Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки
Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика
Секція: математика

Рівняння та нерівності вищих порядків з параметрами

Роботу виконала:
Устичук Марія Віталіївна,
учениця 10 класу
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області

Науковий керівник:
Труш Галина Антонівна,
вчитель математики
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної та вищої
математики ЧДУ імені Петра Могили

Миколаїв – 2020

ТЕЗИ

Рівняння та нерівності вищих порядків з параметрами

Устичук Марія Віталіївна; Миколаївське територіальне відділення МАН України; Центральна загальноосвітня школа I-III ступенів; 10 клас; село Вавилове; Труш Галина Антонівна; учитель математики; учитель-методист.

Математична компетентність серед школярів України дуже низька, що впливає на результати ЗНО. Одним з найскладніших завдань ЗНО випускники вважають задачу з параметром.

Параметр будучи фіксованим, але невідомим числом має, ніби подвійну природу. Це дуже ускладнює розв'язок задач такого роду. У школі розглядаються лише лінійні та квадратні рівняння з параметром, що не дає учням змоги повністю з ними ознайомитися.

У роботі представлені теоретичні відомості про основні типи рівнянь та нерівностей з параметрами, розв'язки рівнянь з параметрами вищих порядків; власні розв'язання окремих задач з параметрами курсу алгебри і початків аналізу 10 класу рівня стандарт. Також проілюстровано графічну інтерпретацію розв'язків деяких задач з параметрами з використанням програми динамічної математики GeoGebra Classic.

Отримані результати свідчать, що основне, що потрібно засвоїти при розв'язуванні задач з параметрами – це необхідність обережно, навіть делікатно працювати з фіксованим, але невідомим числом. Зрозуміти це допоможе представлений у роботі матеріал.

ЗМІСТ

ВСТУП

Мало мати хороший розум,
головне – добре його застосовувати.

Рене Декарт

За даними міжнародного дослідження якості освіти PISA математична компетентність серед школярів України дуже низька, 36% школярів не знають цієї дисципліни навіть на базовому рівні. Наші випускники в останні роки демонстрували порівняно низькі знання математики, і це незважаючи на те, що математика – один з найважливіших шкільних предметів. Результати ЗНО з математико також бажають бути кращими.

Одним з найскладніших завдань на ЗНО одинадцятикласники вважають задачу з параметром.

Параметр – фіксоване, але невідоме число. Розв'язати задачу з параметром означає для кожного допустимого значення параметра знайти множину всіх коренів даного рівняння. Основний принцип розв'язування задачі з параметром полягає у необхідності розгляду різних випадків залежно від певних значень параметра. Відповідь до задачі з параметром формується у вигляді списку ділянок зміни параметра з поданням до кожної ділянки розв'язків задачі.

Дійсно, для розв'язування задач такого роду учень повинен повно і всеосяжно розуміти сутність задачі, володіти навичками математичного аналізу. Також відзначається те, що у школі параметр вивчається лише оглядово. На уроках математики зазвичай розглядається лише невелика частина всієї різноманітності задач з параметром, що не дозволяє засвоїти головне – по перше, передбачувані знання дозоляють «спілкуватися» з параметром як з числом, а по-друге, рівень свободи спілкування обмежується його невідомістю. Тому для того, щоб успішно скласти ЗНО учні повинні самостійно поглибити свої знання з даної теми.

У минулому році я вже почала дослідження з цього питання. Моїм завданням було здійснити теоретичний аналіз основних типів задач з параметрами та порівняти доцільність використання графічного та аналітичного методів розв'язування на прикладі задач з параметрами першого та другого порядків. У цьому році я вирішила розглянути задачі з параметрами вищих порядків.

Об'єкт дослідження – задачі з параметрами вищих порядків.

Предмет дослідження – способи розв'язування задач вищих порядків з параметрами різних типів.

Мета виконання науково-дослідницької роботи – дослідити яким чином введення параметра змінює розв'язки рівняння і нерівності та показати це за допомогою використання програми динамічної математики GeoGebra Classic.

Для досягнення мети науково-дослідницької роботи поставлено такі **завдання**:

- викласти теоретичну базу стосовно типів і методів розв'язування задач з параметром;
- продемонструвати розв'язки деяких задач з параметрами вищих порядків, взятих з підручників, офіційних українських збірників, завдань контролю знань, журналів, книг на відповідну тематику;
- наочно продемонструвати розв'язки задач за допомогою графіків;
- розробити додаток з розв'язками задач з параметрами для учнів 10 класу.

Дослідження проводилося за допомогою методів аналізу і синтезу. Теоретичною основою дослідження стали положення і концепції, представлені в роботах вітчизняних і зарубіжних авторів: Горнштейн П. І., Полонського В. Б., Якір М. С., Лейфури В. М., Егорова А. В., Вавилова В. П.

Науково-дослідницька робота складається з: вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 7 найменувань і додатку. У тексті науково-дослідницької роботи міститься 33 рисунків. Загальний обсяг роботи 31 лист.

РОЗДІЛ І. ОСНОВНІ ТИПИ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Розглянемо основні типи задач з параметрами.

1. Рівняння (нерівність, система), які необхідно розв'язувати для всіх значень параметра або із заданого проміжку.

2. Рівняння (нерівність, система), в яких треба знайти кількість розв'язків в залежності від значень параметра;

3. Рівняння (нерівність, система), в яких необхідно знайти значення параметра, при яких рівняння має задану кількість розв'язків;

4. Рівняння (нерівність, система), в яких необхідно знайти значення параметра, при яких множина розв'язків задовольняє задану умову. Іншими словами: задачі, в яких вимагається знайти усі значення параметра, за яких множина розв'язків рівняння (нерівності, системи) буде розташованою певним чином на числовій прямій. Наприклад знайти значення параметра a, для яких:

А) рівняння справджується для будь-якого дійсного значення змінної;

Б) множина розв'язків рівняння міститься на заданому проміжку;

В) рівняння справджуються для будь-якого дійсного значення змінної, що належить заданому проміжку;

Г) з одного рівняння витікає інше;

Д) жоден розв'язок першого рівняння не є розв'язком другого і т. д.

Зрозуміло, що аналогічні задачі можна поставити і для нерівностей та систем. Задачі типу 4 називають ще задачами з додатковими умовами.

РОЗДІЛ ІІ. РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ПАРАМЕТРАМИ

1.1. Раціональні рівняння вищих порядків з параметрами

Приклад 1. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $\frac{x^3+x^2-16a^2x-5x+a}{x^3-16a^2x}=1$ має єдиний корінь.

Розв'язання:

У лівій частині рівняння виділимо цілу частину $\frac{x^3+x^2-16a^2x-5x+a}{x^3-16a^2x}=\frac{x^3-16a^2x}{x^3-16a^2x}+$ $+\frac{x^2-5x+a}{x^3-16a^2x}=1+\frac{x^2-5x+a}{x^3-16a^2x}$.

Тоді рівняння прийме вигляд $\frac{x^2-5x+a}{x^3-16a^2x}=0$.

Воно рівносильне системі $\begin{cases} x^2-5x+a=0, \\ x^3-16a^2x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-x^2+5x, \\ x \neq 0, x \neq \pm 4a. \end{cases}$

Розв'яжемо систему геометричним способом за допомогою системи координат xOa. Для цього побудуємо графіки функцій $a=-x^2+5x$ і $a=\pm\frac{x}{4}$ (Рис.1).

Графіком функції $a=-x^2+5x$ є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Вершина параболи – точка $\left(\frac{5}{2};\frac{25}{4}\right)$, точки $(0;0)$ і $(5;0)$ належать параболі.

Графіками функцій $a=\pm\frac{x}{4}$ є прямі.

Розв'язуючи рівняння $-x^2+5x=\frac{x}{4}$, знаходимо точки перетину прямої $a=\frac{x}{4}$ і параболи $a=-x^2+5x$: $x=0$, $x=\frac{19}{4}$, звідки $a=0$, $a=\frac{19}{16}$. Аналогічно, розв'язуючи рівняння $-x^2+5x=-\frac{x}{4}$, знаходимо $a=0$, $a=-\frac{21}{16}$. Виколюємо ці точки.

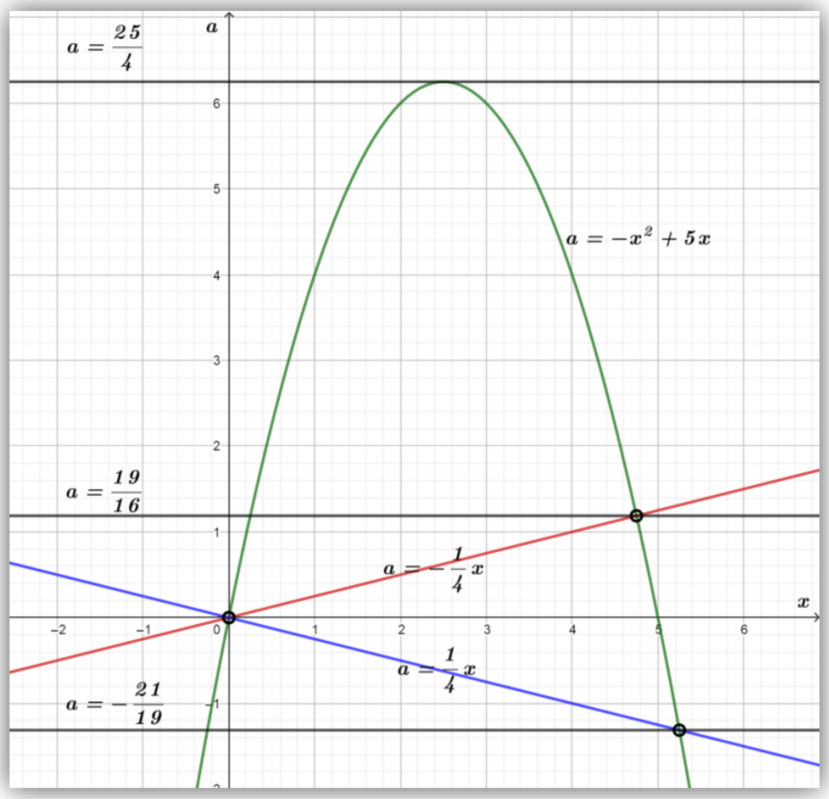

Рис. 1

За малюнком бачимо, що рівно одна точка перетину параболи з кожною з прямих буде при $a = -\frac{21}{16}$, $a = 0$, $a = \frac{19}{16}$, $a = \frac{25}{4}$.

Відповідь: $-\frac{21}{16}, 0, \frac{19}{16}, \frac{25}{4}$.

Приклад 2. При яких значеннях a, b, і c множина дійсних коренів рівняння $x^5 + 2x^4 + ax^2 + b = cx$ (1) складається з чисел -1 і 1?

Розв'язання:

Число $x = 1$ є коренем рівняння (1) у тому і лише тому випадку, якщо виконано рівність $3 + a + b = c$. (2)

Аналогічно, $x = -1$ є коренем рівняння (1) у тому і лише тому випадку, якщо виконується рівність $1 + a + b = -c$. (3)

Віднімаючи від рівності (2) рівність (3), отримаємо $c = 1$. Тоді будь-яка з цих рівностей приведе до співвідношення $b = -a - 2$. Отже рівняння (1) приймає вигляд $x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 = 0$. (4)

Як ми вже знаємо, рівняння (4) має корені ± 1, тому виносимо за дужки $x^2 - 1$:

$x^5 + 2x^4 + ax^2 - x - a - 2 =$

$= (x^5 - x^3) + (x^3 - x) + (2x^4 - 2x^2) + (2x^2 - 2) + (ax^2 - a) =$

$= (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + x + a + 2).$

Таким чином, рівняння (4) має вигляд $x^3 + 2x^2 + x + a + 2 = 0.$ (5)

При будь якому a рівняння (5) має хоча б один корінь, оскільки функція $y = x^3 + 2x^2 + x + a + 2$ є неперервною, приймає від'ємні значення при $x \to -\infty$ і додатною – при $x \to +\infty$, і, при деяких x, дорівнює нулю. Нам потрібно, щоб корені рівняння (5) не відрізнялись від ± 1.

Якщо $x = 1$ є коренем рівняння (5), то $4 + a + 2 = 0 \leftrightarrow a = -6.$

Це необхідна умова на параметр a. Підставимо $a = -6$ в рівняння (5):

$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0 \leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 3x + 4) = 0.$

Квадратний тричлен $x^2 + 3x + 4$ не має коренів, так що $x = 1$ - єдиний корінь рівняння (5). Отже, у випадку $a = -6$ (і відповідно $b = 4,\ c = 1$) корені рівняння (1) формують множину $\{-1, 1\}$.

Якщо $x = -1$ є коренем рівняння (5), то $a + 2 = 0 \leftrightarrow a = -2.$

Таким чином, рівняння (5) має вигляд $x^3 + 2x^2 + x = 0$ і має корінь $x = 0$ (який відповідно є коренем рівняння (1)). Тому значення $a = -2$ нам не підходить.

Відповідь: $a = -6, b = 4,\ c = 1$.Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 2**. Показано на Рис. 2

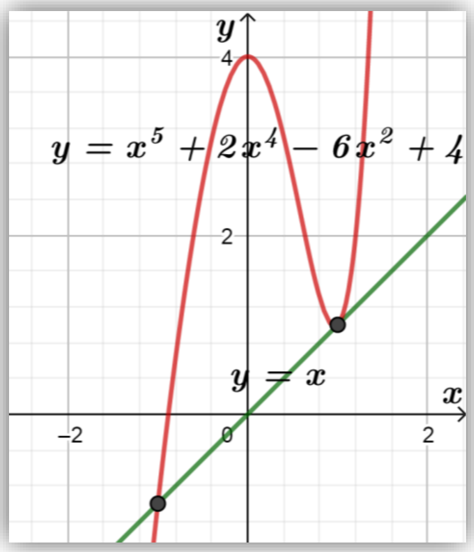

Рис. 2

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $2x^3 - (a+2)x^2 - ax + a^2 = 0$ в залежності від значення параметра a.

Розв'язання:

Дане рівняння – квадратне відносно параметра a:
$a^2 - a(x^2 + x) + 2x^3 - 2x^2 = 0$, його дискримінант $D = (x^2 + x)^2 - 8x^3 + 8x^2 =$ $= x^2(x-3)^2$ – повний квадрат. Тому $a = \frac{x^2 + x \pm x(x-3)}{2}$, так що або $a = 2x$, або $a = x^2 - x$.

Тобто або $x = \frac{a}{2}$, або $x = \frac{(1 \pm \sqrt{1+4a})}{2}$.

Відповідь: $x = \frac{a}{2}$ при $a < -\frac{1}{4}$; $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ при $a = -\frac{1}{4}$; $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_{2,3} = \frac{(1 \pm \sqrt{1+4a})}{2}$ при $a > -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$, $a \neq 6$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ при $a = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ при $a = 6$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 3** показано на Рис. 3-7.

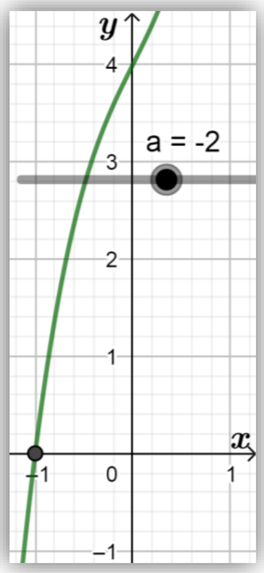

Рис. 3

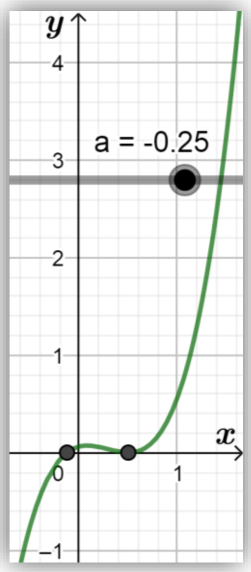

Рис. 4

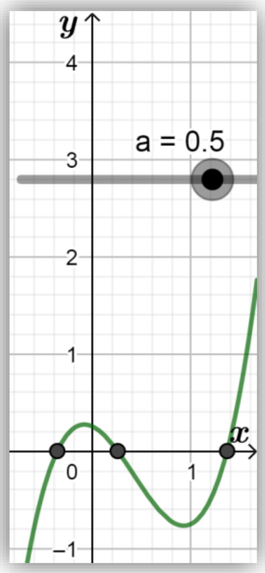

Рис. 5

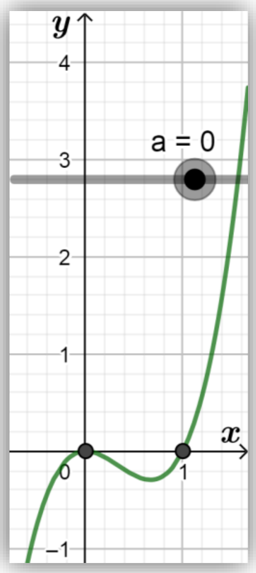

Рис. 6

Рис. 7

Приклад 4. Знайдіть всі значення параметра a, при кожному з яких три різні кореня рівняння $x^3+(a^2-15a)x^2+12ax-216=0$ (1) утворюють геометричну прогресію.

Розв'язання:

Запишемо формули Вієта для рівняння (1): $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=15a-a^2, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=12a, \\ x_1x_2x_3=216. \end{cases}$ (2)

Числа x_1, x_2 і x_3 (у вказаному порядку) утворюють геометричну прогресію тоді, і лише тоді, коли виконано умову ${x_2}^2=x_1x_3$. У цьому випадку з третього рівняння системи (2) знаходимо ${x_2}^3=216$, тобто $x_2=6$, і тоді $x_1x_3=36$. Підставляючи це в перші два рівняння системи (2) отримаємо: $\begin{cases} x_1+x_3=15a-a^2-6, \\ 6(x_1+x_3)=12a-36, \end{cases}$ звідки $15a-a^2-6=2a-6 \leftrightarrow a^2-13a=0 \leftrightarrow a=0$ або $a=13$.

Отримали необхідну умову на параметр a: а саме, припустивши, що корені утворюють геометричну прогресію, прийдемо до висновку, що a може приймати лише значення 0 або 13 (і жодні інші). Але не факт, що обидва отриманих значення задовольняють дане рівняння, і тому потрібно зробити перевірку: при якому з цих значень параметра a існує три різних корені, що утворюють геометричну прогресію.

Якщо $a=0$, то рівняння (1) приймає вигляд $x^3-216=0$; це рівняння має єдиний корінь $x=6$. Тому значення $a=0$ не підходить.

Якщо $a=13$, то рівняння (1) приймає вигляд $x^3-26x^2+156x-216=0$. Розкладемо на множники:

$$0=(x^3-216)-(26x^2-156x)=(x-6)(x^2+6x+36)-26x(x-6)=$$
$$=(x-6)(x^2-20x+36)=(x-6)(x-2)(x-18).$$

Як бачимо, рівняння має три різних корені 2, 6 і 18, які утворюють геометричну прогресію. Отже, значення $a=13$ нам підходить.

Відповідь: $a=13$; корені 2, 6 і 18.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 4** показано на Рис. 8 та Рис. 9.

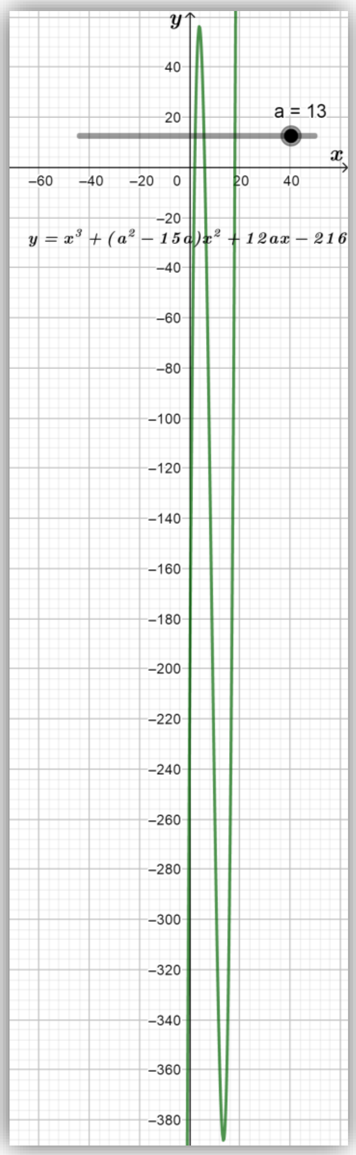

Рис. 8

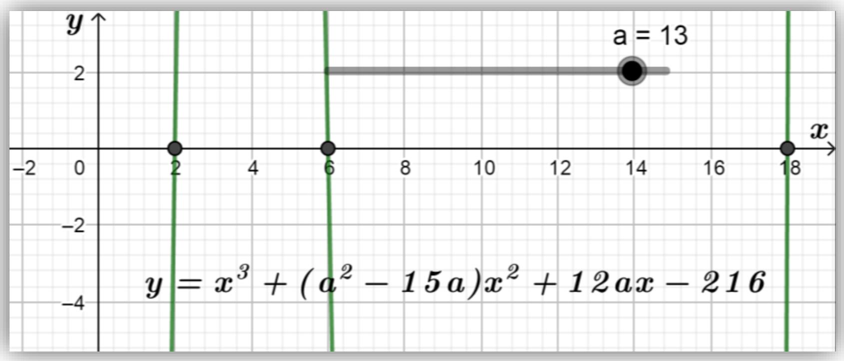

Рис. 9

1.2. Системи раціональних рівнянь вищих порядків з параметрами

Приклад 5. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$\begin{cases} a(x^4+1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання:

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи рівнянь, то $(-x_0; y_0)$ також є розв'язком цієї системи. Тому умова, що $x = 0$ - необхідна для існування єдиного розв'язку. Але вона не є остаточною: система може мати декілька розв'язків виду $(0; y_0)$ або взагалі їх не мати.

Підставимо $x = 0$. Тоді $\begin{cases} a = y + 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ звідси $a = 0$ або $a = 2$.

Отже, шукані значення параметра потрібно обирати в множині $\{0; 2\}$. Якщо $a = 0$ отримуємо: $\begin{cases} y + 1 - |x| = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} |x| = y + 1, \\ y^2 + y^2 + 2y + 1 = 1, \end{cases}$ тому $\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 0, \\ y = -1. \end{cases}$

Як бачимо, знайшлося три розв'язки системи, тому $a = 0$ не задовольняє умову задачі.

Якщо $a = 2$ отримуємо: $\begin{cases} 2x^4 + |x| = y - 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Очевидно, $2x^4 + |x| \geq 0$. З першого рівняння маємо $y \geq 1$, з другого - $y \leq 1$. Отже $y = 1$ і $x = 0$. Перевірка показує, що значення $(0; 1)$ - розв'язок, а враховуючи обмеження змінної y ($y \geq 1$ і $y \leq 1$) воно єдине.

Відповідь: $a = 2$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 5** показано на Рис. 10.

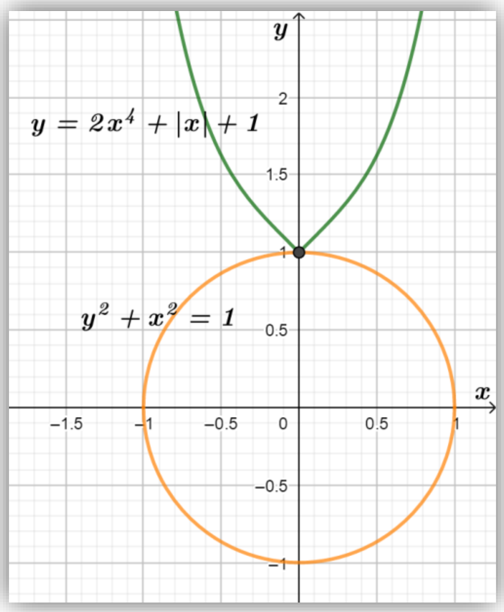

Рис. 10

Приклад 6. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівносильні системи $\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2; \end{cases}$ (1) і $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$ (2)

Розв'язання:

Система (1) складається з двох лінійних рівнянь з двома змінними. Вона має єдиний розв'язок, якщо $a \neq -2$.

Перевіркою встановлюємо, що при $a = -2$ система (1) не має розв'язку.

Система (2) при $a = -2$ стає такою: $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$

Друге рівняння містить квадратний тричлен відносно x: $2x^2 - 11x + 24$. Його дискримінант від'ємний, тому друге рівняння не має розв'язку.

Таким чином, $a = -2$ задовольняє умову задачі.

Нехай $a \neq -2$. У цьому випадку система (1) має єдиний розв'язок, тому для того, щоб системи (1) і (2) були рівносильними необхідно, щоб система (2) мала єдиний розв'язок, яке співпаде з розв'язком системи (1).

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи (2), то $(x_0; -y_0)$ також є розв'язком цієї системи. Тому умова, що $y = 0$ - необхідна для існування єдиного розв'язку. Але вона не є остаточною: система може мати декілька розв'язків виду $(x_0; 0)$ або взагалі їх не мати.

При $y = 0$ система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ 2 + a^2 + 2a - 11 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 18 + 3a^2 + 6a - 33 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 3a^2 - 3 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a = 3 \text{ або } a = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a = \pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, шукані значення параметра a, якщо вони існують, належать множині $\{-1;\ 1;\ 3\}$. При $a = -1$ система (1) така: $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3. \end{cases}$

Вона має єдиний розв'язок $(3;0)$. А система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Звідси $x = 3$, $y = 0$. Оскільки розв'язки систем співпали, $a = -1$ задовольняє умову задачі.

При $a = 1$ легко встановити, що система (1) має єдиний розв'язок – $(1;0)$, а система (2) має два розв'язки – $(1; 0)$, $(3; 0)$.

При $a = 3$ система (1) має єдиний розв'язок

$$+\begin{cases} x + 2y = -1, \\ -x + 3y = -15, \end{cases} \quad y = -\frac{16}{5};$$
$$5y = -16,$$

$x = -1 - 2\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{27}{5}$. $\left(\frac{27}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, який не задовольняє систему (2).

Відповідь: $a = -2$ або $a = -1$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 6** показано на Рис. 11 та Рис. 12.

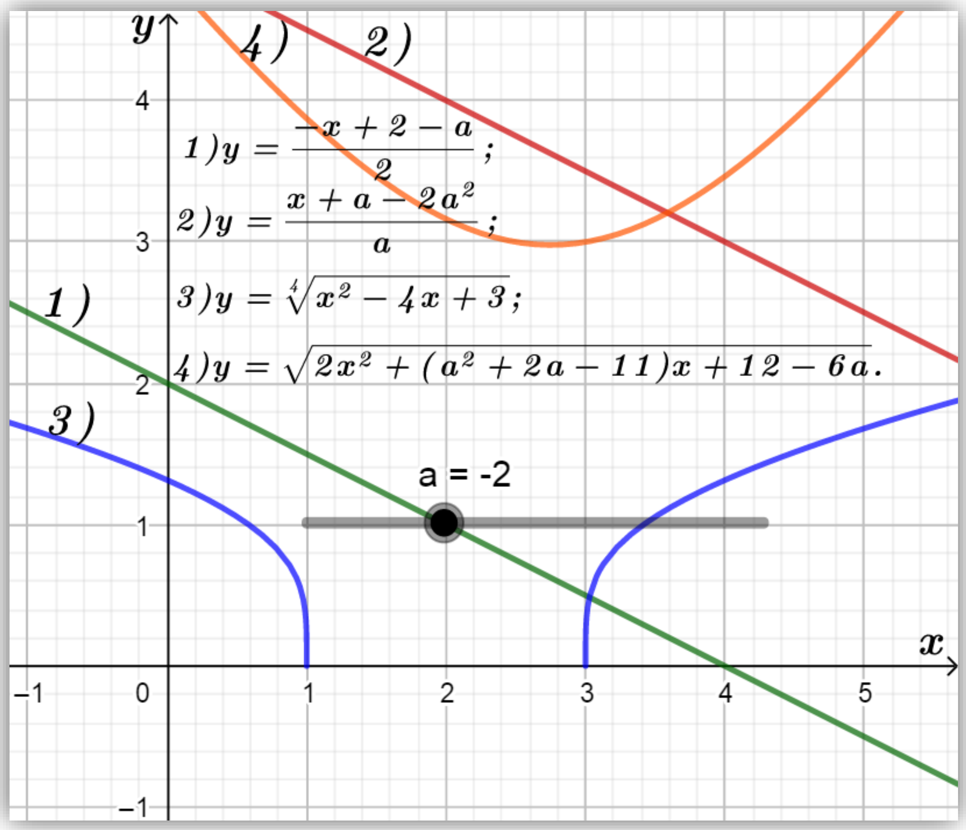

Рис. 11

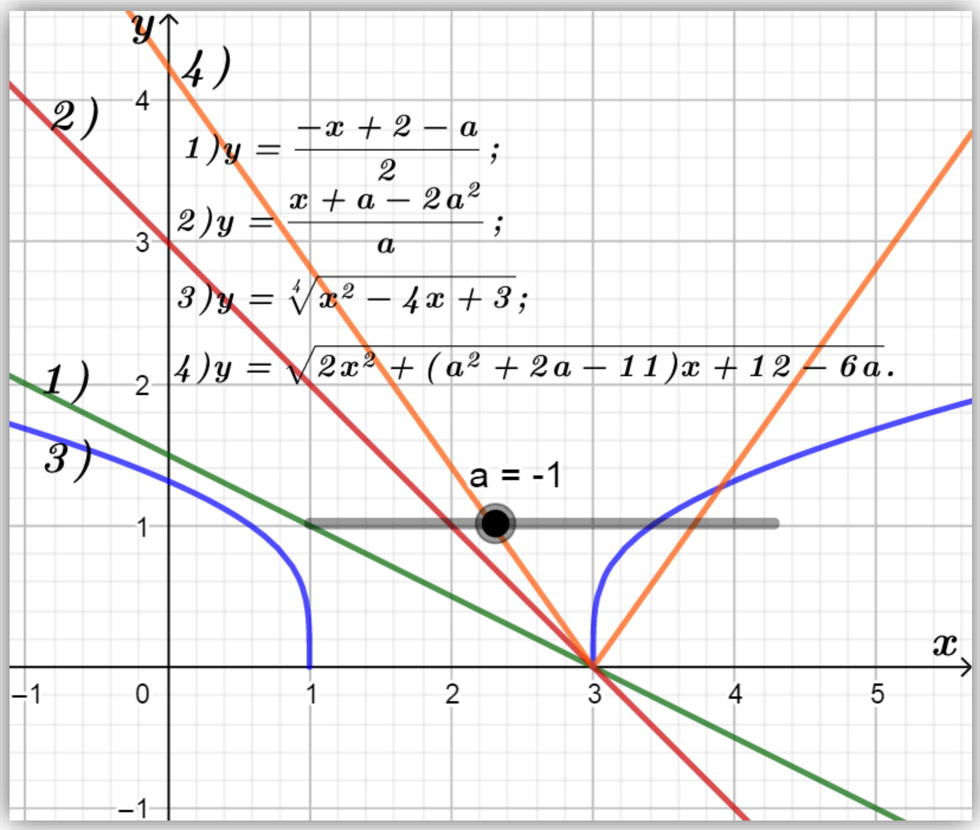

Рис. 12

Приклад 7. Розв'язати систему $\begin{cases} x^4 + y^4 = b^4, \\ x + y = a. \end{cases}$ (1)

Розв'язання:

Позначимо $x - y = z$ і розв'яжемо систему $\begin{cases} x - y = z, \\ x + y = a. \end{cases}$

Будемо мати $x = \frac{a+z}{2}$ (2) $y = \frac{a-z}{2}$. (3)

Підставляючи (2), (3) в перше рівняння системи (1), дістанемо

$z^4 + 6a^2z^2 + (a^4 - 8b^4) = 0.$ (4)

Рівняння (4) є квадратним відносно

$z^4 \geq 0$: $D = (6a^2)^2 - 4(a^4 - 8b^4) = 32(a^4 + b^4)$, $z^2 = -3a^2 \pm \sqrt{8(a^4 + b^4)}$.

(5)

Зауважимо, що рівняння (4) має розв'язки за умови $a^4 - 8b^4 \leq 0$ (у випадку $a^4 - 8b^4 > 0$ ліва частина рівняння (4) набирає лише додатних значень).

З рівняння (5) знаходимо $z = \pm\sqrt{-3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)}}$. (6)

Підставляючи (6) в (2) і (3), знаходимо розв'язки системи (1): $x = \frac{a\pm\sqrt{-3a^2+8(a^4+b^4)}}{2}$;

$y = \frac{a\pm\sqrt{-3a^2+8(a^4+b^4)}}{2}$, при умові, що $a^4 - 8b^4 \leq 0$,

$a^4 \leq 8b^4$,

$a \leq \sqrt[4]{8}b$,

$a \leq \frac{2b}{\sqrt[4]{2}}$.

Відповідь: $x = \frac{a\pm\sqrt{-3a^2+8(a^4+b^4)}}{2}$;

1.3. Раціональні нерівності вищих порядків з параметрами

Приклад 8. Для кожного невід'ємного значення параметра a розв'яжіть нерівність $a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0$.

Розв'язання:

Нехай ліва частина нерівності дорівнюватиме $f(x; a)$. Розкладемо $f(x; a)$ на множники. Для цього спробуємо розв'язати рівняння $f(x; a) = 0$. Розглянемо рівняння $af(x; a) = 0$, тобто $a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a = 0$.

Нехай $ax = t$. Тоді маємо $t^4 + 6at^2 - t + 9a^2 + 3a = 0$. Розглянемо останнє рівняння як квадратне відносно a: $9a^2 + 6at^2 + t^4 - t + 3a = 0$. Отримаємо

$$\left[\begin{array}{l} a = -\frac{t^2+t+1}{3}, \\ a = \frac{-t^2+t}{3}. \end{array}\right.$$

Якщо $a = 0$, то дана нерівність має своїм розв'язком проміжок $(-\infty; 3]$. Залишилося розглянути випадок коли $a > 0$. Помножимо обидві частини початкової нерівності на a. Маємо $a^4x^4 + 6a^3x^2 - ax + 9a^2 + 3a \geq 0$, і, ураховуючи отримані до цього результати, розкладаємо ліву частину нерівності на множники: $(a^2x^2 + ax + 3a + 1)(a^2x^2 - ax + 3a) \geq 0$. Оскільки $a > 0$, то $(a^2x^2 + ax + 3a + 1)(ax^2 - x + 3) \geq 0$.

Дискримінант квадратного тричлена (першого множника) $D = -a^2(12a + 3)$. Очевидно, що для $a > 0$, $D < 0$. Отже, $a^2x^2 + ax + 3a + 1 > 0$ при всіх x. Отже, при $a > 0$ початкова нерівність рівносильна нерівності $ax^2 - x + 3 \geq 0$. Знайдемо дискримінант квадратного трьохчлена $ax^2 - x + 3$: $D = 1 - 12a$. Якщо $a \geq \frac{1}{12}$, то остання нерівність виконується при всіх x. Якщо $0 < a < \frac{1}{12}$, то розв'язком нерівності є об'єднання проміжків $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}; +\infty\right)$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то $x \leq 3$; якщо $0 < a < \frac{1}{12}$, то $x \leq \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ або $x \geq \frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a}$; якщо $a \geq \frac{1}{12}$, то x - будь-яке.

Приклад 9. Для кожного значення параметра a, $|a| < 2$, розв'яжіть дану нерівність $x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - 1 \leq 0$.

Розв'язання:

Можна помітити, що $x = 0$ є розв'язком при будь-якому a. Розглянемо ліву частину нерівності як квадратний тричлен відносно a і спробуємо виразити його корені через x, тобто розв'яжемо відносно a рівняння

$f(a, x) = a^2x^2 + 2ax^3 + x^4 - 1 = 0$.

Дискримінант $D = (2x^3)^2 - 4x^2(x^4 - 1) = 4x^6 - 4x^6 + 4x^2 = 4x^2$. Отримуємо $a = \frac{-2x^3 \pm \sqrt{4x^2}}{2x^2} = \frac{-x^2 \pm 1}{x}$, тобто $a = -\frac{x^2+1}{x}$ або $a = -\frac{x^2-1}{x}$.

Це дає можливість розкласти на множники квадратний тричлен $f(a, x)$:

$f(a, x) = x^2\left(a + \frac{x^2+1}{x}\right)\left(a + \frac{x^2-1}{x}\right) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + ax - 1)$.

Залишилося розв'язати нерівність $(x^2 + ax + 1)(x^2 + ax - 1) \leq 0$.

Перший множник додатний при всіх x (нагадуємо, що $|a| < 2$), тому початкова нерівність рівносильна нерівності $x^2 + ax - 1 \leq 0$. Тому знаходимо корені рівняння $x^2 + ax - 1 = 0$. Після чого отримуємо $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}$.

Відповідь: $\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2} \leq x \leq \frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}$.

Приклад 10. Для кожного невід'ємного значення параметра a, розв'яжіть нерівність $16a^3x^4 + 8a^2x^2 + 16x + a + 4 \geq 0$.

Розв'язання:

При $a = 0$ нерівність справедлива при $x \geq -\frac{1}{4}$. Многочлен в лівій частині нерівності – третього степеня відносно a і четвертого степеня відносно x. Виконаємо заміну $y = 2ax$ при $a \neq 0$: отримаємо $\frac{y^4}{a} + 2y^2 + \frac{8y}{a} + a + 4 \geq 0$, або (при $a > 0$) $a^2 + 2a(y^2 + 2) + y^4 + 8y \geq 0$.

Нерівність стала квадратичною відносно a.

Розкладемо на множники квадратний тричлен $a^2 + 2a(y^2 + 2) + y^4 + 8y = 0$, маємо $a = -(y^2 + 2) \pm \sqrt{(y^2 + 2)^2 - y^4 - 8y} = -(y^2 + 2) \pm (2y - 2)$, тобто $a = -y^2 + 2y - 4$ або $a = -y^2 - 2y$.

Нерівність зводиться до виду $(a + y^2 - 2y + 4)(a + y^2 + 2y) \geq 0$.

При $a > 0$ перший множник додатний. Розв'яжемо нерівність

$a + y^2 + 2y \geq 0$ і перейдемо до змінної x.

$y^2 + 2y + a = 0,$

$D = 4 - 4a = 4(1 - a)$; $y = \frac{-2 \pm \sqrt{4(1-a)}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - a} = 2ax$; $x \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{2a}$.

Відповідь: $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ при $a = 0$; $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{1-a}+1}{2a}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a}; +\infty\right)$ при $0 < a < 1$; $(-\infty; +\infty)$ при $a \geq 1$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 10** показано на Рис. 13-15

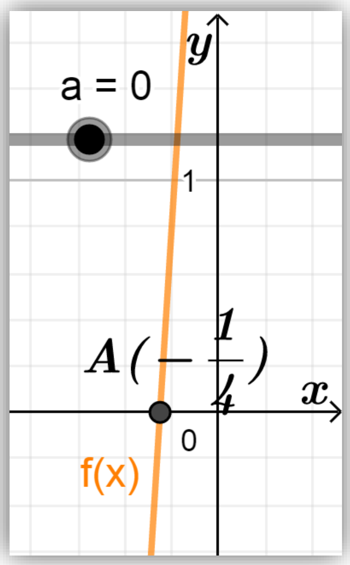

Рис. 13

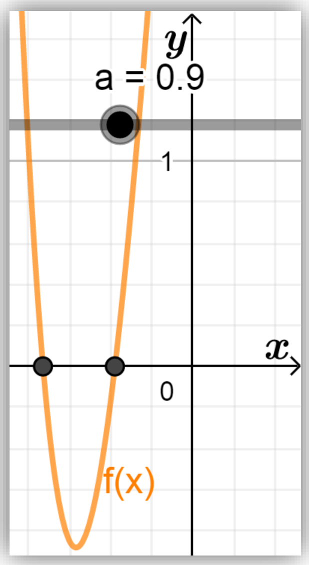

Рис. 14

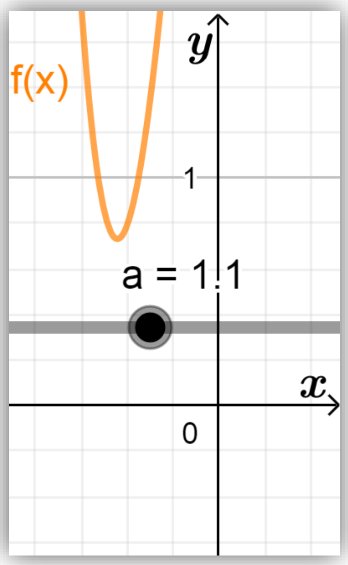

Рис. 15

Частіше за все, розв'язуючи задачу з параметром, ми розглядаємо його як довільне, але фіксоване число і розв'язуємо рівняння, нерівність чи їх систему відносно змінних, які містяться у задачі та враховуючи обмеження на значення параметра. Але у деяких випадках (Наприклад **Приклади 3, 8, 9, 10**) буває зручно розглядати параметр як незалежну змінну і розв'язувати задачу відносно цієї змінної.

РОЗДІЛ ІІІ. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ З ПАРАМЕТРАМИ

Приклад 11. Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{8a+x}+\sqrt[3]{8a-x}=\sqrt[3]{a}$ в залежності від значення параметра a.

Розв'язання:

Область визначення функції складається з усіх дійсних чисел як для x, так і для a.

Якщо $a=0$, то рівняння задовольняє будь-яке $x \in R$.

Якщо $a \neq 0$, розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt[3]{a}$ і введемо змінні

$u=\sqrt[3]{8+\frac{x}{a}}$, $v=\sqrt[3]{8-\frac{x}{a}}$, отримаємо, що $u+v=1$. Крім того, $u^3+v^3=16$, так

що для знаходження u і v розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} u+v=1, \\ u^3+v^3=16; \end{cases}$

$$\begin{cases} u+v=1, \\ u^3+v^3=16, \end{cases} \begin{cases} u+v=1, \\ (u+v)(u^2-uv+v^2)=16, \end{cases} \begin{cases} u+v=1, \\ u^2-uv+v^2=16, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=1-u, \\ u^2-u(1-u)+(1-u)^2=16; \end{cases}$$

$u^2-u(1-u)+(1-u)^2=16,$

$u^2-u+u^2+1-2u+u^2=16,$

$3u^2-3u-15=0,$

$u^2-u-5=0;$

$D=1+4\times 5=21;\ u=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.$

Отримаємо два можливих значення u:

$u_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right), u_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{21}).$

Таким чином, при $a \neq 0$ дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь

$\sqrt[3]{8+\frac{x}{a}}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right)$ і $\sqrt[3]{8+\frac{x}{a}}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{21})$, звідки $x=\pm 3a\sqrt{21}$.

Відповідь: якщо $a=0$, то $x \in R$; якщо $a \neq 0$, то $x_1=3a\sqrt{21}$, $x_2=-3a\sqrt{21}$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 11** показано на Рис. 16 та Рис. 17.

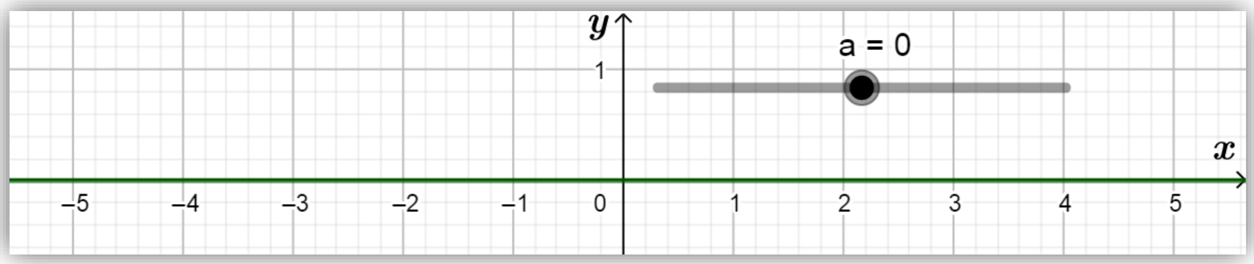

Рис. 16

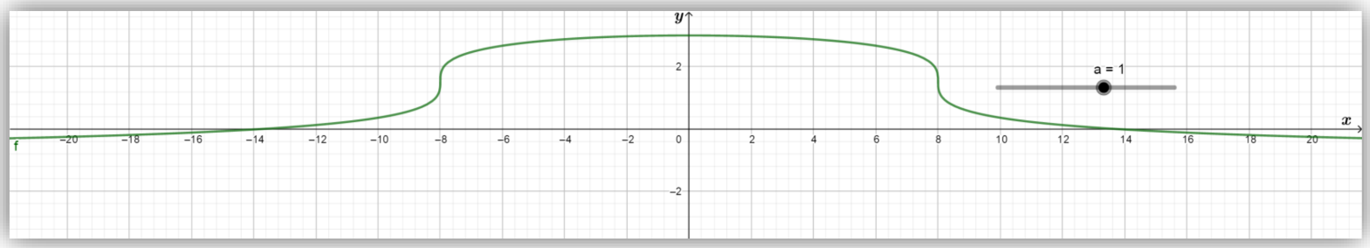

Рис. 17

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-1} = a.$ (1)

Розв'язання:

Область значень функції $y = \sqrt[3]{x-1}$ є вся множина дійсних чисел. Крім того, функція $y = \sqrt[3]{x-1}$ є строго зростаючою на всій множині дійсних чисел. Отже, за будь-яких значень функції $y = a$ рівняння (1) має один дійсний корінь. Тому рівняння $x - 1 = a^3$ є рівносильним рівнянню (1). Отже, $x = a^3 + 1$, де a - будь-яке дійсне число.

Відповідь: $x = a^3 + 1$, де a - будь-яке дійсне число.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 12** показано на Рис. 18.

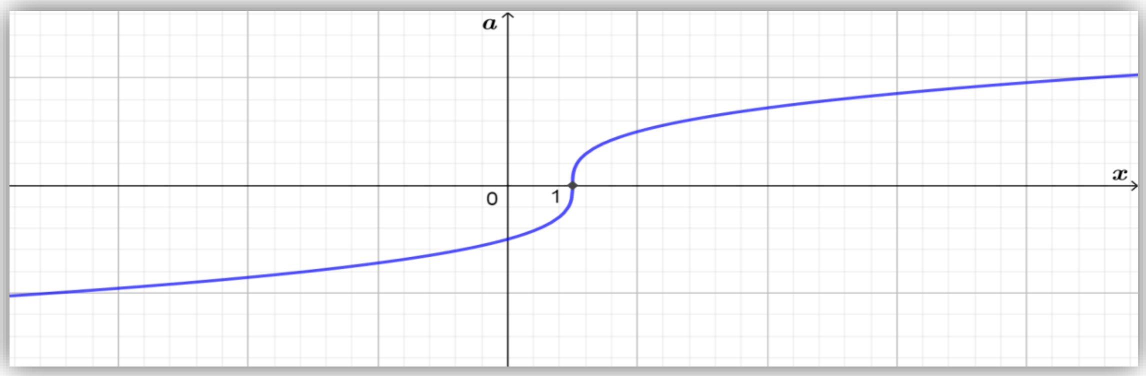

Рис. 18

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\sqrt[4]{x-3} = 1 - a$.

Розв'язання:

Область значень функції $y = \sqrt[4]{x-3}$ всі невід'ємні числа, тобто $y \geq 0$. Тому при $1 - a < 0$, тобто $a > 1$, рівняння розв'язків не має.

На всій області визначення, тобто при $x \geq 3$, функція $y = \sqrt[4]{x-3}$ є строго зростаючою. Це означає, що при $1 - a \geq 0$, тобто $a \leq 1$, рівняння має один дійсний корінь.

Тому рівняння $(x-3) = (1-a)^4$ при $a \leq 1$ є рівносильним рівнянню $\sqrt[4]{x-3} = 1 - a$

Отже, $x = (1-a)^4 + 3$.

Відповідь: якщо $a > 1$, то розв'язків не існує; якщо $a \leq 1$, то $x = (1-a)^4 + 3$.

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\sqrt[7]{(1+2x)^2} = 2a$.

Розв'язання:

Множину значень функції $y = \sqrt[7]{(1+2x)^2}$ складають усі невід'ємні числа. Отже, $y \geq 0$, а тому $2a \geq 0$.

Звідси випливає, що при $a < 0$ рівняння розв'язків не має.

Якщо $a \geq 0$, то $(1+2x)^2 = (2a)^7$,

$\sqrt{(1+2x)^2} = \sqrt{(2a)^7}$,

$|1+2x| = (2a)^{\frac{7}{2}}$,

$1 + 2x = \pm(2a)^{\frac{7}{2}}$,

$x = \frac{1}{2}(\pm(2a)^{\frac{7}{2}} - 1)$.

Відповідь: якщо $a < 0$, то розв'язків не існує;

якщо $a \geq 0$, то $x = \frac{1}{2}(-1 \pm (2a)^{\frac{7}{2}})$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(x-1)^2} = 2a^2$.

Розв'язання:

Параметр a може набирати будь-якого дійсного значення.

$(x-1)^2 = (2a^2)^3$,

$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(2a^2)^3}$,

$|x-1| = (\sqrt{2a^2})^3 = (\sqrt{2}\cdot\sqrt{a^2})^3 = (\sqrt{2})^3|a|^3$.

Отже, $|x-1| = 2\sqrt{2}|a|^3$, звідки $x = 1 \pm 2\sqrt{2}|a|^3$.

Відповідь: $x = 1 \pm 2\sqrt{2}|a|^3$.

Приклад 16. Розв'язати рівняння $\frac{\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{x-b}} = \frac{a+b-2x}{a-b}$. (1)

Розв'язання:

Звільнимося від ірраціональності в знаменнику правої частини рівняння (1), скориставшись тотожністю $m+n = \left(\sqrt[3]{m}+\sqrt[3]{n}\right)(\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2})$,

$\frac{\left(\sqrt[3]{a-x}-\sqrt[3]{x-b}\right)(\sqrt[3]{(a-x)^2}-\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}+\sqrt[3]{(x-b)^2})}{a-x+x-b} = \frac{a+b-2x}{a-b}$, звідки

$\frac{a+b-2x+2(\sqrt[3]{(a-x)(x-b)^2}-\sqrt[3]{(a-x)^2(x-b)}\ )}{a-b} = \frac{a+b-2x}{a-b}$,

$a+b-2x+2\sqrt[3]{(a-x)(x-b)^2}-2\sqrt[3]{(a-x)^2(x-b)} = a+b-2x$,

$2\sqrt[3]{(a-x)(x-b)^2}-2\sqrt[3]{(a-x)^2(x-b)} = 0$,

$\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}\cdot\sqrt[3]{x-b}-\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}\cdot\sqrt[3]{a-x} = 0$,

$\sqrt[3]{(a-x)(x-b)}\left(\sqrt[3]{x-b}-\sqrt[3]{a-x}\right) = 0$. (2)

Розв'язками рівняння (2) є:

1) $a-x=0, x=a$;
2) $x-b=0, x=b$;
3) $\sqrt[3]{x-b}-\sqrt[3]{a-x}=0, \sqrt[3]{x-b}=\sqrt[3]{a-x}, x=\frac{a+b}{2}$.

Відповідь: якщо $a \neq b$ $x=a, x=b, x=\frac{a+b}{2}$.

Приклад 17. Розв'яжіть рівняння $a^7+x=\sqrt[7]{a-x}$ в залежності від значення параметра a.

Розв'язання:

Перепишемо рівняння таким чином: $a = \sqrt[7]{\sqrt[7]{a-x}-x}$.

При фіксованому x розглянемо функцію $f(a) = \sqrt[7]{a-x}$.

Наше рівняння можна записати і так $a = f(f(a))$. (3)

При будь-якому фіксованому x функція $y = f(a)$ є зростаючою.

Доведемо, що рівняння (3) рівносильне рівнянню $a = f(a)$.

Насамперед, будь-який корінь останнього рівняння є коренем рівняння (3); бо якщо $a = f(a)$, то $f(a) = f(f(a))$ і, значить, $a = f(f(a))$.

Нехай a_0 - корінь рівняння (3), до того ж $a_0 \neq f(a_0)$. Якщо $a_0 > f(a_0)$, зі зростання функції слідує, що $f(a_0) > f\big(f(a_0)\big) = a_0$, тобто $f(a_0) > a_0$, що суперечить нашому припущенню.

Аналогічно доводиться неможливість нерівності $a_0 < f(a_0)$.

Отже, оскільки в нашому випадку $a = f(a)$, отримуємо еквівалентне рівняння $a = \sqrt[7]{a - x}$, звідки слідує, що $x = a - a^7$.

Відповідь: $a - a^7$.

Найбільш важливою частиною розв'язування задач з параметром є перехід до простішої, рівносильної їй (тобто тої, що має таку ж множину розв'язків) задачі.

Кожне рівняння, нерівність чи їх система мають свою область визначення, а аналіз умов, які їх характеризують, зазвичай є необхідною (а часто тою, що значно спрощує) частиною розв'язку задач.

ВИСНОВКИ

«Є в математиці щось, що викликає людський захват» (Ф. Хаусдорф). Навіть так названа елементарна математика (а можливо, просто шкільна математика) незважаючи на дуже обмежену тему – задачі з параметрами – являє собою досить широкий простір для повноцінної математичної діяльності.

Виявляється, хоч це і не відкриття, розв’язування задач з параметрами, а точніше рівнянь та нерівностей з параметрами, відкриває перед собою значну кількість евристичних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості, належних для використання в дослідженнях та будь-якому іншому математичному матеріалі.

Результати роботи:

- зібрано та систематизовано розв’язки різних типів рівнянь та нерівностей вищих порядків з параметрами за допомогою різноманітних способів розв’язання;
- подано графічну інтерпретацію розв’язків задач для наочного спостереження зміни розв’язків та їх кількості через програму динамічної математики GeoGebra Classic;
- подано авторські розв’язки задач з параметрами вищих порядків курсу алгебри і початків аналізу 10 класу рівня стандарт.

Як висновок, можна сказати, що при розв’язуванні будь-якого рівняння чи нерівності потрібно звести дане рівняння (нерівність) до більш простої: розкласти на множники, позбутися модуля чи ірраціональності, і т.д. При розв’язувані задач з параметрами часом зручно, а інколи просто необхідно, будувати графіки.

У майбутньому я планую продовжити вивчення задач з параметрами і розглянути розв’язування тригонометричних рівнянь та нерівностей з параметрами.

Матеріал науково-дослідницької роботи може бути використано вчителями математики, студентами вузів, слухачами підготовчих відділень, абітурієнтами та старшокласниками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. П. І. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир Задачи з параметрами. 3-е издание, дополнительнное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005, - 328 с.
2. Лейфура В.М. Задачі з параметрами./ В.М. Лейфура, А.І. Воробйова; - Київ, 1996.
3. Мерзляк А. Г. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А.Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір; – Х. : Гімназія, 2018. – 256 с. : іл.
4. Егоров А. Решим относительно параметра / А. Егоров / / Квант. - 1997. - №4 - С. 43-45.
5. Вавилов В. Задачи з параметром / В. Вавилов / / Квант. - 1997. - №5 - С. 39.
6. П. І. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир, В. Необходимые условия и задачи з параметрами / П. І. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир / / Квант. - 1991. - №11 - С. 44-46.
7. Програма динамічної математики GeoGebra Classic: https://geogebra.ru.uptodown.com/windows

ДОДАТКИ

Додаток 1. Розв'язання рівнянь та нерівностей вищих порядків з параметрами курсу алгебри і початків аналізу для учнів 10 класу рівня стандарт [3]

№ 2.11 (1)

Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^{12} = a - 6$?

Розв'язання:

Графіком функції $f(x) = x^{12}$ є парабола з вершиною у точці $(0; 0)$. Графіком функції $g(x) = a - 6$ є пряма, паралельна осі абсцис. При $a - 6 > 0$ і $a > 6$ графіки перетинаються у двох точках; при $a - 6 = 0$ і $a = 6$ графіки перетинаються в одній точці $(0; 0)$; при $a - 6 < 0$ і $a < 6$ графіки не перетинаються.

Відповідь: два корені при $a > 6$; один корінь про $a = 6$; немає коренів при $a < 6$.

Графічну інтерпретацію розв'язку № 2.11 (1) показано на Рис. 19 - 21.

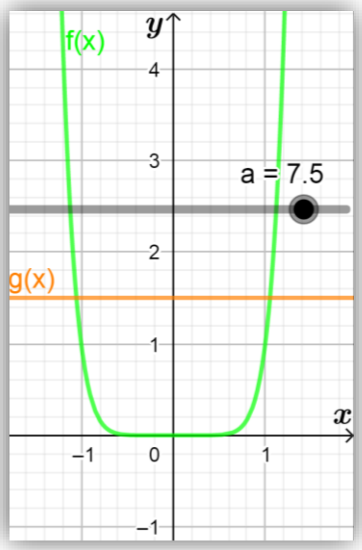

Рис. 19

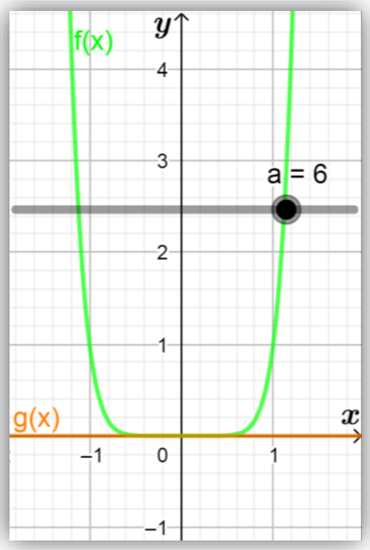

Рис. 20

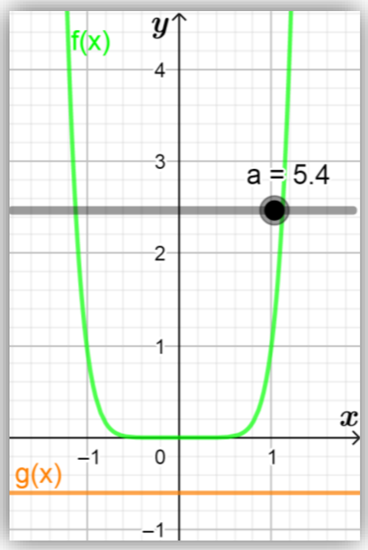

Рис. 21

№ 2.11 (2)

Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

Розв'язання:

Графіком функції $f(x) = x^{24}$ є парабола з вершиною у точці $(0;0)$. Графіком функції $g(x) = a^2 + 7a - 8$ є пряма, паралельна осі абсцис. При $a^2 + 7a - 8 > 0$ і $a < -8$ або $a > 1$ графіки перетинаються у двох точках; при $a^2 + 7a - 8 = 0$ і $a = -8$ або $a = 1$ графіки перетинаються в одній точці $(0;0)$; при $a^2 + 7a - 8 < 0$ і $-8 < a < 1$ графіки не перетинаються.

Відповідь: два корені при $a < -8$ або $a > 1$; один корінь при $a = -8$ або $a = 1$; немає коренів при $-8 < a < 1$.

Графічну інтерпретацію розв'язку № 2.11 (2) показано на Рис. 22 - 26.

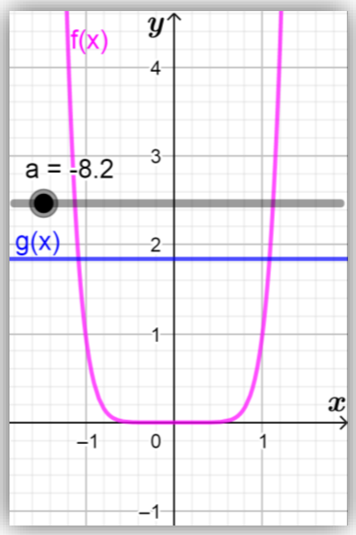

Рис. 22

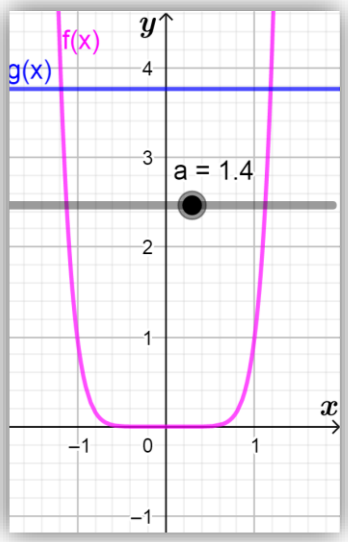

Рис. 23

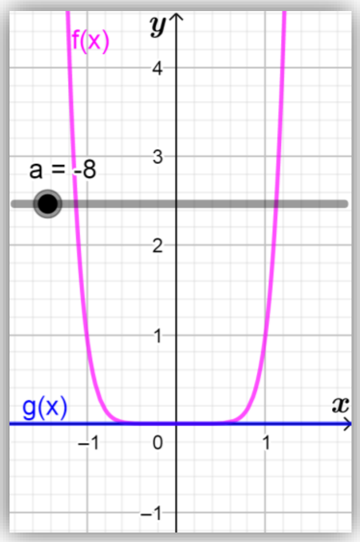

Рис. 24

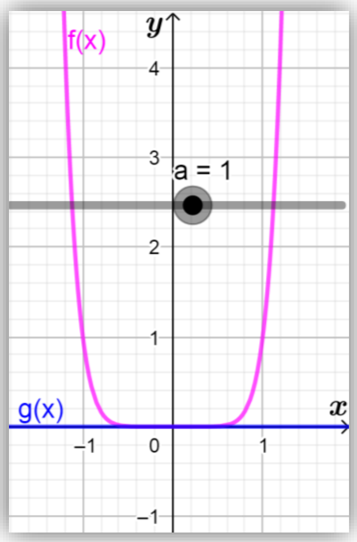

Рис. 25

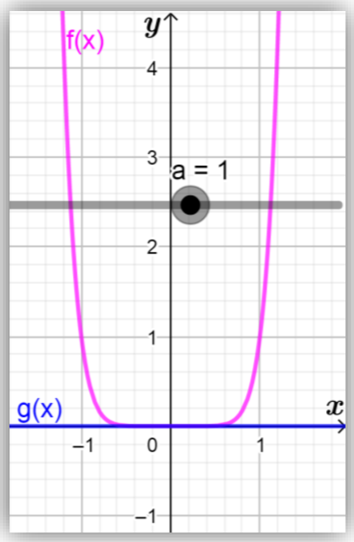

Рис. 26

№ 2.12

Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

Розв'язання:

Графіком функції $f(x) = x^8$ є парабола з вершиною у точці $(0; 0)$. Графіком функції $g(x) = 9a - a^3$ є пряма, паралельна осі абсцис. При $9a - a^3 > 0$ і $a < -3$ або $0 < a < 3$ графіки перетинаються у двох точках; при $9a - a^3 = 0$ і $a = 3$ або $a = -3$ або $a = 0$ графіки перетинаються в одній точці $(0; 0)$; при $9a - a^3 < 0$ і $-3 < a < 0$ або $a > 3$ графіки не перетинаються.

Відповідь: два корені при $a < -3$ або $0 < a < 3$; один корінь при $a = 3$ або $a = -3$ або $a = 0$; немає коренів при $-3 < a < 0$ або $a > 3$.

Графічну інтерпретацію розв'язку № 2.12 показано на Рис. 27 - 33.

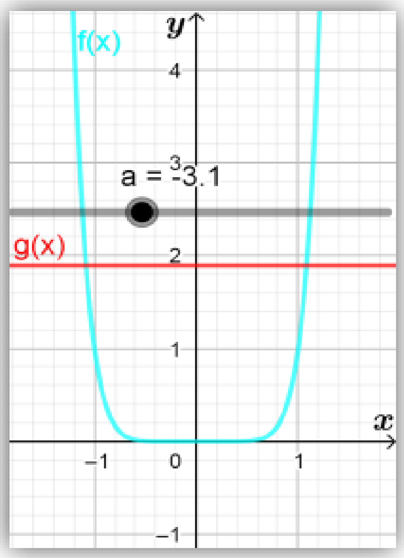

Рис. 27

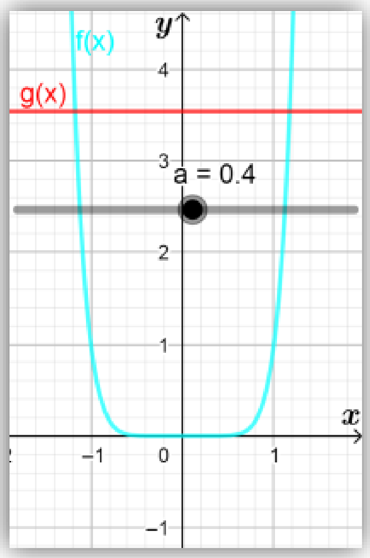

Рис. 28

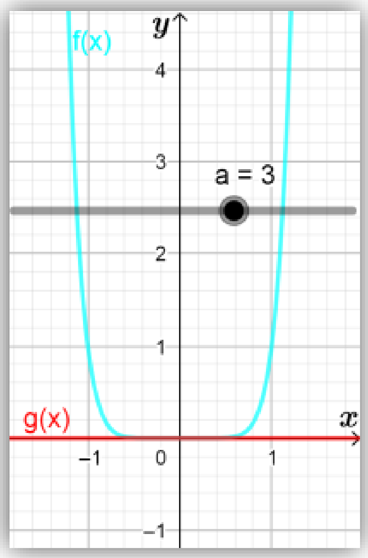

Рис. 29

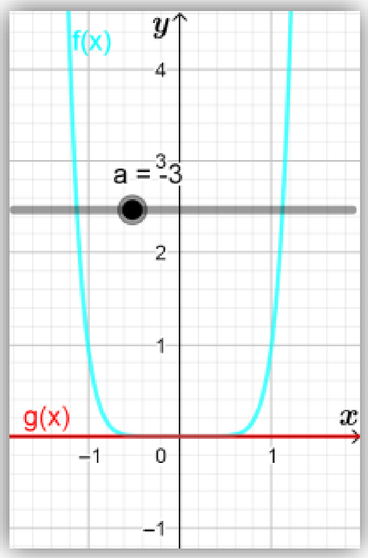

Рис. 30

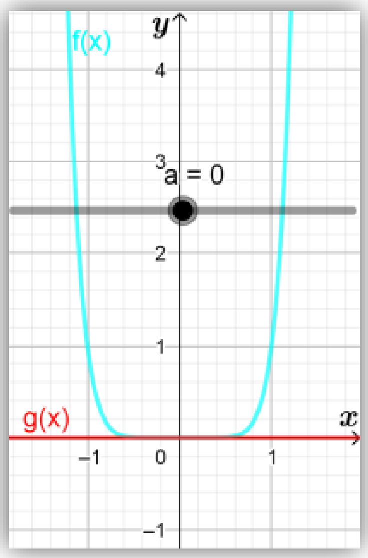

Рис. 31

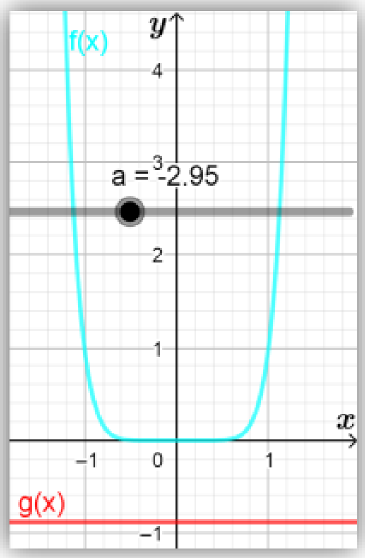

Рис. 32

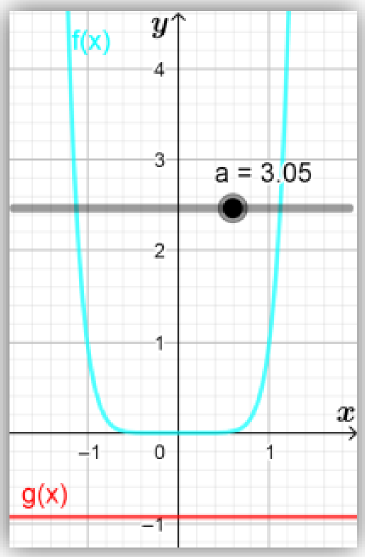

Рис. 33

Отже, дані приклади та їхні графічні інтерпретації можна використовувати для розвитку творчих здібностей та формування навичок дослідження учнів на уроках математики, заняттях факультативів та гуртків, під час підготовки до олімпіад та ЗНО.