Засідання гуртка МАН

Миколаївського територіального відділення МАН України

Відділення: математика

Геометричні інтерпретації розв'язків задач з параметрами

Доповідач:
Устичук Марія Віталіївна,
учениця 11 класу
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області

Науковий керівник:
Труш Галина Антонівна,
вчитель математики
Центральної загальноосвітньої
школи I–III ступенів
Снігурівської районної ради
Миколаївської області

Миколаїв - 2021

Приклад 1. За яких *а* рівняння $\frac{x^2-ax+1}{x+3} = 0$ має єдиний корінь?

Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Маємо $D = a^2 - 4 = 0, якщо\ a = \pm 2$.

Проте цим усі шукані значення параметра *а* не вичерпуються. Справді, відшукаємо те значення параметра *а*, при якому один із коренів $x = -3$. Підставимо $x = -3$ в рівняння. Дістанемо $a = -\frac{10}{3}$. Отже при $a = -\frac{10}{3}, x_1 = -3,\ x_2 = -\frac{1}{3}$. Корінь x_1 звичайно відкидаємо, тому $x_2 = -\frac{1}{3}$ буде єдиним коренем при $a = -\frac{10}{3}$.

Відповідь: $a = \pm 2$, $a = -\frac{10}{3}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|1 + x| \leq ax$.

1) $a = 0, |1 + x| \leq 0, x = -1$

2) $a > 0$. При $x \leq 0$ розв'язків не існує;

Нехай $x > 0$. Тоді $\begin{cases} 1 + x \leq ax, \\ 1 + x \geq -ax, \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} (a-1)x \geq 1, \\ x(a+1) \geq -1, \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases}$ (1)

звідки за умови, що $a > 1$, дістаємо: $x \geq \frac{1}{a-1}$.

Якщо ж $0 < a \leq 1, то\ (a-1)x \leq 0$, звідки $1 \leq 0$.Це означає, що система (1) є несумісною;

3) $a < 0$. При $x \geq 0$ розв'язків не існує. Нехай $x < 0$. Тоді $\begin{cases} (a-1)x \geq 1, \\ (a+1)x \geq -1, \\ x < 0, \\ a < 0. \end{cases}$ (2)

Якщо $-1 < a < 0$, то $a + 1 > 0, a - 1 < 0$.

Тому $\begin{cases} x \leq \frac{1}{a-1}, \\ x \geq -\frac{1}{a+1}, \\ x < 0, \\ a < 0, \end{cases}$ звідки $-\frac{1}{a+1} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$.

Якщо $a \leq -1$, то $a + 1 \leq 0$, $(a+1)x \geq 0$. Отже, система (2) буде рівносильна такій системі: $\begin{cases} a \leq -1, \\ x \leq \frac{1}{a-1}, \end{cases}$ звідки $-\infty < x \leq \frac{1}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a \leq -1$, то $-\infty < x \leq \frac{1}{a-1}$;

якщо $-1 < a < 0$, то $-\frac{1}{a+1} \leq x \leq \frac{1}{a-1}$;

якщо $a = 0, то\ x = -1$;

якщо $0 < a \leq 1, то$ розв'язків не існує;

якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a-1} \leq x < +\infty$.

Приклад 3. За якого значення параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$ має два розв'язки?

В координатній площині побудуємо графіки рівнянь, що входять до складу системи **(рис. 1).**

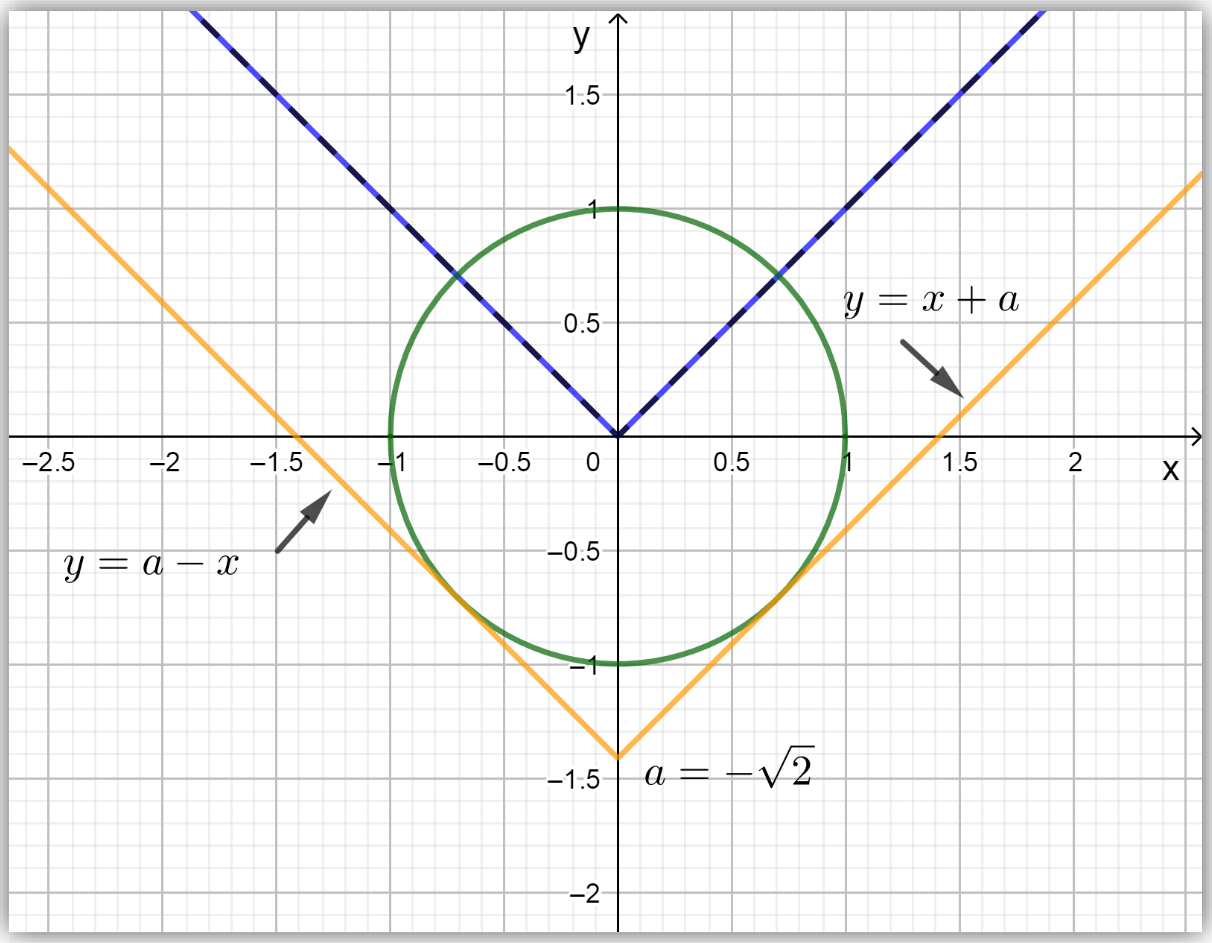


Рис.1

Зрозуміло, що при $-1 < a < 1$ графік $y = |x| + a$ буде перетинати одиничне коло в двох точках. Два розв'язки буде також при дотику прямої $y = x + a$ до кола. Тоді у рівнянні $x^2 + (x + a)^2 = 1$ дискримінант дорівнює нулю, звідки $a = -\sqrt{2}$.

Зауважимо, що значення $a = -\sqrt{2}$ можна відшукати, користуючись лише геометричними міркуваннями.

Відповідь: $-1 < a < 1$, $a = -\sqrt{2}$.

Приклад 4. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівносильні системи $\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2; \end{cases}$ (1) і $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$ (2)

Розв'язання:

Система (1) складається з двох лінійних рівнянь з двома змінними. Вона має єдиний розв'язок, якщо $a \neq -2$.

Перевіркою встановлюємо, що при $a = -2$ система (1) не має розв'язку.

Система (2) при $a = -2$ стає такою: $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$

Друге рівняння містить квадратний тричлен відносно x: $2x^2 - 11x + 24$. Його дискримінант від'ємний, тому друге рівняння не має розв'язку.

Таким чином, $a = -2$ задовольняє умову задачі.

Нехай $a \neq -2$. У цьому випадку система (1) має єдиний розв'язок, тому для того, щоб системи (1) і (2) були рівносильними необхідно, щоб система (2) мала єдиний розв'язок, яке співпаде з розв'язком системи (1).

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи (2), то $(x_0; -y_0)$ також є розв'язком цієї системи. Тому умова, що $y = 0$ - необхідна для існування єдиного розв'язку. Але вона не є остаточною: система може мати декілька розв'язків виду $(x_0; 0)$ або взагалі їх не мати.

При $y = 0$ система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ 2 + a^2 + 2a - 11 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 18 + 3a^2 + 6a - 33 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 3a^2 - 3 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a = 3 \text{ або } a = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a = \pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, шукані значення параметра a, якщо вони існують, належать множині $\{-1;\ 1;\ 3\}$. При $a = -1$ система (1) така: $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3. \end{cases}$

Вона має єдиний розв'язок $(3; 0)$. А система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x - 3)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Звідси $x = 3$, $y = 0$. Оскільки розв'язки систем співпали, $a = -1$ задовольняє умову задачі.

При $a = 1$ легко встановити, що система (1) має єдиний розв'язок – $(1; 0)$, а система (2) має два розв'язки – $(1; 0)$, $(3; 0)$.

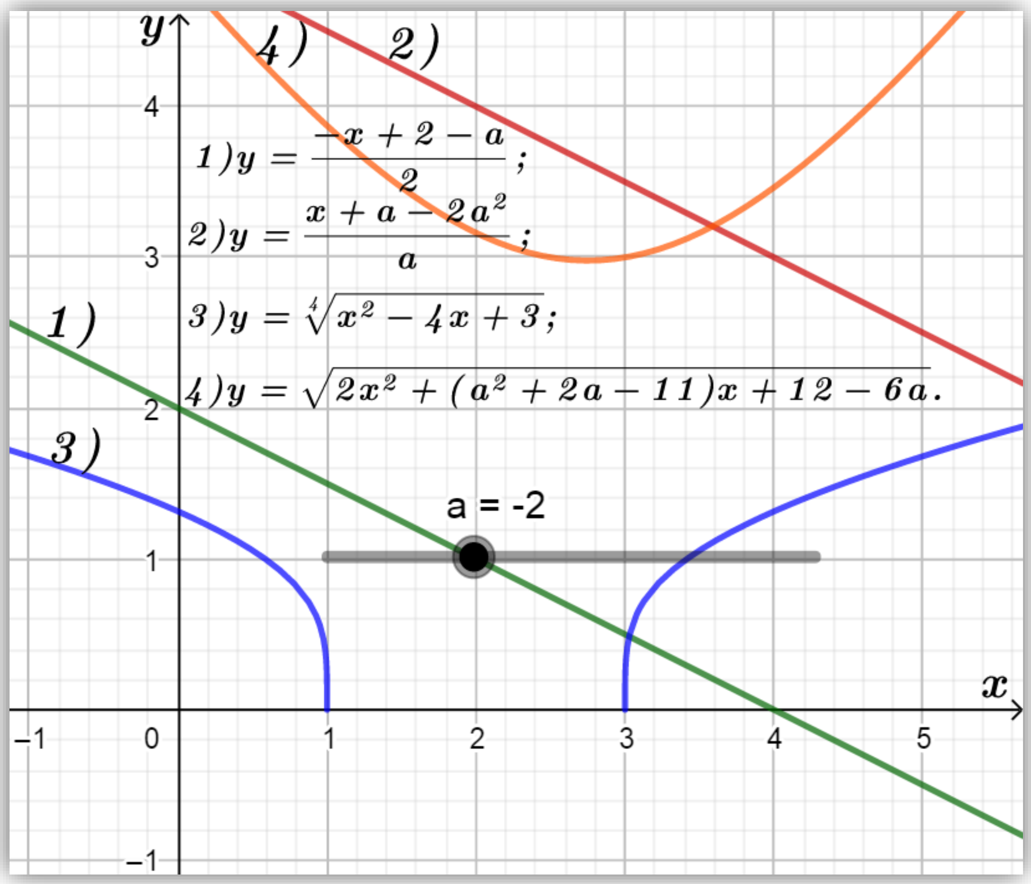
При $a = 3$ система (1) має єдиний розв'язок

$$+\begin{cases} x + 2y = -1, \\ -x + 3y = -15, \end{cases} \quad y = -\frac{16}{5};$$
$$\overline{\quad 5y = -16, \quad}$$

$x = -1 - 2\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{27}{5}$. $\left(\frac{27}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, який не задовольняє систему (2).

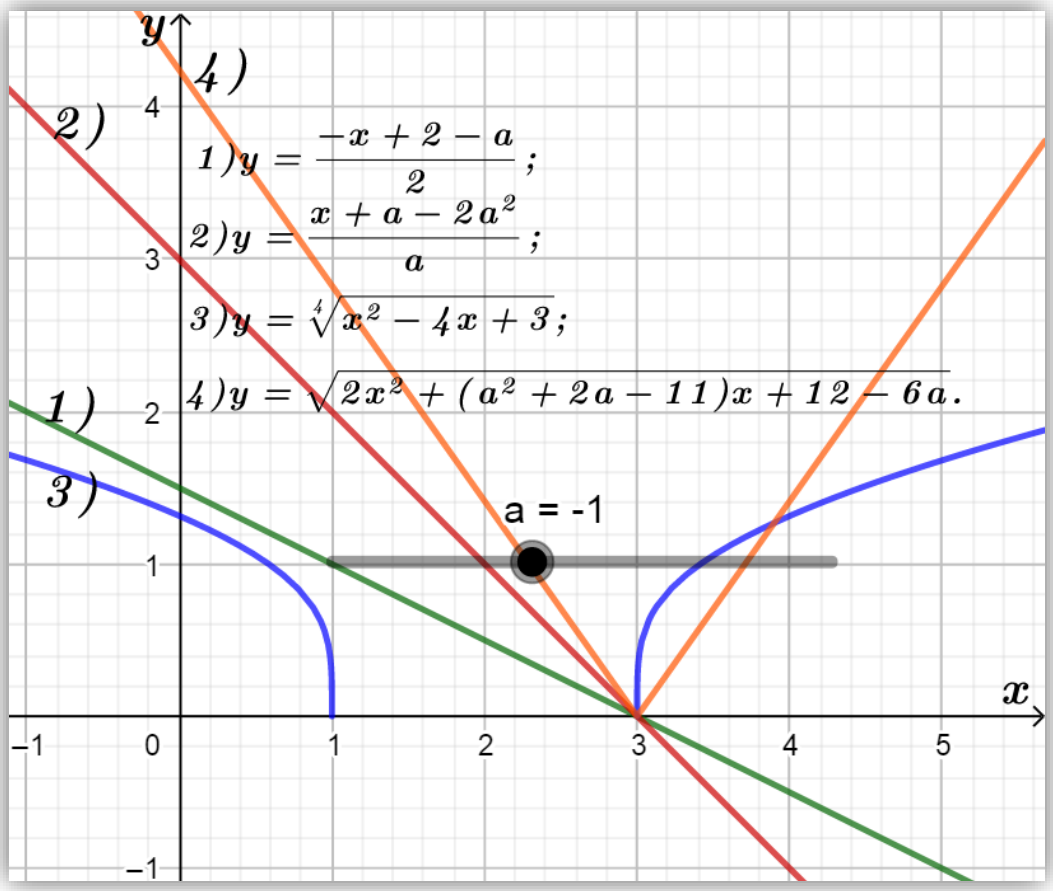
Відповідь: $a = -2$ або $a = -1$.

Графічну інтерпретацію розв'язку **Приклада 4** показано на Рис. 2 та Рис. 3.



$1)\, y = \frac{-x + 2 - a}{2};$
$2)\, y = \frac{x + a - 2a^2}{a};$
$3)\, y = \sqrt[4]{x^2 - 4x + 3};$
$4)\, y = \sqrt{2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a}.$
a = -2

Рис. 2



$1)\, y = \frac{-x + 2 - a}{2};$
$2)\, y = \frac{x + a - 2a^2}{a};$
$3)\, y = \sqrt[4]{x^2 - 4x + 3};$
$4)\, y = \sqrt{2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a}.$
a = -1

Рис. 3

Приклад 5.

При яких значеннях параметра a при будь-якому значенні параметра b має розв'язок рівняння $\cos(2a - b + x) = |b^3 - 1| \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2a\right) + \frac{|b^3+1|}{2\sin a}$? (1)

Розв'язання.

Так як рівняння (1) повинно мати розв'язки при будь-якому значенні параметра b, то воно буде мати розв'язки і при значені $b = 1$. Підставляючи це значення в початкове рівняння, знаходимо, що $\cos(2a - 1 + x) = \frac{1}{\sin a}$.

З отриманого відношення слідує, що $\sin a = \pm 1$, адже в іншому випадку $|\cos(2a - 1 + x)| > 1$, чого бути не може.

Розв'язуючи рівняння $\sin a = \pm 1$ знаходимо необхідні умови, яким мають за які мають задовольняти значення параметра a, щоб рівняння (1) мало розв'язок. Вони тут такі: $a = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Нехай $a = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. При таких значеннях a рівняння (1) переписується у вигляді $-\cos(x - b) = \frac{1}{2}|b^3 - 1| + \frac{1}{2}|b^3 + 1|$. (2)

Якщо тепер розглянути графіки функцій $y = -\cos(x - b)$ і $y = \frac{1}{2}(|b^3 - 1| +$ $+|b^3 + 1|)$ в координатних площинах xOy і bOy, то приходимо до висновку, що рівняння (2) має розв'язок не при всіх значеннях параметра b.

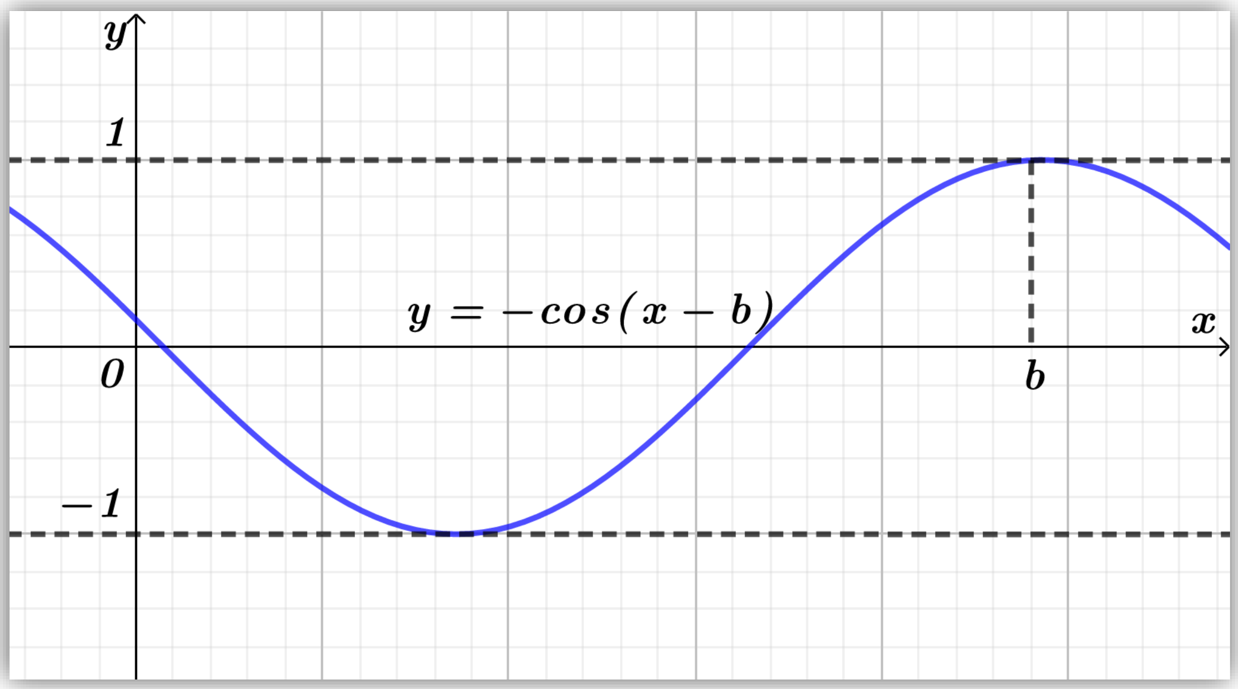


Рис. 4

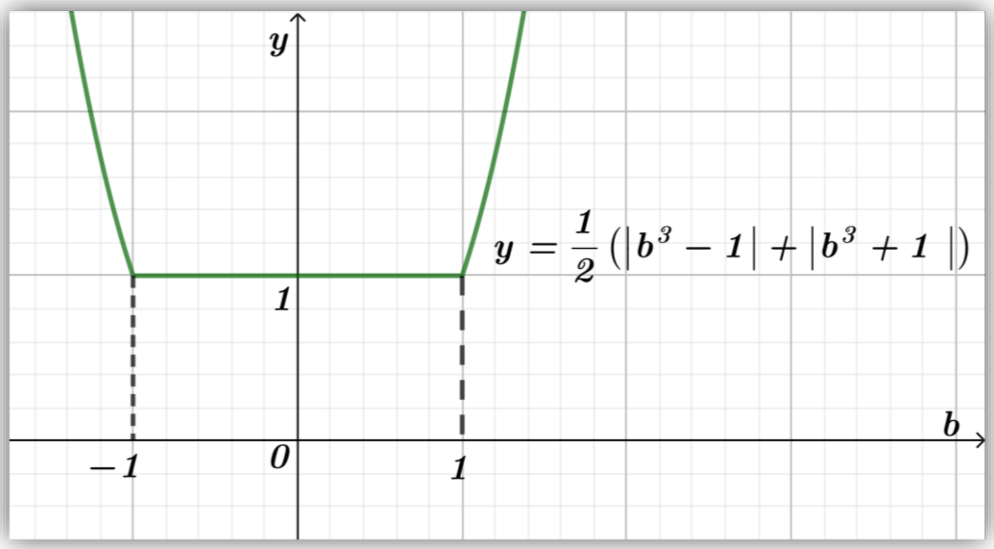


Рис. 5

Розглянемо випадок $a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$. В такому випадку рівняння (1) переписується у вигляді $-2\cos(b - x) = |b^3 - 1| - |b^3 + 1|$.

Тепер, оскільки $|-2\cos(b - x)| \leq 2$,то повинна виконуватися нерівність $|b^3 - 1| - |b^3 + 1| \leq 2$, а тоді якщо розглянути графік функції $y = |b^3 - 1| - |b^3 + 1|$, то приходимо до висновку, що рівняння (1) буде мати розв'язки при будь-якому значенні параметра b.

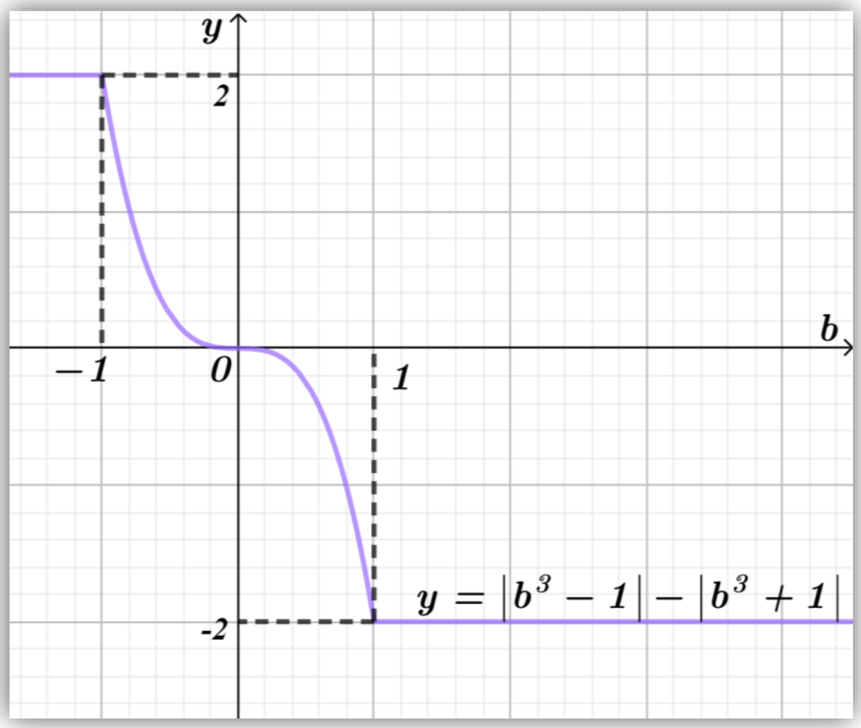


Рис. 6

Відповідь: $a = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$