ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ $x^2 - ay^2 = c$

ТА РІВНЯННЯ ПЕЛЛЯ ЯК ОКРЕМИЙ ЙОГО ВИД

Роботу виконав:
Соколов Олександр Олексійович,
учень 10-М класу Вознесенської гімназії
імені Тараса Шевченка

Діофантові рівняння виду $x^2-ay^2=c$ та рівняння Пелля як окремий його вид

Предмет дослідження: Методи розв’язування рівняння виду $x^2 - ay^2 = c$.

Об’єкт дослідження: Діофантові рівняння $x^2-ay^2=c$, рівняння Пелля.

Мета дослідження: Проаналізувати відомі методи розв’язування рівнянь виду $x^2-ay^2=c$.

Завдання:

- Проаналізувати приклади та методи розв’язування діофантових рівнянь виду $x^2 - ay^2 = c$, в залежності від значень параметрів a і c;
- Розглянути найбільш ефективні підходи до розв’язання окремого виду діофантових рівнянь другого степеня – рівняння Пелля;
- Порівняти окремі методи знаходження найменшого цілочисельного розв’язку рівняння Пелля.

Діофантові рівняння виду $x^2 - ay^2 = c$ та рівняння Пелля як окремий його вид

І РОЗДІЛ: НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ВИДУ $x^2 - ay^2 = c$:

- **Метод розкладання на множники**
- **Метод локалізації**
- **Метод нескінченного спуску**
- **Застосування теорії подільності**

ІІ РОЗДІЛ РІВНЯННЯ ПЕЛЛЯ $x^2 - ay^2 = 1$

Історичний погляд на рівняння Пелля $x^2 - ay^2 = 1$

- Архімед, Евклід, Платон (V-III ст. до н.е.)
- Брахмагупта, Бхаскара Аккарія (XII ст.)
- П.Ферма, Л.Ейлер (XVI -XVIII ст.)
- Д.Валліс, У.Броункер (XVII ст.)
- Ж.Л.Лагранж (XVIII ст.)
- Н.Вайлдбергер (XXI ст.)

Загальні відомості про рівняння Пелля

$x^2 - ay^2 = 1$,

x, y – цілочисельні змінні,

a – цілочисельний коефіцієнт, не є точним квадратом числа.

$(1;0)$ - тривіальний розв’язок

Рівняння Пелля має безліч розв'язків.

Формули для знаходження розвяз'ків рівняння Пелля

$$x_n = \frac{1}{2}\left(\left(x_0 + \sqrt{a}\,y_0\right)^n + \left(x_0 - \sqrt{a}\,y_0\right)^n\right),$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\left(x_0 + \sqrt{a}\,y_0\right)^n - \left(x_0 - \sqrt{a}\,y_0\right)^n\right).$$

$$x^2 - ay^2 = 1$$

$$\begin{cases} x_n = x_0 x_{n-1} + a y_0 y_{n-1} \\ y_n = x_0 y_{n-1} + x_{n-1} y_0. \end{cases}$$

Методи знаходження найменшого нетривіального розв'язку рівняння Пелля

- Графічний;
- Пошук закономірностей;
- Індійський (циклічний);
- Англійський;
- Застосування ланцюгових дробів;
- Застосування квадратичних форм (метод Вайлдбергера)

Алгоритм розв'язування $x^2 - ky^2 = 1$

1) Підбір $x=a$ та $y=b$ $\longrightarrow a^2 - kb^2 = n \xrightarrow{max} 1$
2) $(r;1) \longrightarrow r^2 - k \cdot 1^2 = s$
3) Множення рівностей $a^2 - kb^2 = n$ та $r^2 - k \cdot 1^2 = s$

$(ar+kb)^2 - k(br+a)^2 = ns.$

Індійський метод

3. Підбір r

$(br + a) \vdots n$

ns → значення за модулем.

Англійський метод

3. Підбір $r^2 \leqslant k$

$(br + a) \vdots n$

r- максимальне з можливих.

4) Скорочення обох частин рівності на НСД чисел лівої та правої частин.
5) Якщо права частина спрощеної рівності дорівнює 1, то $(a;b)$ - найменший нетривіальний розв'язок. Якщо ні, то циклічний повтор (1-4).

Рівняння Пелля $x^2 - 67y^2 = 1$

1 етап;

$(8;1) \longrightarrow 8^2 - 67 \cdot 1 = -3$ $\qquad (r;1) \longrightarrow r^2 - 67 \cdot 1^2 = S,$

$$(8r + 67)^2 - 67(r + 8)^2 = -3S$$

Індійський метод:

$(r+8)$ кратне 3,

$3S \to min$

r	$-3S$	Рівність	Спрощена рівність
-2	189	$51^2 - 67 \cdot 36 = 189$	
1	198	$75^2 - 67 \cdot 81 = 198$	
4	153	$99^2 - 67 \cdot 12^2 = 153$	
7	54-min	$123^2 - 67 \cdot 15^2 = 54$	$41^2 - 67 \cdot 5^2 = 6 \neq 1$

Англійський метод:

$(r+8)$ кратне 3

$r^2 \leqslant 67, \; r = 7, \; (7^2 \leqslant 67)$

$123^2 - 67 \cdot 15^2 = 54$

$41^2 - 67 \cdot 5^2 = 6 \to \underline{(41;5)}$

Рівняння Пелля $x^2 - 67y^2 = 1$

II етап: $(41^2 - 67 \cdot 5^2)(r^2 - 67) = 6S$;

$(41r + 67 \cdot 50)^2 - 67(5r + 41)^2 = 6S$.

$(5r+41)$ - кратне 6

Індійський метод:

r	$6S$	Рівність	Спрощена рівність
-1	396	$294^2 - 67 \cdot 36^2 = 396$	
5	-252-min	$540^2 - 67 \cdot 66^2 = -5$	$90^2 - 67 \cdot 11^2 = -7 \neq 1$
11	324	$786^2 - 67 \cdot 96^2 = 324$	

Англійський метод:

$r = 5$

$(540^2 - 67 \cdot 66^2 = 6(-42) \mid :6^2$

$90^2 - 67 \cdot 11^2 = -7 \rightarrow \underline{(90;11)}$

Рівняння Пелля $x^2–67y^2 = 1$
Англійський метод

Етап	r, $r^2<67$	S	Рівність	Спрощена рівність
1	7	-18	$123^2-67\cdot15^2=54$	$41^2-67\cdot5^2=6$
2	5	-42	$540^2-67\cdot66^2=-252$	$90^2-67\cdot11^2=-7$
3	2	-63	$917^2-67\cdot112^2=441$	$131^2-67\cdot16^2=9$
4	7	-18	$1989^2-67\cdot243^2-162$	$221^2-67\cdot27^2=-2$
5	7	-18	$3356^2-67\cdot410^2=36$	$1678^2-67\cdot205^2=9$
6	2	-63	$17091^2-67\cdot2088^2=-567$	$1899^2-67\cdot232^2=-7$
7	5	-42	$25039^2-67\cdot3059^2=294$	$3577^2–67437^2=6$
8	7	-18	$54318^2-67\cdot6636^2=-108$	$9053^2–67\cdot1106^2=-3$
9	8	-3	$146526^2-67\cdot17901^2=9$	$48842^2-67\cdot5967^2=1$

Відповідь: ***(48842;5967)***

Квадратичні форми
Операції L та R

$ax^2 + bxy + cy^2$, де a, b ,c – цілі числа , x, y – змінні

$$\begin{tikzcd}(x+y;y) & (x;y) \arrow[l, bend right, "L"'] \arrow[r, bend right, "R"'] & (x;x+y)\end{tikzcd}$$

$a + b + c<0$

$a + b + c>0$

Метод Вайлдбергера: $x^2-8y^2=1$

$a+b+c=1+0-8<0$ $L:(x;y)\to(x+y;y)$

Операція	Перетворення квадратичної форми x^2-8y^2	Результат перетворення	Знак виразу $a+b+c$	Наступна операція
L	$(x+y)^2-8y^2$	$x^2+2xy-7y^2$	1+2-7<0	L
L	$(x+2y)^2-8y^2$	$x^2+4xy-4y^2$	1+4-4>0	R
R	$(3x+2y)^2-8(x+y)^2$	$x^2-4xy-4y^2$	1-4-4<0	L
L	$(3x+5y)^2-8(x+2y)^2$	$x^2-2xy-7y^2$	1-2-7<0	L
L	$(3x+8y)^2-8(x+3y)^2$	x^2-8y^2		

$X=3x+8y$, $У= x+3y$ (3;1), (17;6), (99;35)

Взаємозв'язок між

методом ланцюгових дробів

$[\sqrt{8}] = 2,$

$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{\alpha_1},$

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4} = 1 + \frac{1}{\alpha_2};$

$\alpha_2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4} - 1} = \frac{4}{\sqrt{8}-2} = \sqrt{8}+2 = 4 + \frac{1}{\alpha_3};$

$\alpha_3 = \frac{1}{(\sqrt{8}+2)-4} = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_4}.$

$\sqrt{8} = [2;(1,4)];$ $S=2$ – парне число; $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}} = \frac{P_1}{Q_1} = 2 + \frac{1}{1} = \frac{3}{1}$

Найменший натуральний розв'язок рівняння $x_o=3$ $y_o=1$.

методом Вайлдбергера

$$x^2 - 8y^2 = 1$$

(LLRLL)

LLRLL LLRLL...

2 1 4 1 4

[2;(1,4)]

Рівняння Пелля $x^2-67y^2 = 1$

X=48842x+399789y,

У=5967x+48842y

Перший нетривіальний розв'язок: ***(48842; 5967)***.

Наступною парою є ***(4771081927; 582880428)***.

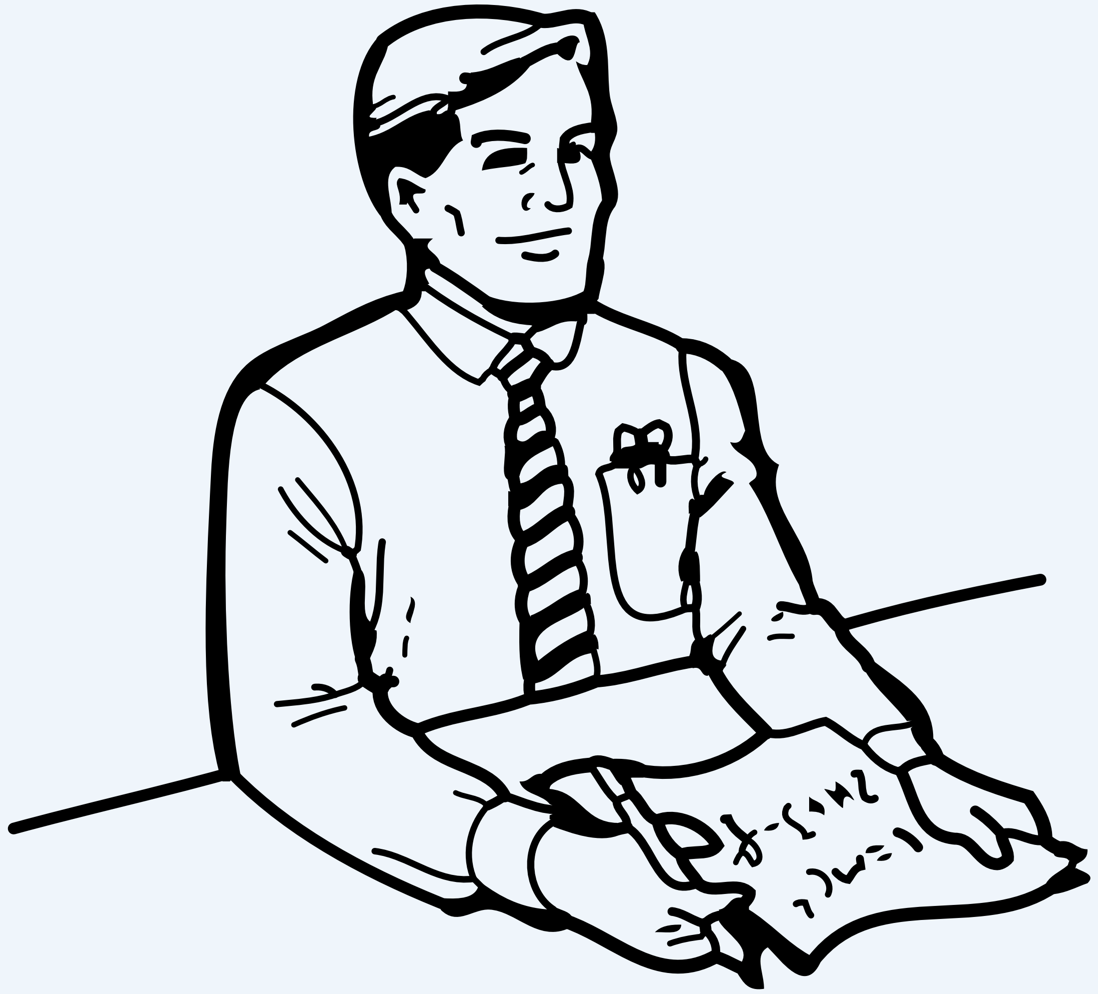
LLLLLLLLRRRRRLLRLRRRRRRRLRLLRRRRRLLLLLLLL

LLLLLLLLRRRRRLLRLRRRRRRRLRLLRRRRRLLLLLLLL

[8, (52117112516)]

ВИСНОВКИ:

- Рівняння виду $x^2 - ay^2 = c$ - клас діофантових рівнянь, вибір методів розв'язання яких залежить від значень параметрів ***a*** та ***c*.**
- Без знань спеціальних методів їх розв'язання не завжди можливо вирішити поставлену задачу, особливо це стосується розв'язання рівнянь Пелля.
- Знайти розв'язки рівняння Пелля можна методами елементарної математики за певними алгоритмами.
- Розв'язання рівняння Пелля можна вважати способом подання квадратного кореня з цілого числа у ланцюговий дріб.



Дякую за увагу!