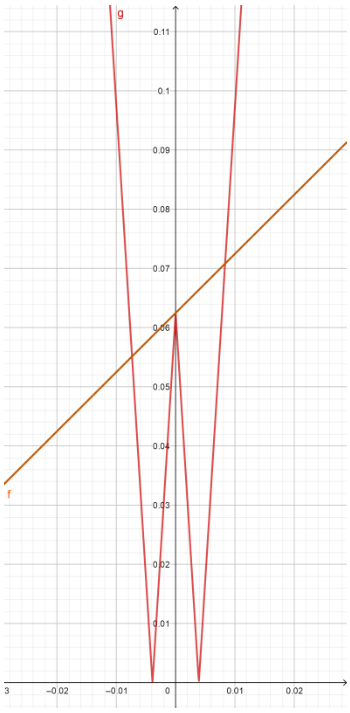


Рис.15 Рис.16

Таким чином, продемонструвавши аналітичний та графічний методи розв’язання рівнянь та нерівностей з параметром, я прийшла до висновку, обидва методи ефективні в ході розв’язування: перший допомагає детально проаналізувати хід думок та точно отримати результат; другий – наочно демонструє залежність розв’язків від значення параметру та дає простіше розв’язати питання про кількість коренів рівняння з параметром. Але недоліком графічного методу є те, що значення точок перетину графіків визначаються наближено.

3.2.. Нерівності другого степеня з параметрами

Задача 8. Розв'язати нерівність $2|x-a| < 2ax - x^2 - 2$ (1).

1 спосіб. Розглянемо два випадки

1). $x - a \geq 0, x \geq a$; тоді маємо $\begin{cases} x \geq a, \\ 2(x-a) < 2ax - x^2 - 2, \end{cases}$ або

$$\begin{cases} x \geq a, \\ x^2 + 2(1-a)x + 2(1-a) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Знайдемо корені квадратного рівняння $x^2 + 2(1-a)x + 2(1-a) = 0$:

$x_1 = a - 1 - \sqrt{a^2 - 1}$; $x_2 = a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$.

Дискримінант $D = a^2 - 1$, тому при $|a| \leq 1$ нерівність розв'язків не має.

Нехай $|a| > 1$. Тоді систему (2) можна замінити такою системою: $\begin{cases} |a| > 1, \\ x_1 < x < x_2, \\ x \geq a. \end{cases}$

З'ясуємо, за яких a справджується нерівність $x_2 = a$; $x_2 = a - 1 + \sqrt{a^2 - 1} \geq a$, $\sqrt{a^2 - 1} \geq 1, |a| \geq \sqrt{2}$.

Корінь x_1 менший від a при $|a| \geq \sqrt{2}$ **(рис. 8).**

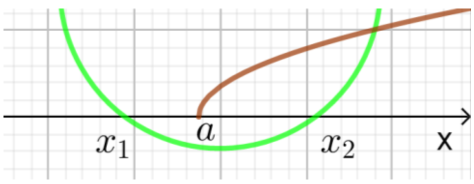


Рис.8

Справді, $a - 1 - \sqrt{a^2 - 1} < a$, оскільки $-1 - \sqrt{a^2 - 1} < 0$.

Отже, $x_1 < a \leq x_2$.

Якщо $|a| = \sqrt{2}$, то $x_2 = a$ і розв'язків не існує.

Таким чином, при $|a| > \sqrt{2}$ $\quad a \leq x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$ (3).

2). $x - a < 0, x < a$. Нерівність (1) еквівалентна системі $\begin{cases} x < a, \\ x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) < 0. \end{cases}$ Корені рівняння $x^2 - 2(a+1)x + 2(a+1) = 0$; $x_3 = a + 1 - \sqrt{a^2 - 1}$; $x_4 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 1}$; $D = a^2 - 1$. При $|a| \leq 1$ розв'язків не існує.

Якщо $|a| > 1$, то маємо $\begin{cases} |a| > 1, \\ x_1 < x < x_2, \\ x < a. \end{cases}$

З'ясуємо, за яких a виконується нерівність $x_1 < a$; $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < a$, $\sqrt{a^2 - 1} > 1$, $|a| > \sqrt{2}$.

Корінь x_4 більший від a при $|a| > \sqrt{2}$ **(рис. 9).**

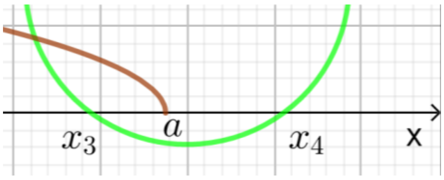


Рис.9

Справді, $a + 1 + \sqrt{a^2 - 1} > 0$, оскільки $1 + \sqrt{a^2 - 1} > 0$.

Отже, $x_3 < a < x_4$.

Таким чином, при $|a| > \sqrt{2}$ $x_3 < x < a$, або $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < x < a$ (4).

Об'єднуючи розв'язки (3) і (4), остаточно дістанемо:

Відповідь: при $|a| > \sqrt{2}$ $a + 1 - \sqrt{a^2 - 1} < x < a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$;

при $|a| \leq \sqrt{2}$ розв'язків не існує.

2 спосіб.

Виділимо повний квадрат у правій частині нерівності (1): $2ax - x^2 - 2 = -(x^2 - 2ax + 2) = -(x^2 - 2ax + a^2 - a^2 + 2) = -(x^2 - 2ax + a^2) - 2 + a^2 = -(x - a)^2 + a^2 - 2$.

В декартовій системі координат побудуємо графіки функцій $y_1 = 2|x - a|$ і $y_2 = -(x - a)^2 + a^2 - 2$. **(рис.10)**

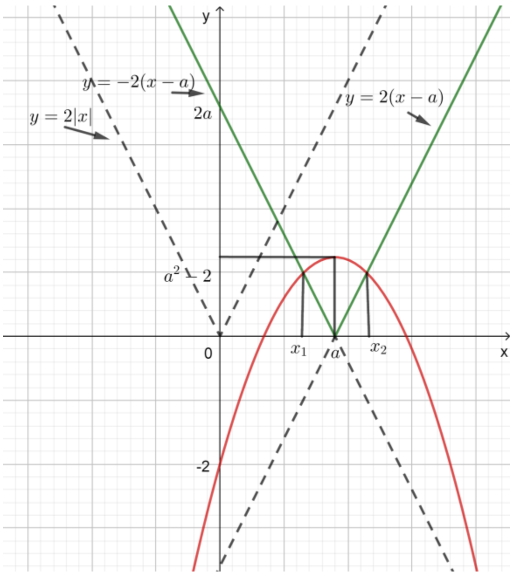


Рис.10

З рис. 10 бачимо, що графік функції $y_1 = 2|x-a|$ лежить нижче графіка функції $y_2 = -(x-a)^2 + a^2 - 2$ при $x_1 < x < x_2$, де x_2 більший корінь рівняння

$2(x-a) = 2ax - x^2 - 2 = -(x-a)^2 + a^2 - 2,$ (5)

а x_1 - менший корінь рівняння

$-2x + 2a = 2ax - x^2 - 2 = -(x-a)^2 + a^2 - 2,$ (6)

Якщо $a^2 - 2 < 0$, то графік функції $y_2 = -(x-a)^2 + a^2 - 2$ лежить нижче графіка функції $y_1 = 2|x-a|$ і нерівність (1) розв'язків не має, оскільки $y_1 > y_2$ при $x \epsilon R$. При $a^2 - 2 = 0$ графіки цих функцій мають лише одну спільну точку з абсцисою $x = a$.

Якщо $x \neq a$, то $y_1 > y_2$ і нерівність (1) не справджується. Отже, при $|a| \leq \sqrt{2}$ розв'язків не існує, а при $|a| > \sqrt{2}$ $\quad x_1 < x < x_2$.

Рівняння (5) можна розв'язати ще так. Нехай $x - a = t$; тоді $t^2 + 2t + 2 - a^2 = 0$; $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{a^2 - 1}$, звідси більший корінь $t_2 = -1 + \sqrt{a^2 - 1}$. Отже, $x_2 = a - 1 + \sqrt{a^2 - 1}$.

3.3. Системи рівнянь другого степеня з параметрами

Задача 2. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (ay + x)(x - a\sqrt{3}) = 0 \end{cases}$ залежно від параметра a?

Скористаємося геометричними міркуваннями, а саме: побудуємо графіки ліній: 1) $x^2 + y^2 = 9$; 2) $y = -\frac{x}{a}$; 3). $x = a\sqrt{3}$.

У першому випадку маємо рівняння кола радіуса 3 з центром у точці (0;0), в другому – пряма лінія, що проходить через початок координат, в третьому – пряма лінія, що проходить паралельно осі ординат **(рис.5).**

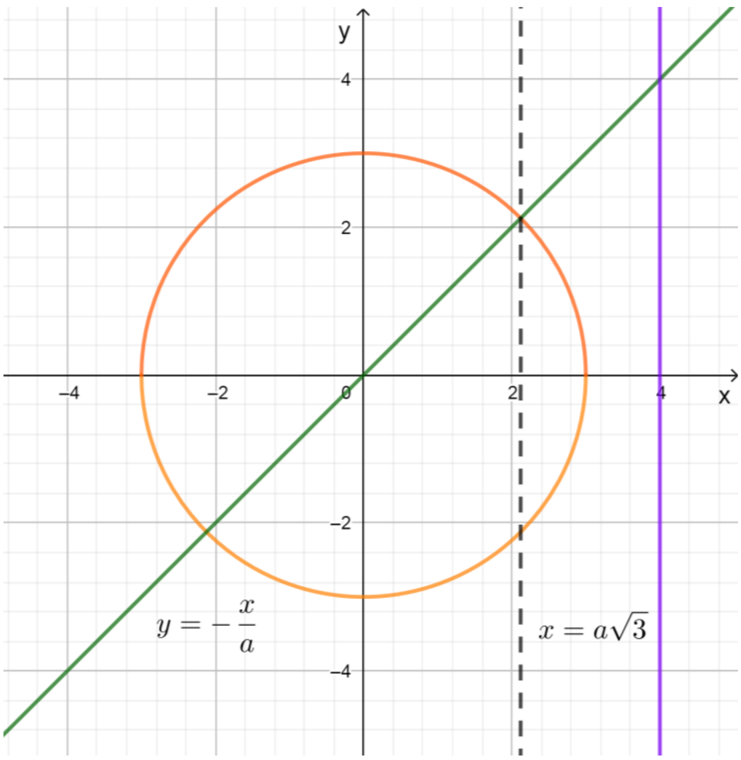


Рис.5

Якщо $a = 0$, то $x = 0, y = \pm 3$, тобто система має два розв'язки (0;3), (0;-3).

Нехай $a \neq 0$. При зміні значення параметра a, пряма $y = -\frac{x}{a}$ обертається навколо точки 0, пряма $x = a\sqrt{3}$ зміщується паралельно осі ординат. Тому можливі такі випадки:

а). якщо $|a\sqrt{3}| > 3$, тобто $|a| > \sqrt{3}$, то система має два розв'язки – вони визначаються координатами точок перетину прямої $y = -\frac{x}{a}$ та кола;

б). якщо $a = \sqrt{3}$, то система має три розв'язки і пряма $x = a\sqrt{3}$ в цьому випадку має єдину спільну точку з колом. Крім того, якщо точка перетину прямих: $y = -\frac{x}{a}$ та $x = a\sqrt{3}$ лежить на колі, то також отримаємо три розв'язки системи. Справді, нехай $x = a\sqrt{3}, y = -\frac{a\sqrt{3}}{a} = -\sqrt{3}$. Тоді $x^2 + y^2 = a^2 \cdot 3 + 3 = 9, a^2 = 2, |a| = \sqrt{2}$;

в). якщо $\sqrt{2} < |a| < \sqrt{3}, |a| < \sqrt{2}$ - чотири розв'язки.

Відповідь: якщо $a = 0, a > 3, a < -3 -$ два розв'язки; якщо $a = \pm\sqrt{2}, a = \pm\sqrt{3} -$ три розв'язки; якщо $-\sqrt{3} < a < -\sqrt{2}, -\sqrt{2} < a < \sqrt{2}, \sqrt{2} < a < \sqrt{3} -$ чотири розв'язки.

Задача 5. За якого значення параметра *a* система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$ має два розв'язки?

В координатній площині побудуємо графіки рівнянь, що входять до складу системи **(рис. 6).**

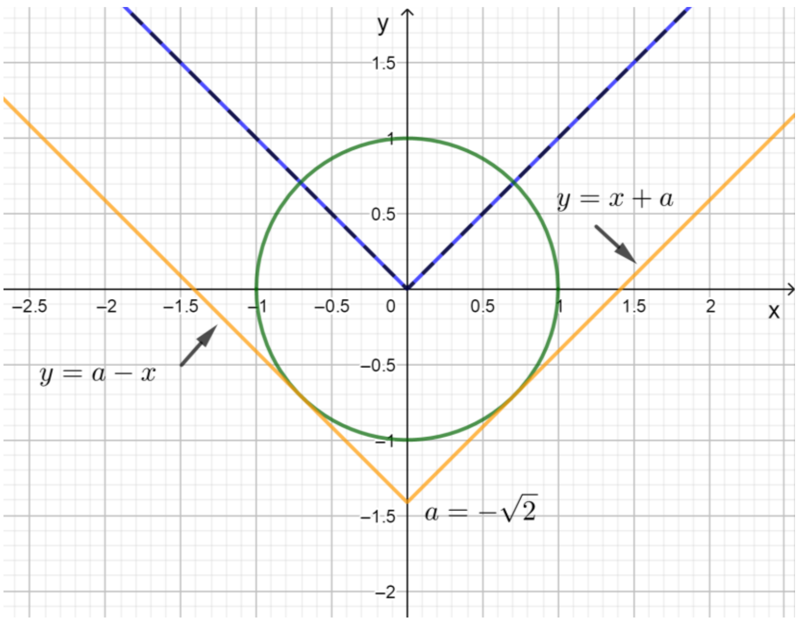


Рис.6

Зрозуміло, що при $-1 < a < 1$ графік $y = |x| + a$ буде перетинати одиничне коло в двох точках. Два розв'язки буде також при дотику прямої $y = x + a$ до кола. Тоді у рівнянні $x^2 + (x + a)^2 = 1$ дискримінант дорівнює нулю, звідки $a = -\sqrt{2}$. Зауважимо, що значення $a = -\sqrt{2}$ можна відшукати, користуючись лише геометричними міркуваннями.

Відповідь: $-1 < a < 1$, $a = -\sqrt{2}$.

Задача 9. За якого найбільшого a система $\begin{cases} y = \frac{x^2-5x+6}{|x-2|} + |x-3|, \\ y = a. \end{cases}$ (1)

має рівно один розв'язок?

Перепишемо систему (1) у такому вигляді **(рис.11)**: $\begin{cases} y = \frac{(x-2)(x-3)}{|x-2|} + |x-3|, \\ y = a. \end{cases}$ (2)

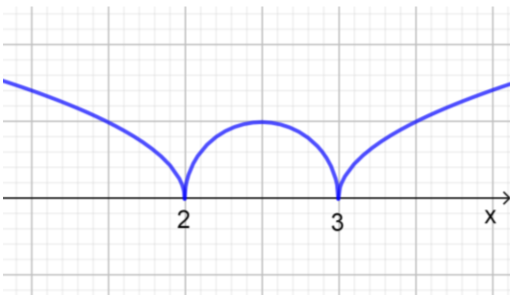


Рис.11

а) $-\infty < x < 2, |x-2| = 2 - x; |x-3| = 3 - x$. Отже, $y = \frac{(x-2)(x-3)}{-(x-2)} - (x-3) = -2(x-3), x \neq 2;$

б) $2 < x < 3, |x-2| = x - 2, |x-3| = -(x-3)$. Отже, $y = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} - (x-3) = 0;$

в) $x \geq 3, |x-2| = x - 2, |x-3| = x - 3$. Отже, $y = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} + (x-3) = 2(x-3).$

Таким чином, $y = f(x) = \begin{cases} -2(x-3), \ -\infty < x < 2, \\ 0, \ 2 < x < 3, \\ 2(x-3), \ 3 \leq x < +\infty\,. \end{cases}$ (3)

Побудуємо тепер у декартовій системі координат $x0y$ статичний графік функції, яку задано за допомогою формул (3), і динамічний графік $y = a$. Це пряма, паралельна осі абсцис. В разі зміни параметра a, пряма $y = a$ буде рухатись, залишаючись весь час паралельно осі абсцис **(рис. 12).**

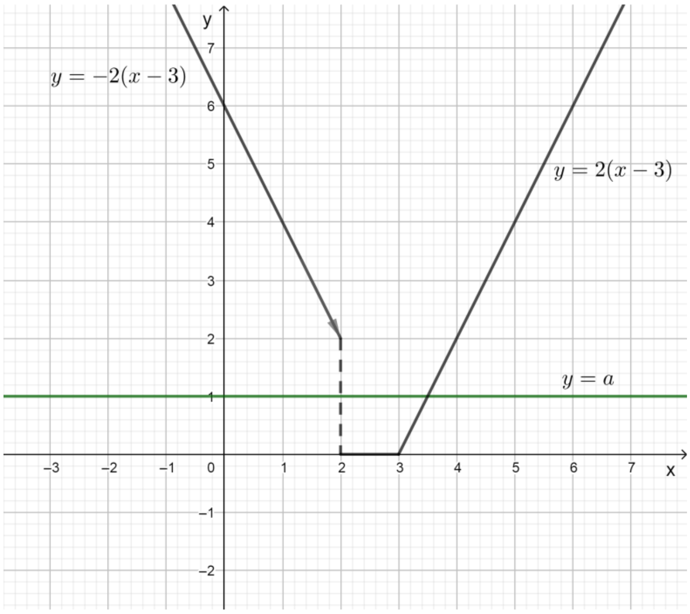


Рис.12

З графіка бачимо, що пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = f(x)$ в одній точці, коли $0 < a \leq 2$.

Отже, шуканим значенням параметра a є число 2.

Відповідь: $a = 2$.

ВИСНОВКИ

«Математика цікава тоді, коли дає поживу нашій винахідливості й здатності до міркувань». (Д.Пойя) А шляхи до її пізнання і завоювання лежать через розв'язування задач. Задачі з параметрами особливі, методи і підходи до їх розв'язування багатогранні. Чим складніше завдання тим цікавіше його досліджувати. Враховуючи отримані у роботі результати можна зробити висновок, що задачі з параметрами і є тими, що дають «поживу нашій винахідливості й здатності до міркувань».

Результати роботи :

- викладено теоретичну базу стосовно типів і методів розв'язування задач з параметром; показано їх практичність та ефективність застосування на конкретних прикладах;
- показано наочність графічного способу розв'язання та можливість бачити як змінюється кількість розв'язків рівняння, нерівності або системи залежно від зміни значення параметра;
- проведено дослідження переваг та недоліків графічного методу розв'язування рівнянь з параметром;
- подано авторські розв'язки основних задач з параметром курсу алгебри 9 класу з графічним представленням їх розв'язання через програму динамічної математики GeoGebra Classic.

Таким чином, на основі розглянутих прикладів, у роботі було доведено, що під час вибору методу розв'язування завдань з параметрами необхідно враховувати складність рівносильних перетворень та побудови графіків. Графічний метод доцільно застосовувати, коли треба визначити не самі корені, а їх кількість. Або коли в лівій частині добуток виразів із змінною, а права дорівнює 0, або зліва функція без параметра, а права дорівнює параметру. Рівняння другого і третього типів набагато простіше розв'язуються графічним методом, оскільки слід визначити тільки кількість розв'язків в залежності від значень параметра або необхідно знайти значення параметра, при яких рівняння має задану кількість розв'язків. Але в епоху інформаційно-комунікаційних технологій під час розв'язування рівнянь з параметром графічним способом через використання програм динамічної математики можна будувати графіки функцій не використовуючи їх дослідження аналітичними методами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
2. Натяганов В. Л. Методы решения задач с параметрами / В. Л. Натяганов, Л. М. Лужина. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 368 с.
3. Лейфура В.М. Задачі з параметрами./ В.М. Лейфура, А.І. Воробйова; - Київ, 1996.
4. Захарченко Н. Параметри та графіки: навч.-метод. посіб. / Надія Захарченко, Володимир Ячменьов ; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. – 56 с.
5. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір; – Х.: Гімназія, 2017.

ДОДАТКИ

Додаток 1 Розв'язання рівнянь та нерівностей з параметром з курсу алгебри для учнів 9 класу [5];

№ 5.33 (2)

При яких значеннях a рівняння $2x^2 - 8x + 5a = 0$ має хоча б один корінь?

Розв'язання

Оскільки рівняння $2x^2 - 8x + 5a = 0$ - квадратне, то якщо $D \geq 0$ рівняння має один та більше коренів. $D = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5a = 8(8 - 5a) \geq 0$, то $a \leq 1{,}6$.

Відповідь: $a \leq 1{,}6$

№ 5.50 (2)

Знайдіть усі значення a, при яких має два різних корені рівняння

$(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$.

Розв'язання

Оскільки рівняння $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$ - квадратне, то якщо $D > 0$ рівняння має два різні корені. Оскільки $D = (-(2a - 3))^2 - 4a(a + 1) = 9 - 16a > 0$, то $a < \frac{9}{16}$.

При $a = -1$ $x = -\frac{1}{5}$ - один корінь.

Відповідь: при $a < \frac{9}{16}$ і $a \neq -1$ рівняння $(a + 1)x^2 - (2a - 3)x + a = 0$ має два різні корені.

№ 5.52 (2)

Чи існує таке значення a, при яких не має коренів нерівність

$(a^2 - a - 2)x \leq a - 2$ (у разі ствердної відповіді вкажіть це значення)?

Розв'язання

Нехай $a^2 - a - 2 = 0$, тоді $a_1 = 2$; $a_2 = -1$. При $a = 2$ нерівність

$(a^2 - a - 2)\,x \leq a - 2$ перетворюється на нерівність $0x \leq 0$, тоді x – будь яке число. При $a = -1$ утворюється нерівність $0x \leq -3$, яка не має коренів.

Відповідь: при $a = -1$ нерівність $(a^2 - a - 2)x \leq a - 2$ не має коренів.

№ 5.54 (6)

Для кожного значення a розв'яжіть нерівність $(a+3)x \leq a^2 - 9$.

Розв'язання

1) Якщо $a = -3$, то нерівність набуває вигляду $0x \leq 0$, отже, x – будь яке число.
2) Якщо $a > -3$, то $a + 3 > 0$. Тоді $x \leq \frac{(a-3)(a+3)}{a+3}$. Отже $x \leq a - 3$.
3) Якщо $a < -3$, то $a + 3 < 0$. Тоді $x \geq a - 3$.

Відповідь: якщо $a = -3$, то x – будь яке число; якщо $a > -3$, то $x \leq a - 3$; якщо $a < -3$, то $x \geq a - 3$.

№ 6.47

При яких значеннях a корені рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ менші від числа 5?

Розв'язання

Обчислимо дискримінант квадратного рівняння

$D = (-2a)^2 - 4(a^2 - 4) = 16$; $x_1 = \frac{2a+\sqrt{16}}{2} = a + 2$; $x_2 = \frac{2a-\sqrt{16}}{2} = a - 2$.

За умовою $\begin{cases} x_1 < 5, \\ x_2 < 5, \end{cases}$ $\begin{cases} a + 2 < 5, \\ a - 2 < 5, \end{cases}$ $\begin{cases} a < 3, \\ a < 7. \end{cases}$

Проміжок $(-\infty; 3)$ входить до проміжку $(-\infty; 7)$.

Відповідь: при $a < 3$.

№ 6.48

При яких значеннях a корені рівняння $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ належить проміжку [-2;8]?

Розв'язання

$D = (-(4a - 2))^2 - 4(3a^2 - 4a + 1) = 4a^2 \geq 0$; якщо D>0, то рівняння має два корені: $x_1 = \frac{4a-2-\sqrt{4a^2}}{2} = a - 1$; $x_2 = \frac{4a-2+\sqrt{4a^2}}{2} = 3a - 1$.

$\begin{cases} -2 \leq x_1 \leq 8, \\ -2 \leq x_2 \leq 8, \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq a - 1 \leq 8, \\ -2 \leq 3a - 1 \leq 8, \end{cases}$ $\begin{cases} -1 \leq a \leq 9, \\ -\frac{1}{3} \leq a \leq 3. \end{cases}$

Отже, $\boldsymbol{a} \in [-\frac{1}{3};3]$.

Якщо D=0, то $4a^2 = 0, a = 0$. Тоді $x^2 + 2x + 1 = 0, (x+1)^2 = 0$,

$x = -1 \in$ [-2;8]. Отже $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$.

Відповідь: $-\frac{1}{3} \leq a \leq 3$.

№ 6.49

При яких значеннях a один із коренів рівняння

$3x^2 - (2a+5)x + 2 + a - a^2 = 0$ менший від -2, а другий – більший за 3?

Розв'язання

$D = (2a+5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2 + a - a^2) = (4a+1)^2$; $x_1 = \frac{2a+5-\sqrt{(4a+1)^2}}{2\cdot 3} = \frac{2-a}{3}$; $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{(4a+1)^2}}{2\cdot 3} = a+1$.

$\begin{cases} x_1 < -2, \\ x_2 > 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a+1 < -2, \\ \frac{2-a}{3} > 3, \end{cases}$ $\begin{cases} a < -3, \\ a < -7. \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 > 3, \\ x_2 < -2, \end{cases}$ $\begin{cases} a+1 > 3, \\ \frac{2-a}{3} < -2, \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ a > 8. \end{cases}$

Отже, $\boldsymbol{a} \in (-\infty; -7)$ або $\boldsymbol{a} \in (8; +\infty)$.

Відповідь: при $a < -7$ або $a > 8$.

№ 12.37 (2)

При яких значеннях a нерівність $x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2 \geq 0$ виконується при всіх дійсних значеннях x?

Розв'язання

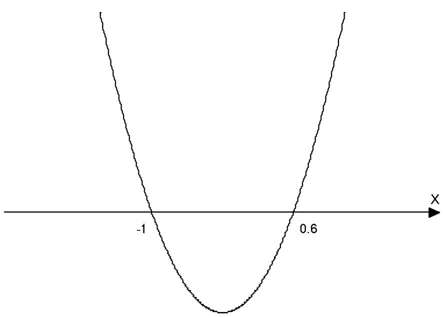
Нерівність $x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2 \geq 0$. Дана умова виконується, якщо $D \leq 0$, тому що коефіцієнт при x^2 дорівнює 1.

$D = (a-1)^2 - 4(1 - a - a^2) = 5a^2 + 2a - 3$.

$5a^2 + 2a - 3 \leq 0$.

$5a^2 + 2a - 3 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = 0{,}6$.

Побудуємо схематично графік функції $f(a) = 5a^2 + 2a - 3$



З рисунка бачимо, що розв'язком нерівності $5a^2 + 2a - 3 \leq 0$ є проміжок [-1;0,6].

Відповідь: при $-1 \leq a \leq 0{,}6$.

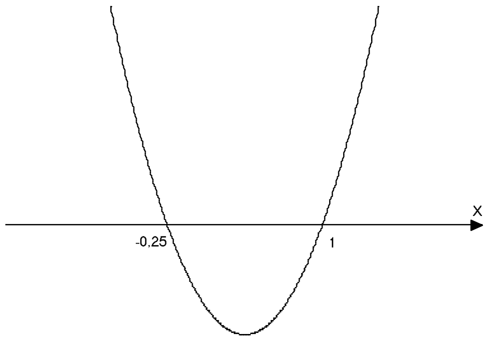
№ 12.39 (2)

Для кожного значення a розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leq 0, \\ x < a. \end{cases}$

Розв'язання

$4x^2 - 3x - 1 = 0$; $x_1 = -0{,}25$; $x_2 = 1$.

Побудуємо схематично графік функції $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$



З рисунка бачимо, що розв'язком нерівності $4x^2 - 3x - 1 \leq 0$ є проміжок [-0,25;1].

При $a < -0{,}25$ розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leq 0, \\ x < a. \end{cases}$ не існує;

при $a > 1$ розв'язком системи нерівностей є проміжок [-0,25;1];

при $-0{,}25 \leq a \leq 1$ розв'язком системи нерівностей є проміжок [-0,25; a).

Відповідь: при $a < -0{,}25$ розв'язків не існує;

при $a > 1, -0{,}25 \leq x \leq 1$; при $-0{,}25 \leq a \leq 1$, при $-0{,}25 \leq x < a$.

№ 13.24

1) Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$

Розв'язання

$\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a, \end{cases}$ $\begin{cases} y = |x|, \\ y = -x^2 + a. \end{cases}$

Побудуємо графік функції $y = |x|$ в декартовій системі координат, який складається з бісектрис I і II координатних чвертей. Графіком функції $y = -x^2 + a$ є парабола, вітки якої направлені вниз, з вершиною в точці $(0; a)$.

При $a < 0$ графіки не перетинаються і система $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$ розв'язків не має.

При $a = 0$ графіки дотикаються в одній точці з координатами $(0; 0)$ і система

$\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$ має один розв'язок.

При $a > 0$ графіки перетинаються в двох точках і система $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a. \end{cases}$ має два розв'язки.

Відповідь: при $a < 0$- розв'язків не має; при $a = 0$ - один розв'язок; при $a > 0$ - два розв'язки.

3) Скільки розв'язків залежно від значення a має система рівнянь $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a, \end{cases} \begin{cases} y = 1 + x, \\ y = \frac{a}{x}, \end{cases} \begin{cases} y = 1 + x, \\ 1 + x - \frac{a}{x} = 0, \end{cases} \begin{cases} y = 1 + x, \\ x^2 + x - a = 0. \end{cases}$$

Розглянемо квадратне рівняння $x^2 + x - a = 0$. $D = 1 + 4a$.

Якщо $D < 0$; $1 + 4a < 0$; $a < -\frac{1}{4}$ - рівняння розв'язків не має.

Якщо $D = 0$; $1 + 4a = 0$; $a = -\frac{1}{4}$ - рівняння має один розв'язок.

Якщо $D > 0$; $1 + 4a > 0$; $a > -\frac{1}{4}$ - рівняння має два розв'язки.

Відповідь: якщо $a < -\frac{1}{4}$ - рівняння розв'язків не має; якщо $a = -\frac{1}{4}$ - рівняння має один розв'язок; якщо $a > -\frac{1}{4}$ - рівняння має два розв'язки.

Отже, дані приклади можна використовувати для розвитку творчих здібностей та формування навичок дослідження учнів на уроках математики, заняттях факультативів та гуртків, під час підготовки до олімпіад та ЗНО.