Миколаївське територіальне відділення МАН України

# Задачі з декількома параметрами

**Роботу виконала: Устичук Марія Віталіївна**, учениця 11 класу Центрального ЗЗСО I–III ступенів Шевченківської сільської ради Миколаївської області, с. Вавилове

**Науковий керівник:** Труш Галина Антонівна, учитель математики вищої кваліфікаційної категорії, учитель - методист Центрального ЗЗСО I–III ступенів Шевченківської сільської ради Миколаївської області

**Науковий консультант:** Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної та вищої математики ЧНУ імені Петра Могили

## Науковий апарат

Об'єкт дослідження: задачі з декількома параметрами.

Предмет дослідження: способи розв'язування задач з декількома параметрами різних типів.

Мета: поширити спектр прийомів і методів розв'язання різних задач з декількома параметрами.

## Завдання

1. Продемонструвати удосконалені розв'язки задач з декількома параметрами, взятих з підручників, офіційних українських збірників, завдань контролю знань, наукових статей та книг на відповідну тематику;
2. Розробити додаток з авторськими прикладами використання рівнянь з декількома параметрами для побудови динамічних зображень в графічному онлайн-калькуляторі Desmos;
3. Розробити додаток з матеріали: "Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами", "Геометричні методи розв'язання рівнянь з параметрами".

## Практична частина

### Приклад 1. Розв'язання при будь-якому значенні другого параметра.

При яких значеннях параметра $a$ при будь-якому значенні параметра b має розв'язок рівняння

$$\sin(2a-b+x)=|b^3-1|\sin\left(\frac{4\pi}{3}-2a\right)+\frac{|b^3+1|}{2\cos a} \qquad (1)$$

### Розв'язання:

$$b=1 \Rightarrow \sin(2a-1+x)=\frac{1}{\cos a}$$

$\cos a=\pm1$, адже інакше $|\sin(2a-1+x)|>1$

$$a=2\pi k,\ a=\pi+2\pi k, \quad k\in Z$$

1) $a=2\pi k \Rightarrow \sin(x-b)=-\frac{1}{2}|b^3-1|+\frac{1}{2}|b^3+1|$

$y=\sin(x-b)$ і $y=\frac{1}{2}(|b^3+1|-|b^3-1|)$ (рис. 1, 2)

2) $a=\pi+2\pi k \Rightarrow \sin(x-b)=-\frac{1}{2}|b^3-1|-\frac{1}{2}|b^3+1|$

$y=\sin(x-b)$ і $y=-\frac{1}{2}|b^3-1|-\frac{1}{2}|b^3+1|$ (рис. 1, 3)

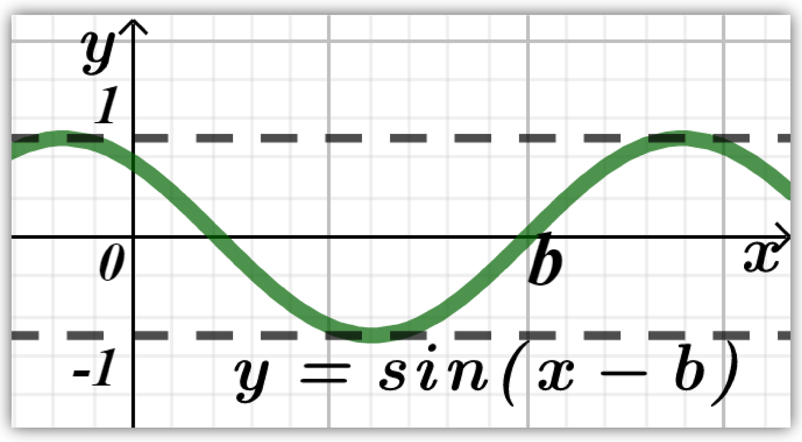


Рис. 1

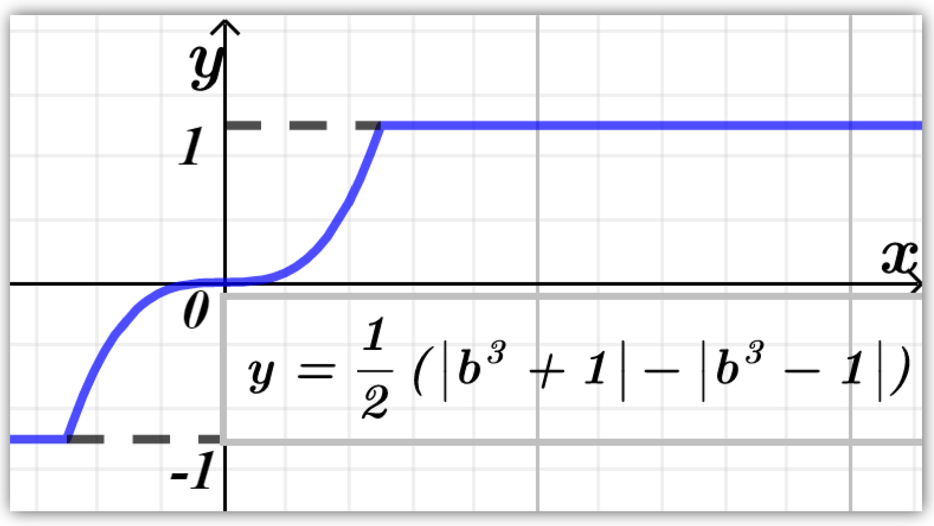


Рис. 2

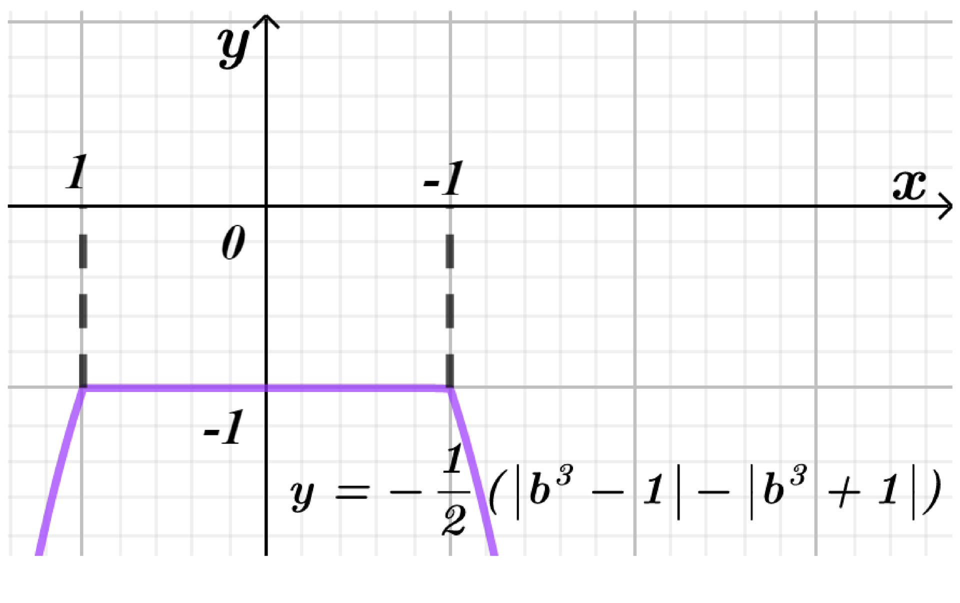


Рис. 3

**Відповідь:** $a=2\pi k, k\in Z$

### Приклад 2. Рівняння з двома параметрами при додатковій умові на параметри.

При яких значеннях параметрів $a$ і $b$ рівняння

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad (1)$$

має хоча б один корінь, а сума $a^2+b^2$ при цьому є мінімальною?

### Розв'язання:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0, x\neq0$$

$y_0=x_0+\frac{1}{x_0} \Rightarrow ay_0+b=2-y_0^2$ (рис. 4)

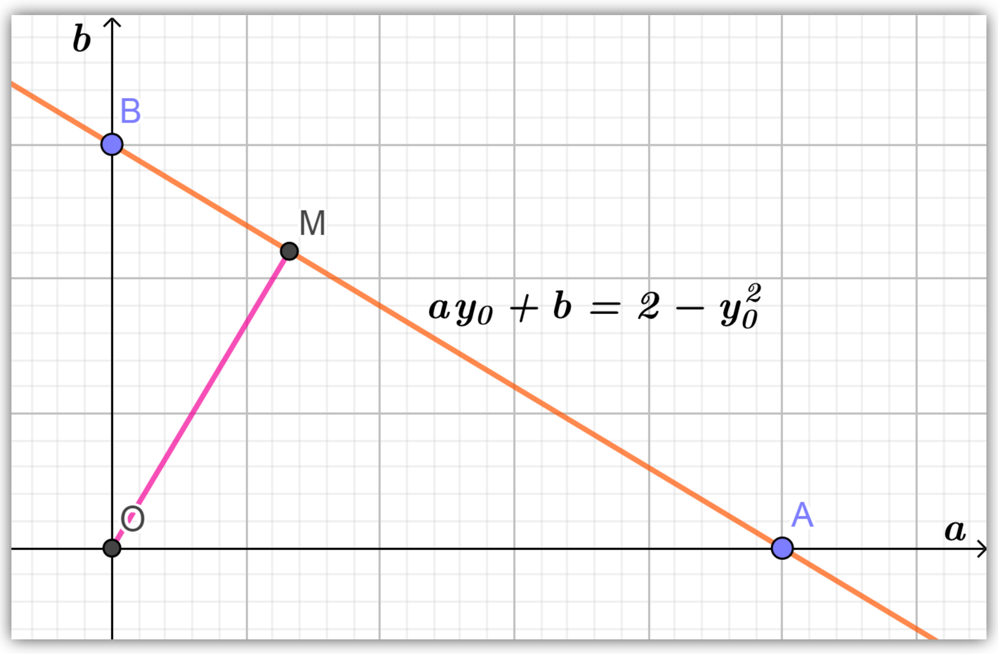


Рис. 4

$$a^2+b^2=|OM|^2=h^2$$

$h=\frac{|OB||OA|}{\sqrt{|OB|^2+|OA|^2}}$ : $|OA|=\frac{2-y_0^2}{y_0}$ і $|OB|=2-y_0^2$

$$h^2=a^2+b^2=\frac{(2-y_0^2)^2}{y_0^2+1} \qquad (2)$$

$y_0^2\geq4 \Rightarrow a^2+b^2\geq\frac{4}{5}$

$$x_0=1 \Rightarrow \begin{cases}2a+b+2=0;\\ a^2+b^2=\frac{4}{5}.\end{cases} \Rightarrow a=-\frac{4}{5}, \quad b=-\frac{2}{5}$$

**Відповідь:** $a=-\frac{4}{5}, b=-\frac{2}{5}$

### Приклад 3. Система рівнянь з двома параметрами.

В залежності від значень параметрів $a$ і $b$ розв'язати систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a;\\ x+y=b.\end{cases} \qquad (1)$$

### Розв'язання:

ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k,n\in Z$

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}=\frac{2\sin b}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}=$$

$$=\frac{2\sin b}{\cos(b-2y)+\cos b}=a$$

$$\begin{cases}\frac{2\sin b}{\cos(b-2y)+\cos b}=a;\\ x+y=b.\end{cases} \qquad (2)$$

1) $a\neq0 \Rightarrow \frac{2\sin b}{a}-\cos b=\cos(b-2y)$

Нехай $p=\frac{2\sin b}{a}-\cos b$

При $b\neq\pi m$, де $m\in Z, |p|>1$ система (2) розв'язків не має.

При $b\neq\pi m, |p|\leq1$ $2y-b=\pm\arccos p+2\pi k, k\in Z$ або

$y=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos p+\pi k, k\in Z,$ і $x=\frac{b}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos p+\pi k$

2) $a=0, b=\pi m$

$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(\pi m-x)=0$ - рівняння, адже $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}(\pi m-x)=\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x$

$x+y=b$, де $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

3) $a=0, b\neq\pi m$

$\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}(x-b)$ - не має розв'язків

4) $a\neq0, b=\pi m$

$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x=a\neq0$ - хибне

**Відповідь:** $a=0, b=\pi m \Rightarrow x+y=b$, де $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

$a\neq0, b\neq\pi m, |p|\leq1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\arccos p+\pi k, k\in Z, x=\frac{b}{2}\mp\frac{1}{2}\arccos p+\pi k$

$a=0, b\neq\pi m$ або $a\neq0, b=\pi m$ або $a\neq0, b\neq\pi m, |p|>1$ – розв'язків не має, де $p=\frac{2\sin b}{a}-\cos b$, $k,m,n,\in Z$

### Приклад 4. Система рівнянь з трьома параметрами з додатковою умовою

На координатній площині $xOy$ розглядається множина $M$ всіх точок, координати яких $(a;b)$ і значення параметра p такі, що $a>0$, $b>0$, $a+b>1$, $3ap<bp+2p^2$ і система рівнянь

$$\begin{cases}px^2+2xy+y^2=b^2;\\ 3x+y=a;\end{cases} \qquad (1)$$

не має розв'язків. При яких значеннях параметра множина є внутрішньою областю многокутника?

### Розв'язання:

$Q=\{a>0,b>0,a+b>1\}$ лежить вище прямої $a+b=1$

$$(p+3)x^2-4ax+a^2-b^2=0 \qquad (2)$$

$D=4\left(4a^2-(p+3)(a^2-b^2)\right)=4\left((1-p)a^2+(p+3)b^2\right)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow p<-3$ або $p>1$; $(p+3)b^2<(p-1)a^2$

$$\begin{cases}bp>3ap-2p^2;\\ (p+3)b^2<a^2(p-1).\end{cases} \qquad (3)$$

1) $p<-3$

$\begin{cases}b<3a-2p;\\ b>a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}.\end{cases}$ - нижче прямої $b=3a-2p$; - вище прямої $b=a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}$

$$M=\left\{(a;b)\,\middle|\,a+b>1, b<3a-2p, b>a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}, a>0, b>0.\right\}$$

Так як $p<-3$, то $-2p>6$

$\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}>3 \Rightarrow -\frac{7}{2}<p<-3$

2) $p>1$

$\begin{cases}b>3a-2p;\\ b<a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}.\end{cases}$

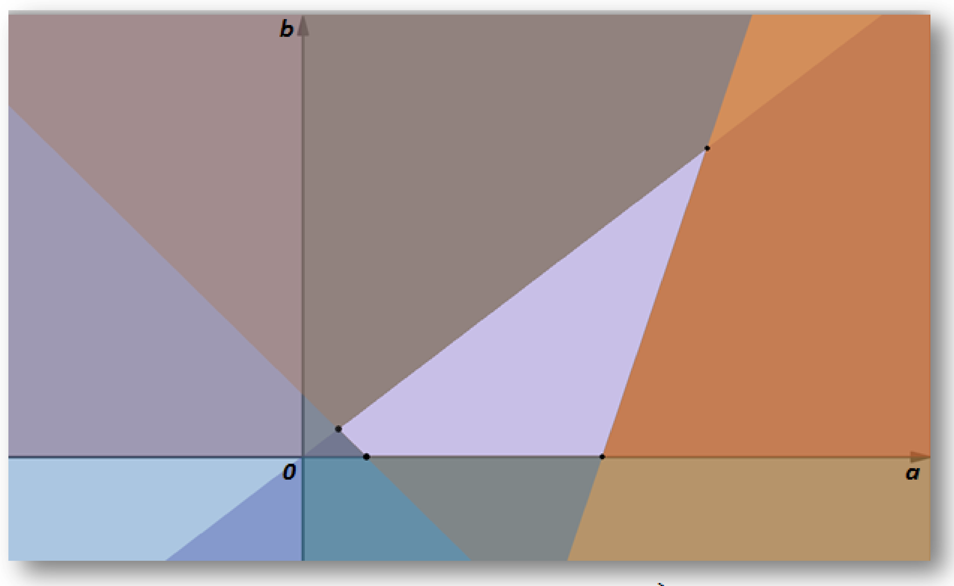


Рис. 5

$M=\left\{(a;b)\,\middle|\,a+b>1, b>3a-2p, b<a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}, a>0, b>0.\right\}$ (рис. 5)

$$\begin{cases}b=3a-2p;\\ b=a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}\end{cases}$$

$$a_0=\frac{2p\sqrt{p+3}}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}};\quad b_0=\frac{2p\sqrt{p-1}}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}}$$

$$a_0+b_0=\frac{2p(\sqrt{p+3}+\sqrt{p-1})}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}}>1 \qquad (4)$$

$$\sqrt{p+3}(2p-3)+\sqrt{p-1}(2p+1)>0 \Rightarrow p>\frac{7}{6}$$

**Відповідь:** $p\in\left(-\frac{7}{2};-3\right)\cup\left(\frac{7}{6};+\infty\right)$

## Висновки

Розв'язуючи рівняння з параметрами потрібно ретельно дослідити всі випадки, не поспішати з висновками, бути уважними і не забувати, що при розв'язуванні рівнянь з параметрами можуть бути досить корисними різні геометричні міркування. А при розв'язуванні системи рівнянь головне зуміти звести їх до таких, які безперечно можна розв'язати. При цьому часто допомагають деякі стандартні прийоми, що полегшують це розв'язування. Незважаючи на це, більша їх частина потребує індивідуального підходу. Але навіть в звичайних ситуаціях потрібно думати і шукати оптимальні шляхи розв'язування.

## Додатки

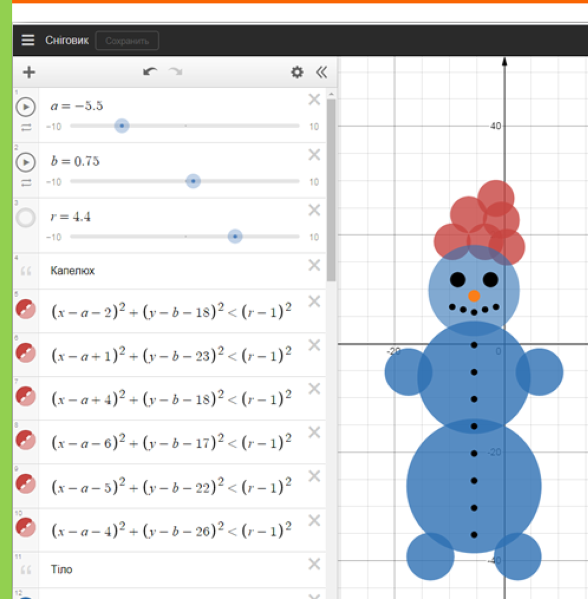

Рис. 6

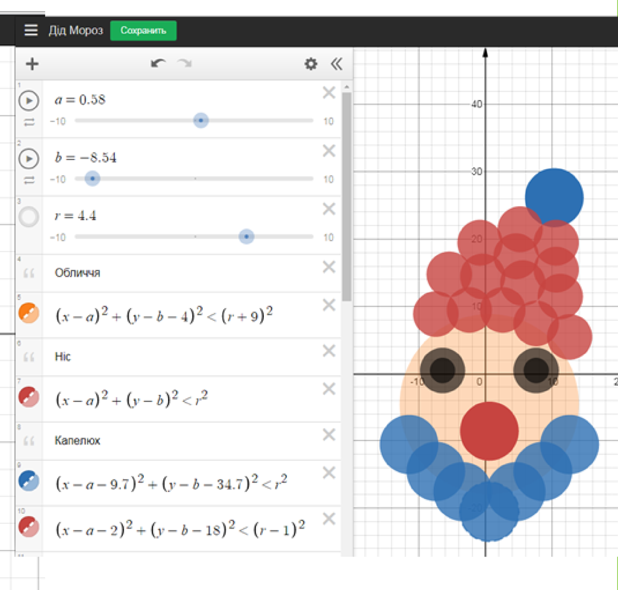

Рис. 7

•Графічний онлайн-калькулятор Desmos// URL: [https://www.desmos.com/?lang=ru]. – (дата звернення: 20.12.2020).