Міністерство освіти і науки України
Департамент освіти і науки
Миколаївської облдержадміністрації
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика
Секція: математика

Задачі з декількома параметрами

Роботу виконала:
Устичук Марія Віталіївна,
учениця 11 класу
Центрального ЗЗСО І–ІІІ ступенів
Шевченківської сільської ради
Миколаївської області

Науковий керівник:
Труш Галина Антонівна,
учитель математики
вищої кваліфікаційної категорії,
учитель - методист
Центрального ЗЗСО І–ІІІ ступенів
Шевченківської сільської ради
Миколаївської області

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри прикладної та вищої
математики ЧНУ імені Петра Могили

Миколаїв – 2021

АНОТАЦІЯ

Задачі з декількома параметрами; Устичук Марія Віталіївна; Миколаївське територіальне відділення МАН України; Центральний ЗЗСО I–III ступенів Шевченківської сільської ради Миколаївської області; 11 клас; Труш Галина Антонівна, учитель математики Центрального ЗЗСО I–III ступенів Шевченківської сільської ради Миколаївської області, заступник директора з навчально-виховної роботи, учитель-методист.

Багато прикладних задач, що описують реальні процеси містять два та більше параметрів, тому розв'язування задач з декількома параметрами є затребуваною та актуальною темою.

Але, на жаль, дуже мало літератури присвячено цьому типу завдань. Ось чому я вирішила виконати дослідження з аналізу та синтезу таких задач, а також методів та прийомів їх розв'язування.

Ціль науково-дослідницької роботи - ознайомитися з основними прийомами і методами розв'язування задач з декількома параметрами та запропонувати авторські розв'язки деяких з них.

У роботі розглядається ряд прикладів з декількома параметрами. Деякі з них були простішими, інші - складнішими, але беззаперечним є одне: розв'язуючи їх я отримала багато досвіду і з'ясувала найбільш доцільні способи розв'язування прикладів з двома та більше параметрами.

Отримані результати свідчать, що основне, що потрібно засвоїти при розв'язуванні задач з декількома параметрами – це необхідність використовувати такі перетворення, які призводять до зменшення кількості параметрів, або утворюють функції, дослідження яких спрощується у системі координат aOb.

Ключові слова: задачі, приклади, рівняння, системи рівнянь, параметр, декілька параметрів

ЗМІСТ

ВСТУП

Задачами з параметрами я почала захоплюватись з 2019 року. За цей час було підготовлено дві роботи: «Рівняння та нерівності з параметрами» [18], «Рівняння та нерівності вищих порядків з параметрами» [19], які були відзначені II-м місцем на II-му етапі Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України. З роботами «Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами» (див. додаток А) та «Геометричні методи розв’язання задач з одним та багатьма параметрами» (див. додаток В) я виступала на засіданнях шкільних математичних гуртків та гуртка математики Миколаївського територіального відділення МАН України.

При розв’язуванні рівнянь, нерівностей та систем, що містять один параметр, завжди виникали питання: «А якщо параметрів більше, ніж один? А що відбудеться, якщо параметрів буде декілька?»

Зрозуміло, що при збільшені параметрів більшим стане і число можливих випадків, що підлягають розгляду. Жоден з можливих варіантів не повинен бути пропущеним. Як це зробити? У минулих роках я лише частково розглядала такі задачі [17],[18],[19]. Єдиного методу чи підходу для всіх задач з параметрами не існує. Тому в цій роботі я на прикладах покажу, як розв'язуються рівняння з декількома параметрами.

Моїм завданням було здійснити теоретичний аналіз основних типів задач з параметрами та порівняти доцільність використання графічного та аналітичного методів розв’язування на прикладі задач з параметрами різних порядків та тригонометричних задач з параметрами.

У цьому році я вирішила зупинилися на розгляді лише рівнянь та систем рівнянь з декількома параметрами. Розгляд нерівностей не дає нічого принципово нового, а лише призводить до збільшення технічних складнощів [3].

Розглянуті в роботі приклади різні за змістом. В розв'язанні одних я використовувала, для наочності, графіки, а інші розв'язувалися лише аналітично.

Об'єкт дослідження – задачі з декількома параметрами.

Предмет дослідження – способи розв'язування задач з декількома параметрами різних типів.

Мета виконання науково-дослідницької роботи – поширити спектр прийомів і методів розв'язання різних задач з декількома параметрами.

Для досягнення мети науково-дослідницької роботи поставлено такі **завдання**:

- продемонструвати удосконалені розв'язки задач з декількома параметрами, офіційних українських збірників, завдань контролю знань, наукових статей та книг на відповідну тематику;
- розробити додаток з авторськими прикладами використання рівнянь з декількома параметрами для побудови динамічних зображень в графічному онлайн-калькуляторі Desmos;
- розробити додаток з матеріали: "Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами", "Геометричні методи розв'язання рівнянь з параметрами".

Дослідження проводилося за допомогою методів аналізу, синтезу і узагальнення, що дозволило систематизувати теоретичний матеріал та подати його у зрозумілому вигляді. Теоретичною основою дослідження стали положення і концепції, представлені в роботах різних авторів: П. І. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якір, В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич, Б. А. Радунский, А. Я. Маргулис, А. Г. Мордкович та інші.

Науково-дослідницька робота складається з: вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел із 21 найменувань і додатку. У тексті науково-дослідницької роботи міститься 11 рисунків. Загальний обсяг роботи 30 сторінок.

РОЗДІЛ І
РІВНЯННЯ З ДЕКІЛЬКОМА ПАРАМЕТРАМИ

Загальний вигляд рівняння відносно x з двома параметрами такий:

$$F(x; a; b) = 0.$$

Дане рівняння при заданій функції F – це, по суті, нескінченна множина рівнянь, кожне з яких задається упорядкованою парою чисел $(a; b)$.

1.1. Фіксація параметра

Розв’язання рівняння з двома параметрами, зведемо до задачі з одним параметром, фіксуючи інший.

Приклад 1. Розв’язання при будь-якому значенні другого параметра.

При яких значеннях параметра a при будь-якому значенні параметра b має розв'язок рівняння

$$\sin(2a - b + x) = |b^3 - 1| \sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2a\right) + \frac{|b^3+1|}{2\cos a} \qquad (1)$$

Розв'язання.

Так як рівняння (1) повинно мати розв'язки при будь-якому значенні параметра b , то воно буде мати розв'язки і при значенні $b = 1$. Підставляючи це значення в початкове рівняння, знаходимо, що $\sin(2a - 1 + x) = \frac{1}{\cos a}$.

З отриманого відношення слідує, що $\cos a = \pm 1$, адже в іншому випадку $|\sin(2a - 1 + x)| > 1$, чого бути не може.

Розв'язуючи рівняння $\cos a = \pm 1$ знаходимо необхідні умови, які мають задовольняти значення параметра a, щоб рівняння (1) мало розв'язок. Вони тут такі: $a = 2\pi k,\ \ a = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z.$

Нехай $a = 2\pi k$. При таких значеннях a рівняння (1) запишеться у вигляді

$$\sin(x - b) = -\frac{1}{2}|b^3 - 1| + \frac{1}{2}|b^3 + 1|.$$

Тепер, оскільки $|\sin(x - b)| \leq 1$, то повинна виконуватися нерівність $\frac{1}{2}(|b^3 + 1| - |b^3 - 1|) \leq 1$, а тоді, якщо розглянути графіки функцій

$$y = \sin(x - b) \text{ і } y = \frac{1}{2}(|b^3 + 1| - |b^3 - 1|)$$

в координатних площинах xOy і bOy (рис. 1, рис. 2), то приходимо до висновку, що рівняння (1) буде мати розв'язки при будь-якому значенні параметра b.

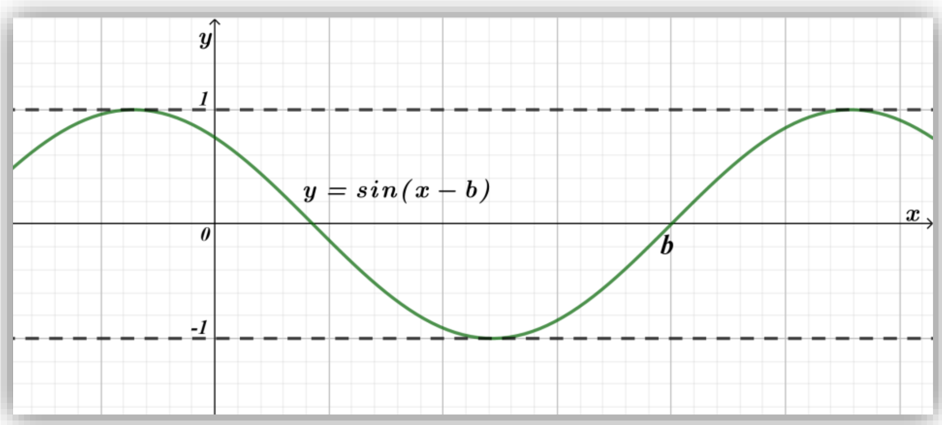

Рис. 1. 1

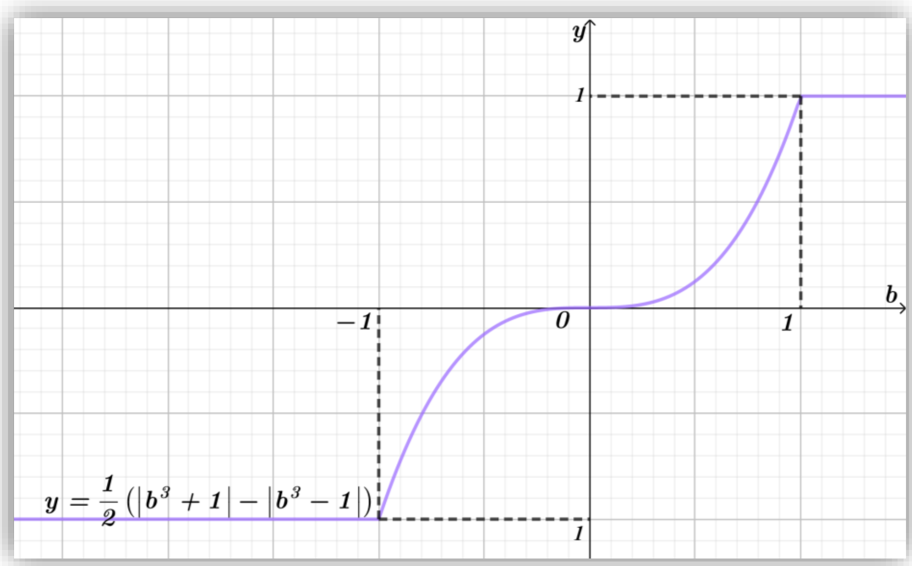

Рис. 1. 2

Розглянемо випадок $a = \pi + 2\pi k$. В такому випадку рівняння (1) запишеться у вигляді

$$\sin(x - b) = -\frac{1}{2}|b^3 - 1| - \frac{1}{2}|b^3 + 1|. \tag{2}$$

Якщо тепер розглянути графіки функцій

$$y = \sin(x - b) \text{ і } y = -\frac{1}{2}|b^3 - 1| - \frac{1}{2}|b^3 + 1|$$

в координатних площинах xOy і bOy (рис. 1, рис. 3), то приходимо до висновку, що рівняння (2) має розв'язок не при всіх значеннях параметра b.

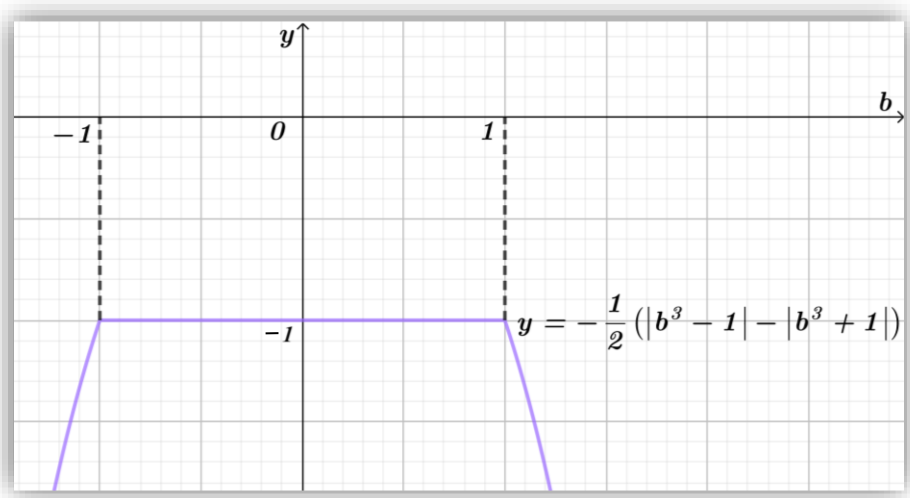

Рис. 1. 3

Відповідь: $a = 2\pi k, k \in Z.$

1.2. Дослідження в системі координат *aOb*

Як відомо, пару чисел $(a;b)$ можна інтерпретувати як точки на координатній площині. Це дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між всіма рівняннями виду $F(x;a;b)=0$ при заданій функції F і точками площини.

Для цього введемо систему координат aOb і домовимося кожному рівнянню виду $F(x;a;b)=0$ ставити у відповідність точку площини aOb з координатами $(a;b)$, і навпаки. Назвемо цю площину площиною параметрів. Таке відношення дещо незвичне (рівнянню відповідає точка), але воно допоможе нам у кожному конкретному випадку наочно уявити собі множину допустимих значень параметрів і не пропустити жодного випадку: кожній точці площини параметрів відповідає рівняння виду $F(x;a;b)=0$ і має відповідати деяка відповідь [3].

Приклад 2. Рівняння з двома параметрами при додатковій умові на параметри.

При яких значеннях параметрів a і b рівняння

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad (1)$$

має хоча б один корінь, а сума a^2+b^2 при цьому є мінімальною?

Розв'язання.

Рівняння (1) рівносильне рівнянню $x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$, або рівнянню $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b-2=0,$

де $x\neq 0$ ($x=0$ не є коренем рівняння (1)).

Таким чином, множина пар чисел $(a;b)$, для яких початкове рівняння має корінь, що дорівнює x_0, задається рівнянням

$$ay_0+b=2-{y_0}^2, \qquad (2)$$

де

$$y_0 = x_0 + \frac{1}{x_0}, \qquad (3)$$

задає на координатній площині aOb пряму (рис. 4).

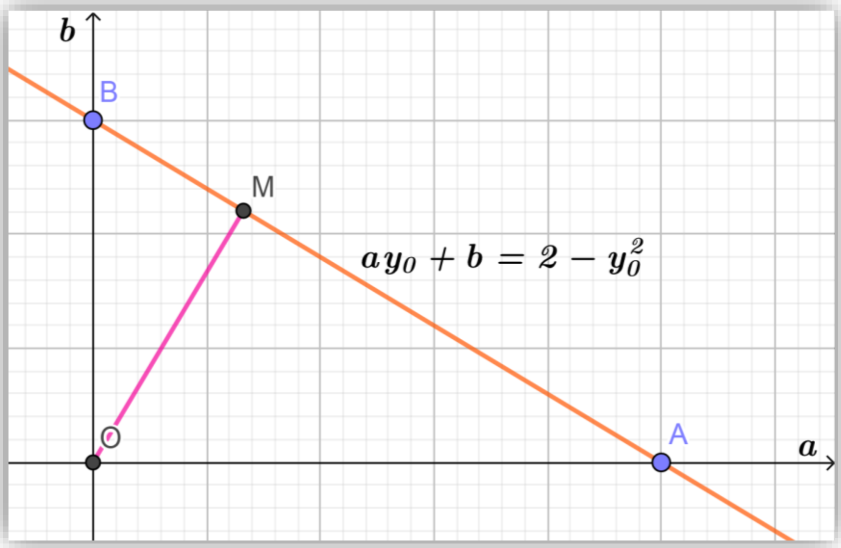

Рис. 1. 4

В цій же площині суму $a^2 + b^2$ можна геометрично пояснити як квадрат відстані від точки $O(0;0)$ до точки $M(a;b)$. З геометричних міркувань також зрозуміло, що при фіксованому y_0 мінімальне значення суми $a^2 + b^2$ дорівнює квадрату довжини перпендикуляра, опущеного з точки $O(0;0)$ на пряму, задану рівнянням (2).

Отже $a^2 + b^2 = |OM|^2 = h^2$.

Знайдемо h.

З ΔAOB маємо: $h = \frac{|OB||OA|}{\sqrt{|OB|^2+|OA|^2}}$ (за метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику).

Тепер враховуючи, що $|OA| = \frac{2-{y_0}^2}{y_0}$, а $|OB| = 2 - {y_0}^2$,

і, таким чином,

$|OB||OA| = \frac{(2-{y_0}^2)^2}{y_0}$, а $\sqrt{|OB|^2 + |OA|^2} = \frac{2-{y_0}^2}{y_0}\sqrt{{y_0}^2 + 1}$,

знаходимо, що

$$h^2 = a^2 + b^2 = \frac{(2-{y_0}^2)^2}{{y_0}^2+1}.$$

Звертаючись до формули (3) маємо наступні нерівності: $|y_0| \geq 2$ і, таким чином, ${y_0}^2 \geq 4$.

А тоді $$a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}.$$

Отже, якщо при деяких значеннях параметрів a і b рівняння (1) має корінь $x = x_0$, то при таких a і b мінімальне значення суми $a^2 + b^2$ дорівнює $\frac{4}{5}$.

Підставляючи $x_0 = 1$, отримуємо:

$$\begin{cases} 2a + b + 2 = 0; \\ a^2 + b^2 = \dfrac{4}{5}; \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a - 2; \\ a^2 + (-2a - 2)^2 = \dfrac{4}{5}; \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему дізнаємося, що умова задачі виконується при значеннях $a = -\frac{4}{5},\ b = -\frac{2}{5}$.

Відповідь: $a = -\frac{4}{5}, b = -\frac{2}{5}$.

Висновки до Розділу І:

Можна побачити, що в прикладах 1 і 2 було зручно використовувати графічне представлення рівнянь. Такий підхід дуже корисний: він допомагає знайти найбільш простий шлях розв'язування. Але всі роздуми відносно графіків можуть бути частиною розв'язування лише в тому випадку, коли вони зроблені в найзагальнішому вигляді. В задачах з параметрами слід особливо уважно відноситися до побудови графіка, адже при деяких значеннях параметрів його вид може кардинально змінитися.

Але не завжди алгебраїчне розв'язування є більш проблемним за геометричне. У випадку задач з декількома параметрами воно, зазвичай, більш доцільне ніж геометричне. Тому, перш за все, потрібно ретельно проаналізувати всі особливості конкретної задачі, подумати про найбільш раціональне використання її умов - це допоможе нам прийняти найкраще рішення.

Наприклад, досить популярний спосіб розв'язання рівнянь з декількома параметрами - зменшення кількості параметрів. Це дозволяє звести дане рівняння до рівняння з меншим числом параметрів, як це зроблено в прикладі 1.

Ще один досить розповсюджений прийом - введення нових змінних, як в прикладі 2, але вміння вільно використовувати його дається не одразу, а приходить з досвідом. Часто заміна змінних, на перший погляд, призводить до ускладнення задачі, частково, до збільшення числа невідомих. В таких ситуаціях не слід розгублюватися, потрібно спробувати довести розв'язання до кінця.

РОЗДІЛ II
СИСТЕМИ РІВНЯНЬ З ДЕКІЛЬКОМА ПАРАМЕТРАМИ

Дуже часто зустрічаються системи з двома параметрами. Розв'язуючи їх розглянемо ті самі методи, що і в розділі I. А саме фіксація параметра та дослідження в системі координат aOb.

2.1. Фіксація параметра

При фіксації параметра необхідно визначитися, який саме з параметрів ми для цього обираємо. Необхідно розуміти, що вибір фіксованого параметра не повинен приводити до ускладнення розв’язку.

Приклад 3. Система рівнянь з двома параметрами.

В залежності від значень параметрів a і b розв'язати систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a; \\ \quad x + y = b. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'язання.

Область допустимих значень змінних x і y задається нерівностями $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k, n \in Z$.

Тому, враховуючи, що $x + y = b$ маємо:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{2\sin b}{\cos(x-y) + \cos(x+y)} =$$

$$= \frac{2\sin b}{\cos(b-2y) + \cos b} = a.$$

Таким чином, система (1) приймає вигляд

$$\begin{cases} \frac{2\sin b}{\cos(b-2y)+\cos b} = a; \\ \quad x + y = b. \end{cases} \qquad (2)$$

Допустимо, що $a \neq 0$. Тоді з першого рівняння останньої системи отримаємо, що $\frac{2\sin b}{a} - \cos b = \cos(b - 2y)$.

Якщо позначити $p = \frac{2\sin b}{a} - \cos b$, то очевидно, що при $b \neq \pi m$, де $m \in Z$, і $|p| > 1$ система (2) розв'язків не має.

Якщо ж $|p| \leq 1$ і $b \neq \pi m$, то $2y - b = \pm \arccos p + 2\pi k, k \in Z$, або $y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos p + \pi k, k \in Z$, і $x = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos p + \pi k$.

Розглянемо випадок $a = 0, b = \pi m$.

При таких значеннях параметрів a і b із системи (1) приходимо до рівності $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi m - x) = 0$, яке є рівнянням, адже $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(\pi m - x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x$.

Тому в розглянутому випадку $x + y = b$, де $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Припустимо, що $a = 0, b \neq \pi m$, де $m \in Z$. В даному випадку з початкової системи отримуємо рівняння $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x - b)$, яке не має розв'язків.

Нарешті розглянемо випадок $a \neq 0, b = \pi m$. При таких значеннях параметрів a і b приходимо до хибного рівняння $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x = a \neq 0$.

Відповідь: якщо $a = 0, b = \pi m$, то $x + y = b$, де $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$;

якщо $a \neq 0, b \neq \pi m$, $|p| \leq 1$, то $y = \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos p + \pi k, k \in Z$, і $x = \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos p + \pi k$;

якщо $a = 0, b \neq \pi m$ або $a \neq 0, b = \pi m$ або $a \neq 0, b \neq \pi m$, $|p| > 1$, то розв'язків немає, де $p = \frac{2\sin b}{a} - \cos b$, $k, m, n, \in Z$.

2.2. Дослідження в системі координат aOb

Під час розв'язування задач з декількома параметрами графічний спосіб, зазвичай, потребує більше знань та досвіду. Проте й отримані результати набагато важливіші та більш цікаві.

Приклад 4 . Система рівнянь з трьома параметрами з додатковою умовою.

На координатній площині xOy розглядається множина M всіх точок, координати яких $(a;b)$ і значення параметра p такі, що $a>0, b>0$, $a+b>1, 3ap<bp+2p^2$ і система рівнянь

$$\begin{cases} px^2+2xy+y^2=b^2; \\ 3x+y=a; \end{cases} \quad (1)$$

не має розв'язків. При яких значеннях параметра p множина M є внутрішньою областю многокутника?

Розв'язання.

Нерівності

$$a>0, b>0, a+b>1 \quad (2)$$

задають на координатній площині aOb множину точок Q, що лежать вище прямої $a+b=1$.

Виражаючи з другого рівняння системи (1) змінну y і підставляючи її значення в перше рівняння цієї ж системи отримуємо рівняння

$$(p+3)x^2-4ax+a^2-b^2=0. \quad (3)$$

Якщо дискримінант цього рівняння

$D=4\big(4a^2-(p+3)(a^2-b^2)\big)=4\big((1-p)a^2+(p+3)b^2\big)<0$,

що можливо тільки за умов $p<-3$ або $p>1$, то рівняння (3), а значить, і система (1) розв'язків не мають.

Так як $D < 0$, то $(p+3)b^2 < (p-1)a^2$, і тоді розглянемо систему нерівностей

$$\begin{cases} bp > 3ap - 2p^2; \\ (p+3)b^2 < a^2(p-1). \end{cases} \tag{4}$$

При $p < -3$ ця система рівносильна системі $\begin{cases} b < 3a - 2p; \\ b > a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}. \end{cases}$

Перша нерівність цієї системи задає частину площини, що лежить нижче прямої $b = 3a - 2p$, а друга нерівність системи задає частину площини, що лежить вище прямої $b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}$. Ця система з урахуванням (2) задаватиме необхідну за умовою множину в тому випадку, коли точка перетину прямих $b = 3a - 2p$ і $b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}$ належить множині Q, тобто лежить вище прямої $a + b = 1$. А так як $p < -3$, то $-2p > 6$ і, отже, пряма $b = 3a - 2p$ перетинає вісь Ob вище точки з ординатою $b = 6$, а, отже, і вище точки з ординатою $b = 1$. Тому прямі будуть перетинатися, якщо для кутових коефіцієнтів прямих $b = 3a - 2p$ і $b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}$ виконується нерівність $\sqrt{\frac{p-1}{p+3}} > 3$, тобто якщо $-\frac{7}{2} < p < -3$.

Якщо $p > 1$, то система (4) перепишеться у вигляді $\begin{cases} b > 3a - 2p; \\ b < a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}. \end{cases}$

Тоді множина M описується нерівностями

$$M = \left\{ (a;b) \middle| a + b > 1, b > 3a - 2p, b < a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}, a > 0, b > 0. \right\}$$

Графічну інтерпретацію цієї множини можна побачити на рис. 2.1.

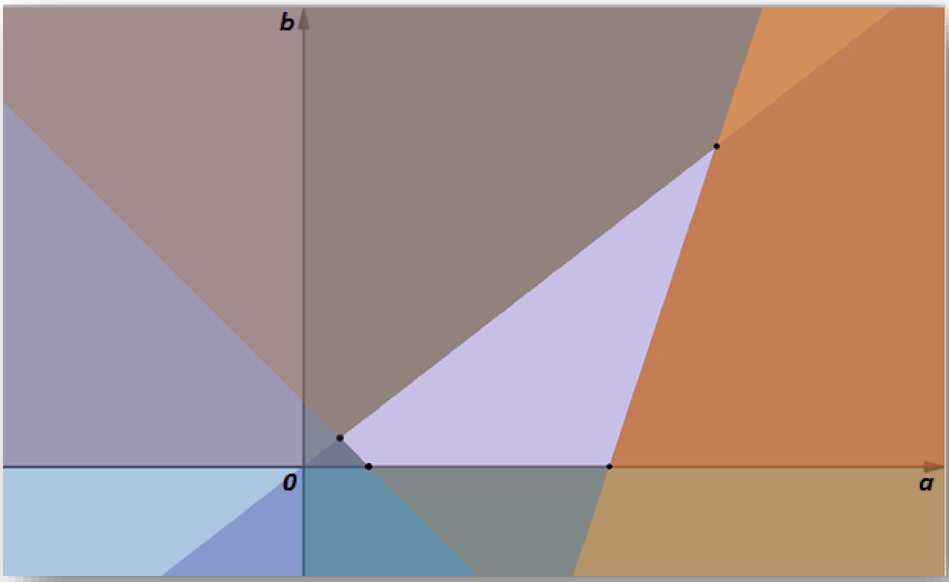

Рис. 2.1

З системи $\begin{cases} b = 3a - 2p; \\ b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}} \end{cases}$ знайдемо координати точки $A(a_0; b_0)$ перетину прямих $b = 3a - 2p$ і $b = a\sqrt{\frac{p-1}{p+3}}$:

$a_0 = \frac{2p\sqrt{p+3}}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}}$; $b_0 = \frac{2p\sqrt{p-1}}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}}$.

Точка $A(a_0; b_0)$ лежить вище прямої $a + b = 1$ і, отже, множина M не порожня у тому випадку, якщо

$$a_0 + b_0 = \frac{2p(\sqrt{p+3}+\sqrt{p-1})}{3\sqrt{p+3}-\sqrt{p-1}} > 1. \quad (5)$$

Але оскільки $3\sqrt{p+3} - \sqrt{p-1} > 0$ при $p > 1$, то з (5) отримуємо нерівність $\sqrt{p+3}(2p-3) + \sqrt{p-1}(2p+1) > 0$, розв'язуючи яку при $p > 1$, отримуємо, що $p > \frac{7}{6}$.

Відповідь: $p \in \left(-\frac{7}{2}; -3\right) \cup \left(\frac{7}{6}; +\infty\right)$.

Висновки до Розділу II:

При розв'язуванні тригонометричних систем рівнянь з декількома параметрами (приклад 3) часто буває непросто зробити перший крок, знайти "ключ" до розв'язання задачі. Розв'язання таких систем потребує майстерності та інтуїції. Загальні рекомендації тут давати не можна. Можна лише порадити намагатися застосовувати такі перетворення рівнянь системи, які приводять до появи тригонометричних функцій одного аргументу, або хоча б не збільшують число функцій з різними аргументами.

Зазвичай нелегко здогадатися, як перетворити рівняння, щоб здійснилося очевидне спрощення. Але для розв'язання схожих систем існує стандартний прийом: потрібно розглядати якесь з рівнянь як квадратне відносно невідомого. У випадку приклада 4 було зручно розглядати рівняння $(p+3)x^2 - 4ax + a^2 - b^2 = 0$ як квадратне відносно x.

Повертаючись до приклада 3, хочемо нагадати, що при розв'язуванні задач з параметром доводиться розглядати багато різних варіантів. Своєчасне знаходження хоча б частини неможливих випадків має велике значення, так як звільняє нас від зайвої роботи. Тому при розв'язуванні таких завдань доцільно під ОДЗ розуміти область допустимих значень невідомих і параметрів.

ВИСНОВКИ

«Ніколи не сподівайся на лише один варіант розвитку подій. Їх у тебе повинно бути декілька.» (М. Керн "Математик"). Як влучно ця цитата характеризує всі задачі, які мають параметр. Адже задача з параметром - це, по суті, декілька задач, кожна з яких отримується з заданого конкретного значення параметра.

При різних значеннях параметра рівняння може мати різні множини коренів, і наша задача полягає в тому, щоб дослідити всі випадки і з'ясувати, що буде при будь-якому значенні параметра.

Результати роботи:

- продемонстровано удосконалені розв'язки задач з декількома параметрами, взятих з підручників, офіційних українських збірників, завдань контролю знань, наукових статей та книг на відповідну тематику;
- розроблено додаток з авторськими прикладами використання рівнянь з декількома параметрами для побудови динамічних зображень в графічному онлайн-калькуляторі Desmos;
- розроблено додаток з матеріали: "Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами", "Геометричні методи розв'язання рівнянь з параметрами".

У висновку зазначимо, що розв'язуючи рівняння з параметрами потрібно ретельно дослідити всі випадки, не поспішати з висновками, бути уважними і не забувати, що при розв'язуванні рівнянь з параметрами можуть бути досить корисними різні геометричні міркування. А при розв'язуванні системи рівнянь головне зуміти звести їх до таких, які безперечно можна розв'язати. При цьому часто допомагають деякі стандартні прийоми, що полегшують це розв'язування. Незважаючи на це, більша їх частина потребує індивідуального підходу. Але навіть в звичайних ситуаціях потрібно думати і шукати оптимальні шляхи розв'язування.

У майбутньому я не збираюся припиняти дослідження задач з параметрами і хочу ще більше зануритися у цікавий світ математики.

Матеріал науково-дослідницької роботи може бути використано вчителями математики, студентами вузів, слухачами підготовчих відділень, абітурієнтами та старшокласниками. Ознайомившись з наведеними прикладами, вони отримають навички, які зможуть використати для розв'язування аналогічних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. Задачи с параметрами. 3-е издание, дополнительнное и переработанное. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005, - 328 с.

2. В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. - 3-е издание, доработ. – Мн.: ООО "Асар", 2005, - 464 с.

3. А. Я Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский Еще раз об уравнениях с параметрами / А. Я Маргулис, А. Г. Мордкович, Б. А. Радунский / / Квант. - 1970. - №2 - С. 46-49.

4. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов. – М. : МЦНМО, 2007. – 468 с.

5. Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.

6. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2007-2008 та 2008 – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 552 с.

7. Апостолова Г. В. Перші зустрічі з параметрами / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2004. – 328 с. 2. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2006. – 256 с.

8. Задачі з параметрами / В. К. Репета, Н. О. Клешня, М. В. Коробова, Л. А. Репета. – К. : Вища школа, 2006. – 302 с.

9. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://zaba.ru/, http://problems.ru/

10. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань,

результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://matholymp.org.ua/

11. Лейфура В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – Львів: Євро світ, 1999. – 128 с.

12. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.

13. Програма динамічної математики GeoGebra Classic// URL: [https://geogebra.ru.uptodown.com/windows]. – (дата звернення: 12.11.2020).

14. Графічний онлайн-калькулятор Desmos// URL: [https://www.desmos.com/?lang=ru]. – (дата звернення: 20.12.2020).

15. Авторська розробка, для заняття математичного гуртка Миколаївського тв МАН України №6 "Новорічно-різдвяні математичні родзинки" Дід Мороз/ URL: [https://www.desmos.com/calculator/3rqoqvajyi]. – (дата звернення: 25.12.2020).

16. Авторська розробка, для заняття математичного гуртка Миколаївського тв МАН України №6 "Новорічно-різдвяні математичні родзинки" Сніговик / URL: [https://www.desmos.com/calculator/a8kg9vyfns]. — (дата звернення: 25.12.2020).

17. Устичук М. Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами. //Блог вчителя математики Труш Галини Антонівни/ URL: http://galinatrush1965.blogspot.com/p/blog-page_19.html. – (дата звернення: 15.01.2020).

18. Устичук М. Рівняння та нерівності з параметрами./Науково-дослідницька робота Миколаївське т/в МАН України, Відділення: математика, Секція: математика, Науковий керівник:Труш Г. А. // Рукопис. Миколаїв. - 2019 -35с. URL:

[https://manmathmk.files.wordpress.com/2020/12/d0a0d0bed0b1d0bed182d0b0-d09cd090d09d-d0a3d181d182d0b8d187d183d0ba-d09cd0b0d180d196d197-2019.pdf]. –(дата звернення: 15.01.2020).

19. Устичук М. Рівняння та нерівності вищих порядків з параметрами./Науково-дослідницька робота Миколаївське т/в МАН України, Відділення: математика, Секція: математика, Науковий керівник:Труш Г. А. Рукопис. Миколаїв. - 2020 -33с. //Ман_ Математика_Миколаїв – відділення математики Миколаївського т/в МАН України / URL: [https://manmathmk.files.wordpress.com/2020/12/d0a3d181d182d0b8d187d183d0ba-d09cd0b0d180d196d18f-d0a0d0bed0b1d0bed182d0b0-d0bdd0b0-d0b7d0b0d185d0b8d181d182-d09cd090d09d-2020.pdf]. – (дата звернення: 15.01.2020).

20. Заняття математичного гуртка №8 Миколаївського територіального відділення МАН України “Геометричні інтерпретації розв’язків задач з параметрами”. [https://manmathmk.files.wordpress.com/2021/01/d093d0b5d0bed0bcd0b5d182d180d0b8d187d0bdd196_d196d0bdd182d0b5d180d0bfd180d0b5d182d0b0d186d196d197_d180d0bed0b7d0b2d18fd0b7d0bad196d0b2_d0b7d0b0d0b4d0b0d187_d0b7_d0bfd0b0d180d0b0d0bcd0b5d.pdf] – (дата звернення: 15.01.2021).

ДОДАТКИ

Додаток А. " Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами"

Матеріал роботи на тему "Тригонометричні рівняння та нерівності з параметрами" [11] було використано мною для виступу серед школярів 9-11 класів Центрального ЗЗСО І-ІІІ ступенів. Ознайомившись з наведеними прикладами, вони отримали навички, які зможуть використати для розв'язування аналогічних задач. Роботу можна переглянути на блозі учителя математики нашої школи Труш Галини Антонівни [8].

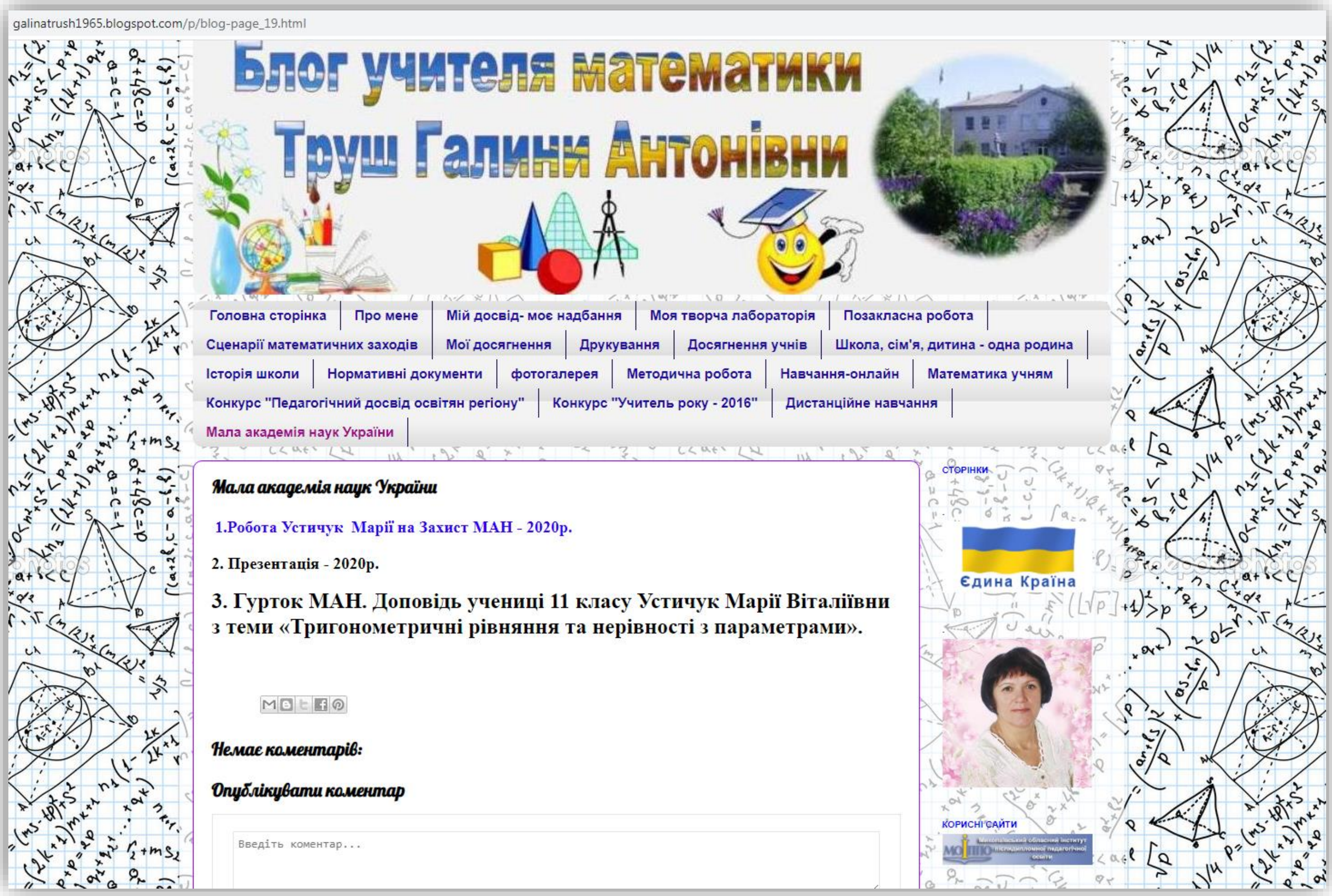

Рис. А.1

Додаток Б. Геометричні методи розв'язання рівнянь з параметрами.

Деякі результати своїх напрацювань стосовно задач з параметрами я представляла на засіданні гуртка МАН Миколаївського територіального відділення МАН України:

Приклад 1. За яких a рівняння $\frac{x^2-ax+1}{x+3} = 0$ має єдиний корінь?

Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$

Маємо $D = a^2 - 4 = 0, якщо\ a = \pm 2$.

Проте цим усі шукані значення параметра a не вичерпуються. Справді, відшукаємо те значення параметра a, при якому один із коренів $x = -3$. Підставимо $x = -3$ в рівняння. Дістанемо $a = -\frac{10}{3}$. Отже при $a = -\frac{10}{3}$, $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. Корінь x_1 звичайно відкидаємо, тому $x_2 = -\frac{1}{3}$ буде єдиним коренем при $a = -\frac{10}{3}$.

Відповідь: $a = \pm 2$, $a = -\frac{10}{3}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $|1 + x| \leq ax$.

1) $a = 0, |1 + x| \leq 0, x = -1$

2) $a > 0$. При $x \leq 0$ розв'язків не існує;

Нехай $x > 0$. Тоді

$$\begin{cases} 1 + x \leq ax, \\ 1 + x \geq -ax, \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-1)x \geq 1, \\ x(a+1) \geq -1, \\ x > 0, \\ a > 0, \end{cases} \tag{1}$$

звідки за умови, що $a > 1$, дістаємо: $x \geq \frac{1}{a-1}$.

Якщо ж $0 < a \leq 1, то\ (a-1)x \leq 0$, звідки $1 \leq 0$.Це означає, що система (1) є несумісною;

3) $a < 0$. При $x \geq 0$ розв'язків не існує. Нехай $x < 0$. Тоді

$$\begin{cases} (a-1)x \geq 1, \\ (a+1)x \geq -1, \\ x < 0, \\ a < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Якщо $-1 < a < 0$, то $a + 1 > 0, a - 1 < 0$.

Тому $\begin{cases} x \le \frac{1}{a-1}, \\ x \ge -\frac{1}{a+1}, \\ x < 0, \\ a < 0, \end{cases}$ звідки $-\frac{1}{a+1} \le x \le \frac{1}{a-1}$.

Якщо $a \le -1$, то $a + 1 \le 0$, $(a + 1)x \ge 0$. Отже, система (2) буде рівносильна такій системі: $\begin{cases} a \le -1, \\ x \le \frac{1}{a-1}, \end{cases}$ звідки $-\infty < x \le \frac{1}{a-1}$.

Відповідь: якщо $a \le -1$, то $-\infty < x \le \frac{1}{a-1}$;

якщо $-1 < a < 0$, то $-\frac{1}{a+1} \le x \le \frac{1}{a-1}$;

якщо $a = 0, \textit{то } x = -1$;

якщо $0 < a \le 1, \textit{то}$ розв'язків не існує;

якщо $a > 1$, то $\frac{1}{a-1} \le x < +\infty$.

Приклад 3. За якого значення параметра *a* система рівнянь

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - |x| = a \end{cases}$ має два розв'язки?

Розв'язання.

В координатній площині побудуємо графіки рівнянь, що входять до складу системи **(рис. Б.1).**

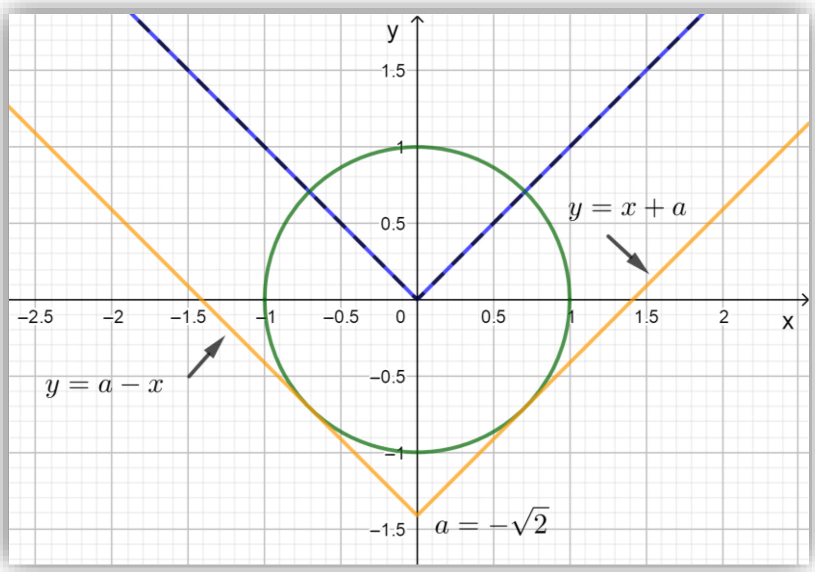

Рис. Б.1

Зрозуміло, що при $-1 < a < 1$ графік $y = |x| + a$ буде перетинати одиничне коло в двох точках. Два розв'язки буде також при дотику прямої $y = x + a$ до кола. Тоді у рівнянні $x^2 + (x + a)^2 = 1$ дискримінант дорівнює нулю, звідки $a = -\sqrt{2}$.

Відповідь: $-1 < a < 1, a = -\sqrt{2}$.

Приклад 4. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівносильні системи

$$\begin{cases} x + 2y = 2 - a, \\ -x + ay = a - 2a^2; \end{cases} \qquad (1)$$

і

$$\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язання.

Система (1) складається з двох лінійних рівнянь з двома змінними. Вона має єдиний розв'язок, якщо $a \neq -2$.

Перевіркою встановлюємо, що при $a = -2$ система (1) не має розв'язку.

Система (2) при $a = -2$ стає такою: $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 11x + 24 = 0. \end{cases}$

Друге рівняння містить квадратний тричлен відносно x: $2x^2 - 11x + {}$ $+24$. Його дискримінант від'ємний, тому друге рівняння не має розв'язку.

Таким чином, $a = -2$ задовольняє умову задачі.

Нехай $a \neq -2$. У цьому випадку система (1) має єдиний розв'язок, тому для того, щоб системи (1) і (2) були рівносильними необхідно, щоб система (2) мала єдиний розв'язок, яке співпаде з розв'язком системи (1).

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи (2), то $(x_0; -y_0)$ також є розв'язком цієї системи. Тому умова, що $y = 0$ - необхідна для існування єдиного розв'язку. Але вона не є остаточною: система може мати декілька розв'язків виду $(x_0; 0)$ або взагалі їх не мати.

При $y = 0$ система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + (a^2 + 2a - 11)x + 12 - 6a = 0. \end{cases}$

Звідси

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ 2 + a^2 + 2a - 11 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 18 + 3a^2 + 6a - 33 + 12 - 6a = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a^2 - 4a + 3 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ 3a^2 - 3 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ a = 3 \text{ або } a = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3, \\ a = \pm 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, шукані значення параметра a, якщо вони існують, належать множині $\{-1;\ 1;\ 3\}$. При $a = -1$ система (1) така: $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ -x - y = -3. \end{cases}$

Вона має єдиний розв’язок $(3; 0)$. А система (2) прийме вигляд $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0, \end{cases}$ або $\begin{cases} x^2 - y^4 - 4x + 3 = 0, \\ 2(x-3)^2 + y^2 = 0. \end{cases}$

Звідси $x = 3$, $y = 0$. Оскільки розв’язки систем співпали, $a = -1$ задовольняє умову задачі.

При $a = 1$ легко встановити, що система (1) має єдиний розв’язок – $(1; 0)$, а система (2) має два розв’язки – $(1; 0)$, $(3; 0)$.

При $a = 3$ система (1) має єдиний розв’язок

$$+\begin{cases} x + 2y = -1, \\ -x + 3y = -15, \end{cases} \quad y = -\frac{16}{5};$$
$$\overline{\quad 5y = -16, \quad}$$

$x = -1 - 2\left(-\frac{16}{5}\right) = \frac{27}{5}$. $\quad \left(\frac{27}{5}; -\frac{16}{5}\right)$, який не задовольняє систему (2).

Відповідь: $a = -2$ або $a = -1$.

Графічну інтерпретацію розв’язку **Приклада 4** показано на Рис. Б.2 та Рис. Б.3.

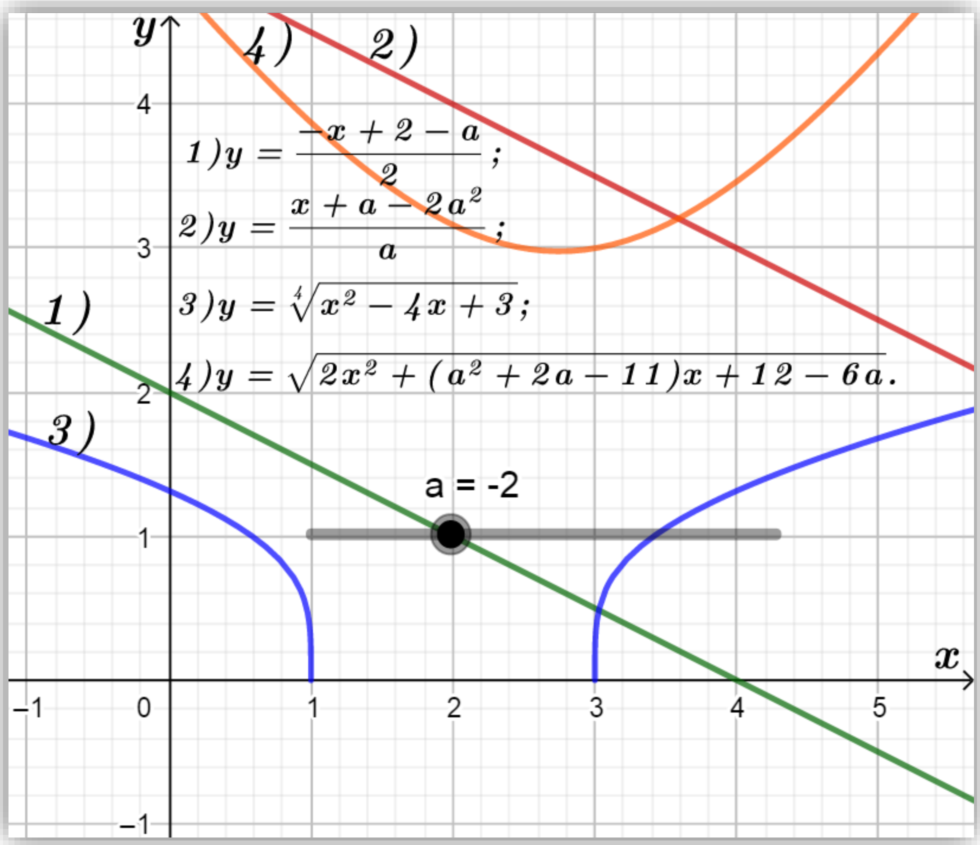
4)
2)
1)
3)
$1)y = \frac{-x+2-a}{2};$
$2)y = \frac{x+a-2a^2}{a};$
$3)y = \sqrt[4]{x^2-4x+3};$
$4)y = \sqrt{2x^2+(a^2+2a-11)x+12-6a}.$
a = -2
y
x
4
3
2
1
0
–1
1
2
3
4
5

Рис. Б.2

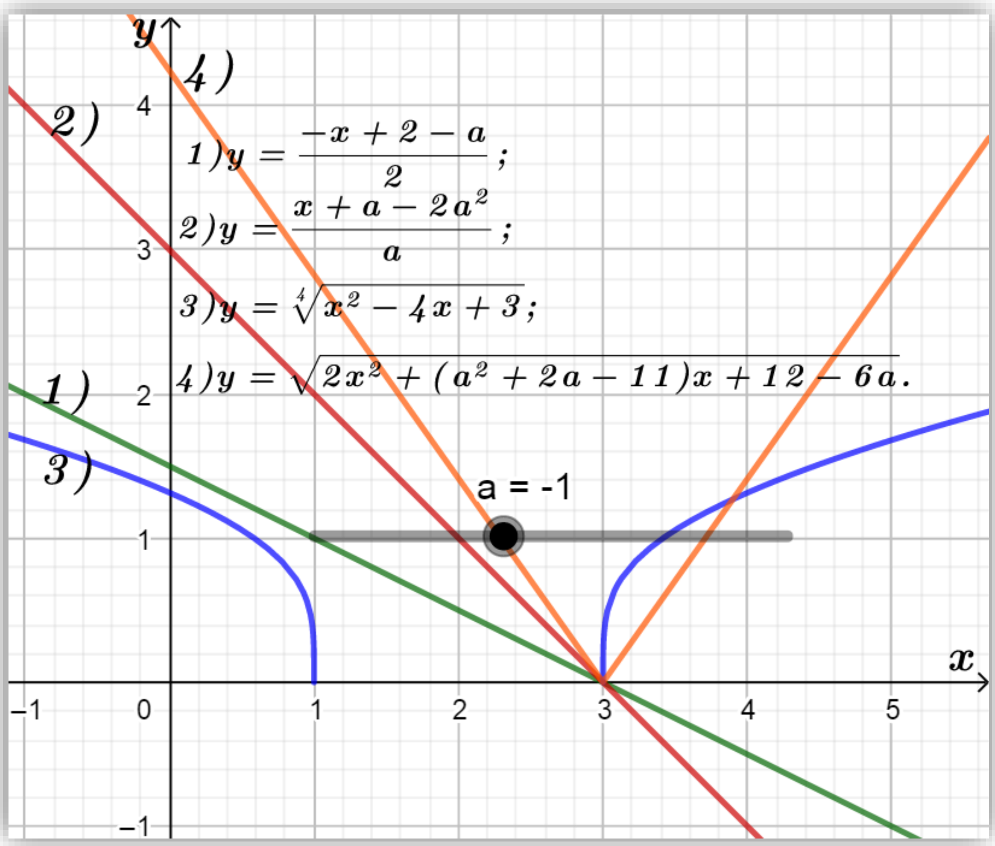
4)
2)
1)
3)
$1)y = \frac{-x+2-a}{2};$
$2)y = \frac{x+a-2a^2}{a};$
$3)y = \sqrt[4]{x^2-4x+3};$
$4)y = \sqrt{2x^2+(a^2+2a-11)x+12-6a}.$
a = -1
y
x
4
3
2
1
0
–1
1
2
3
4
5

Рис. Б.3

Додаток В. Використання рівнянь з двома параметрами для побудови динамічних зображень.

У цьому додатку я хочу показати приклади використання рівнянь з двома параметрами для побудови динамічних зображень у графічному онлайн-калькуляторі Desmos [5]. На даних прикладах [6],[7] зміна параметра a задає рух зліва на право, а параметра b - згори-донизу.

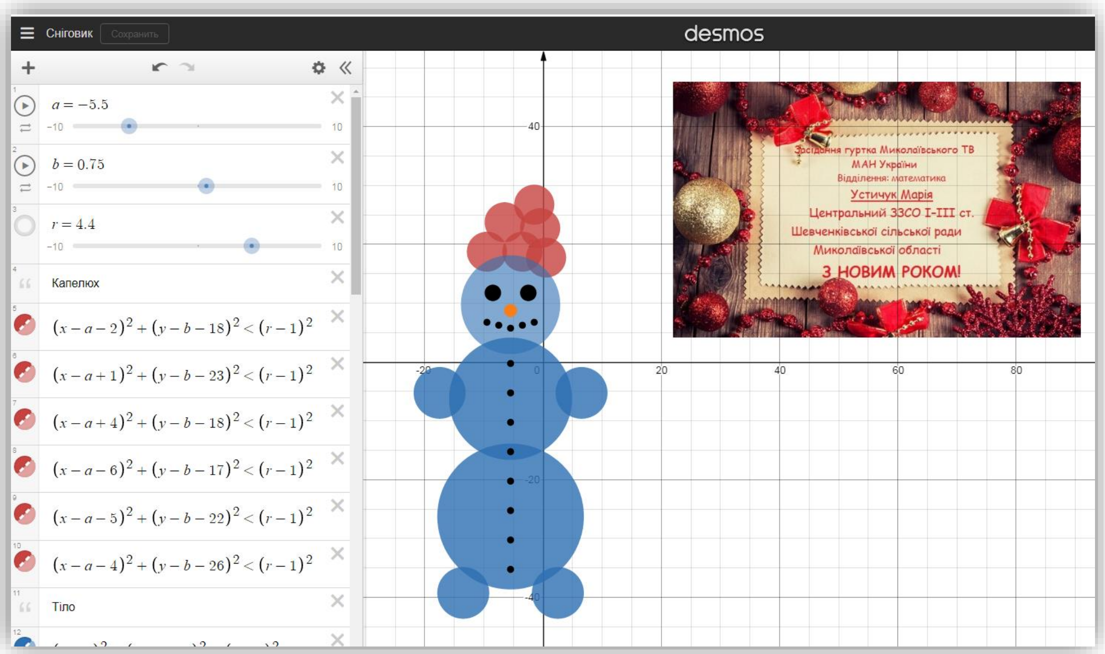

Рис. В.1

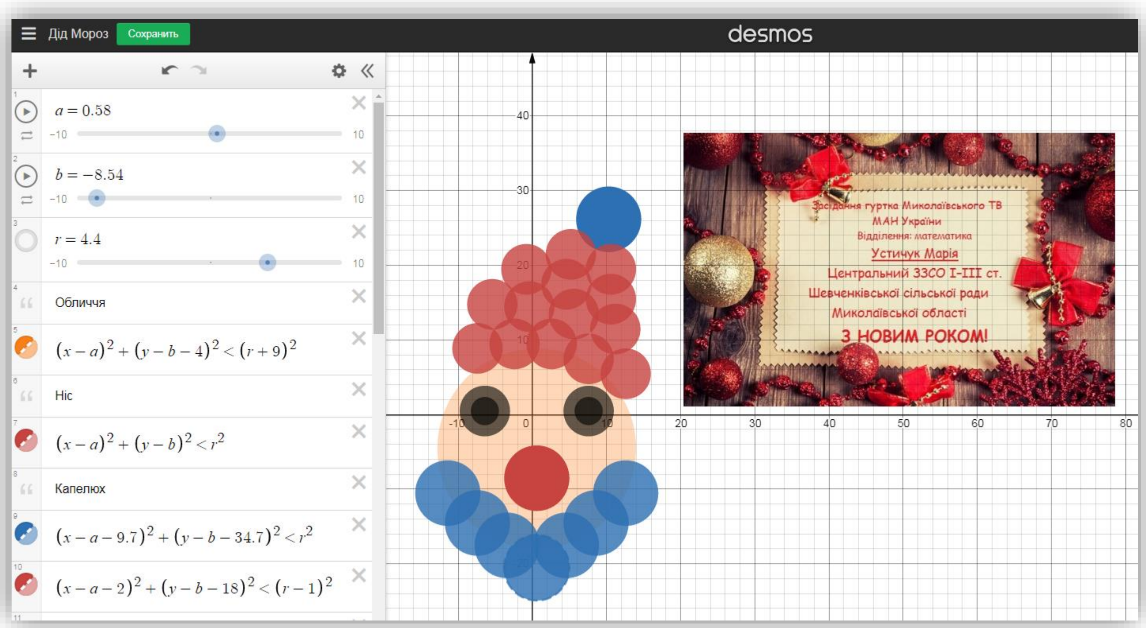

Рис. В.2