Міністерство освіти і науки України

Департамент освіти і науки Миколаївської облдержадміністрації

Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математика

Секція: математика

# ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ $x^2 - ay^2 = c$

# ТА РІВНЯННЯ ПЕЛЛЯ ЯК ОКРЕМИЙ ЙОГО ВИД

Роботу виконав:
Соколов Олександр Олексійович,
учень 10-М класу Вознесенської гімназії
імені Тараса Шевченка

Науковий керівник:
Романенко Світлана Віталіївна, вчитель
вищої категорії, вчитель методист
Вознесенської гімназії
імені Тараса Шевченка

Науковий консультант:
Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри
інтелектуальних інформаційних систем ІІС,
Чорноморського національного
університету ім. Петра Могили

Миколаїв 2022

Миколаївське територіальне відділення МАН України

**Анотація**

Соколов Олександр Олексійович, учень 10-М класу Вознесенської гімназії імені Тараса Шевченка.
Науковий керівник: Романенко Світлана Віталіївна, вчитель вищої категорії, вчитель методист Вознесенської гімназії імені Тараса Шевченка

ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ $x^2 - ay^2 = c$ ТА РІВНЯННЯ ПЕЛЛЯ ЯК ОКРЕМИЙ ЙОГО ВИД

Дана робота присвячена аналізу відомих методів розв'язування діофантових рівнянь виду $x^2 - ay^2 = c$, у залежності від значень параметрів *a* та c. Для досягнення поставленої мети автором була вирішена низка завдань: розглянуті питання існування розв'язків рівняння та їх кількості, наведені алгоритми знаходження коренів рівнянь. Значна увага приділена практичній реалізації запропонованих методів, тому кожен із них розглядається на конкретних прикладах. Окремі рівняння розв'язані декількома способами для порівняння реалізації різних алгоритмів знаходження розв'язків. Також у роботі є вкраплення історичного матеріалу. В *першому розділі* розглянуті найпростіші способи розв'язування діофантових рівнянь виду $x^2 - ay^2 = c$, а у *другому* – методи знаходження розв'язків рівняння Пелля.

У результаті було розглянуто такі методи розв'язування рівнянь: розкладання на множники, метод локалізації, застосування теорії подільності (конгруенцій), біном Ньютона, метод нескінченного спуску, індійський (циклічний) та англійські методи, застосуванням ланцюгових дробів та метод Вайлдбергера (застосування квадратичних форм), сформульовані алгоритми застосування індійського та англійського методів, та на прикладі розв'язання рівняння $x^2–67y^2=1$ знайдені рекурентні формули його коренів.

*Ключові слова*: діофантові рівняння, рівняння Пелля, тривіальний розв'язок, загальний розв'язок, ланцюгові дроби, квадратичні форми.

ЗМІСТ

# ВСТУП

Знаходження розв'язків рівнянь у цілих числах є однією з найдавніших математичних задач, яку можна зустріти у роботах вавилонян та стародавніх греків. Відомо, що основним джерелом математичних знань того часу є «Арифметика» Діофанта (III ст. н. е.), яка містить різноманітні рівняння та їх системи. У ній Діофант, на честь якого й названі ці рівняння, передбачає ряд методів дослідження рівнянь другого степенів [6]. Окрім історичного та математичного інтересу, ці рівняння мають й прикладний характер у галузях, в яких аналізуються цілочисельні величини. Особливе місце серед діофантових рівнянь другого степеня посідають рівняння виду $x^2–ay^2=c$ і як частковий їх випадок – рівняння Пелля, яке зустрічається у роботах багатьох математиків: піфагорійців, Брахмагупти, Бхаскари, Платона, Евкліда, Архімеда, Ферма та інших. І до сьогодні інтерес до цих рівнянь не згасає. Так у 2008 році австралійський математик Н. Вайлдбергер запропонував ще один спосіб знаходження коренів рівняння Пелля [2, 5].

Рівняння виду $x^2–ay^2=c$ сьогодні можна зустріти не лише на сторінках підручника, але й на математичних олімпіадах та інтелектуальних конкурсах. Для знаходження їх розв'язків необхідні знання спеціальних методів, які охоплюють різні розділи математичної науки. *Тема даного дослідження:* Діофантові рівняння $x^2 - ay^2 = c$ та рівняння Пелля як окремий його вид. *Об'єкт дослідження* – діофантові рівняння $x^2–ay^2=c$ та рівняння Пелля, а *предмет дослідження* – методи їх розв'язування.

*Метою дослідження є* аналіз відомих методів розв'язування рівнянь $x^2-ay^2=c$. Виходячи із поставленої мети, сформулюємо наступні *завдання:*

— Проаналізувати приклади та методи розв'язування діофантових рівнянь виду $x^2 – ay^2= c$, в залежності від значень параметрів а і с.

— Розглянути найбільш ефективні підходи до розв'язання окремого виду діофантових рівнянь другого степеня – рівняння Пелля.

— Порівняти окремі методи знаходження найменшого цілочисельного додатного розв’язку рівняння Пелля.

# РОЗДІЛ І. НАЙПРОСТІШІ ВИПАДКИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ВИДУ $x^2 - ay^2 = c$

## *1.1.Короткі теоретичні відомості*

*Діофантові рівняння* – це алгебраїчні рівняння (або їх системи) з раціональними коефіцієнтами, розв’язки яких знаходять у цілих числах. Зазвичай вважають, що діофантові рівняння мають невідомих більше, ніж рівнянь, тому їх ще називають невизначеними. [6].

*Розв’язками діофантових* рівнянь є усі цілочисельні значення, наборів змінних, що перетворюють рівняння (систему рівнянь) у правильну числову рівність.

*Розв’язати діофантове рівняння* означає знайти його розв’язки або довести, що їх не існує.

*Кількість розв’язків рівняння* залежить від його виду та співвідношення між складовими. Рівняння може мати нескінченну або скінченну кількість розв’язків, а також розв’язків у цілих числах може не існувати.

Діофантове рівняння виду $x^2$-$ay^2$=$c$, у якому $x$, $y$ – змінні, $a$, $c$ – раціональні (цілочисельні) коефіцієнти є *діофантовим рівнянням другого степеня з двома змінними*.

Очевидно, що якщо пара чисел $(x_0;y_0)$ є розв’язком рівняння $x^2$-$ay^2$=$c$, то й пари чисел $(-x_0;y_0)$, $(x_0;-y_0)$, $(-x_0;-y_0)$ також є його розв’язками.

## *1.2. Метод розкладання на множники*

Розглянемо найпростіший випадок розв’язування рівнянь виду $x^2$-$ay^2$=$c$, а саме, коли ліву частину можна розкласти на множники як різницю квадратів двох цілих виразів. Тоді можливе застосування таких прийомів розв’язання: перебір можливих варіантів значень змінних та застосування принципу парності.

Проілюструємо кожний з них на конкретних прикладах.

*Приклад 1*. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^2–4y^2=5$. Розкладемо ліву частину на множники: $x^2–4y^2=(x–2y)(x+2y)$. Цей вираз буде дорівнювати 5 в одному з чотирьох випадків, перебір яких подамо у вигляді таблиці:

| № | Цілочисельні значення змінних | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x$-$2y$ | $x+2y$ | x | y |
| 1 | 5 | 1 | 3 | -1 |
| 2 | 1 | 5 | 3 | 1 |
| 3 | -5 | -1 | -3 | 1 |
| 4 | -1 | -5 | -3 | -1 |

Відповідь: $(3,-1); (3,1); (-3,1); (-3,-1)$.

*Приклад 2*. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^2–y^2=2022$.

Подамо рівняння у вигляді $(x-y)(x+y)=2022$. Його можна розв'язати, скориставшись, як і у попередньому прикладі, перебором можливих варіантів значень змінних, і таких варіантів буде вісім. Але можна скористатися наступними міркуваннями: так як значення виразів $(x-y)$ та $(x+y)$ набувають однакової парності, тому ліва частина або непарна, або кратна 4, а значення правої частини є числом парним, що не ділиться на 4. Отже, розв'язків у цілих числах рівняння не має.

### *1.3.Метод локалізації*

Ідея методу полягає у тому, що якщо у рівнянні $x^2$-$ay^2=c$, $a<0$, $c>0$, то ліва частина рівняння є сумою двох невід'ємних чисел, а права – додатним числом. Визначимо проміжки, яким належить одна із змінних, наприклад, $y$. Підставляючи знайдені цілі значення $y$, одержимо рівняння з однією змінною $x$. Якщо останнє рівняння має цілі корені, то й відповідне діофантове рівняння має цілочисельні розв'язки.

*Приклад 3.* Знайти усі цілочисельні розв'язки рівняння $x^2$-$6xy+13y^2=29$.

На перший погляд, рівняння не має нічого спільного з рівнянням виду

$x^2$-$ay^2$=$c$. Але виділивши повні квадрати у лівій частині, можна звести рівняння до вигляду: $(x-3y)^2+(2y)^2=29$.

Так як $(x-3y)^2 \geq 0$, то $(2y)^2 \leq 29$. Одержуємо, що $y \in \{0; \pm 1; \pm 2\}$.

1) Якщо $y=0$ або $y=\pm 2$, то рівняння не має цілочисельних розв'язків.
2) Якщо $y=-1$, то $(x+3)^2=25$, то $x=2$ або $x=-8$.
3) Якщо $y=1$, то $(x-3)^2=25$, то $x=8$ або $x=-2$.

Відповідь: (2;-1), (-8;-1), (-2;1), (8;1).

### *1.4.Метод нескінченного спуску*

Якщо права частина рівняння $x^2-ay^2=c$ дорівнює нулю, то це можливо за умови рівності нулю кожного з доданків. Значить пара чисел $(0;0)$ є розв'язком рівняння. Доведемо, що це єдиний розв'язок на прикладі розв'язання рівняння $x^2-2y^2=0$, застосувавши *метод нескінченного спуску* та скориставшись міркуваннями джерела [9]. Запишимо рівняння у вигляді $x^2=2y^2$. Очевидно, що права частина рівняння набуває парних значень, отже, й ліва є парним числом, тобто $x = 2x_1$; $4x_1^2 = 2y^2$; $2x_1^2 = y^2$. Звідси одержуємо, що й $y$ набуває лише парних значень.

Нехай $x=2x_1$, $y=2y_1$, тоді правильними є рівності $4x_1^2=8y_1^2$ та $x_1^2=2y_1^2$. Остання рівність означає, що пара $(x_1;y_1)$ також є розв'язками заданого рівняння, при цьому $x_1 = \frac{x}{2}$, $y_1 = \frac{y}{2}$. Крім того, правильним є те, що якщо пара чисел $(x;y)$ є розв'язками рівняння, то й пара $(\frac{x}{2}; \frac{y}{2})$ також є його розв'язком. Зазначені міркування можна продовжувати нескінченно. Таким чином приходимо до висновку, що цілі числа x та y діляться на будь-який степінь числа 2, а це можливо лише у випадку, коли $x=y=0$. Отже, рівняння $x^2=2y^2$ має єдиний розв'язок $(0;0)$.

### *1.5.Застосування теорії подільності*

Дієвим підходом до розв'язування діофантових рівнянь $x^2-ay^2=c$ є порівняння остач від ділення правої і лівої частин на деяке число, який найчастіше використовується при доведенні відсутності розв’язків рівняння та при знаходженні розв’язків у простих числах. При цьому зручно використовувати конгруенції, тобто вирази, які дають однакові остачі при діленні на деяке число. Найбільшою складністю при цьому становить вибір модуля конгруенцій.

*Приклад 4. Розв’язати рівняння у цілих числах $x^2–3y^2=17$.*

Виразимо $x^2$ та запишемо рівняння у вигляді $x^2=17+3y^2$. Розглянемо остачі від ділення обох частини рівняння на 3.

$[x\ \ 0(mod\ 3),\ x\ 1(mod\ 3), x2\ (mod\ 3);$ тоді $[x^2\ 0(mod\ 3),$ $x^2\ 1(mod\ 3), x^2 1(mod\ 3).$

Ліва частина останнього рівняння при діленні на 3 дає остачу 1 або 0, а права - остачу 2. Як бачимо, обидві частини рівняння дають різні остачі при діленні на 3, тоді задане рівняння не має розв’язків у цілих числах.

*Приклад 5*. Розв’язати у простих числах рівняння $x^2$-$6y^2$=19.[8]

Перепишемо рівняння у вигляді $x^2=19+6y.^2$

1) Якщо $x=5$, то $6y^2=6$, $y$=1 – не є простим числом.
2) Якщо $y=5$, то $x^2=169$, $x=13$. Значить пара *(13;5*)- розв’язок рівняння.
3) Якщо $x\neq 5$, $y\neq5$, то $x^2\equiv \pm1(mod\ 5)$, $6y^2\equiv\pm1(mod\ 5)$. Враховуючи, що *19≡-1(mod5) одержуємо 4 можливих випадки:*

| № | $x^2$ | $6y^2$ | $19+6y^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $x^2\equiv1(mod\ 5)$, | $6y^2\equiv1(mod\ 5)$ | $19+6y^2\equiv0(mod\ 5)^2$ |
| 2 | $x^2\equiv1(mod\ 5)$, | $6y^2\equiv-1(mod\ 5)$ | $19+6y^2\equiv3(mod\ 5)^2$ |
| 3 | $x^2\equiv-1(mod\ 5)$, | $6y^2\equiv1(mod\ 5)$ | $19+6y^2\equiv0(mod\ 5)^2$ |
| 4 | $x^2\equiv-1(mod\ 5)$, | $6y^2\equiv-1(mod\ 5)$ | $19+6y^2\equiv3(mod\ 5)y^2$ |

Порівнюючи результати другої та четвертої колонки таблиці, можемо зробити висновок, що пара чисел (13;5) єдиний розв’язок у простих числах.

Підсумовуючи вищезазначене та враховуючи очевидні випадки, можна зробити висновок, що під час розв’язування рівнянь виду $x^2$-$ay^2$=$c$ у цілих числах доцільно використовувати наступні методи:

<table>
<tr><td></td><td>Значення змінної a</td><td>Значення змінної c</td><td>Рекомендований метод розв’язання</td></tr>
<tr><td>1</td><td>a-довільне</td><td>c=0</td><td>Пара (0;0) – розв’язок, єдиність якого доводиться методом нескінченного спуску</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">a=0</td><td>c<0</td><td>Розв’язків не існує</td></tr>
<tr><td>c>0</td><td>$x=\pm\sqrt{c}$, с – квадрат числа</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td rowspan="2">a– квадрат числа, a>0</td><td>c- довільне значення</td><td>Розкладання на множники з подальшим перебором можливих варіантів значень змінних</td></tr>
<tr><td>c-парне, не кратне 4</td><td>Розкладання на множники, використання принципу парності</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4.</td><td rowspan="2">a<0</td><td>c>0</td><td>Метод локалізації значень змінних</td></tr>
<tr><td>c<0</td><td>Рівняння розв’язків не має</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>a >0,<br>a не є квадратом цілого числа</td><td>с≠1</td><td>Застосування конгруенцій для доведення відсутності розв’язків або знаходження розв’язків у простих числах</td></tr>
</table>

Як бачимо вибір методу розв’язування рівняння $x^2$-$ay^2$=$c$ залежить від значень параметрів *a* та *c*. Зауважимо, що наведений перелік методів не є вичерпним. Особливого підходу потребує розв’язання рівняння з додатним значенням параметру *a*, яке у недостатній мірі висвітлені у таблиці. Питання знаходження розв’язків рівняння $x^2$-$ay^2$=$c$ у випадку, коли коефіцієнт *a>0* та не є точним квадратом, *c=1* розглянемо у наступному розділі.

# РОЗДІЛ ІІ. РІВНЯННЯ ПЕЛЛЯ

Рівняння Пелля – це діофантові рівняння, якими цікавилися математики ще з часів стародавньої Індії та Греції та інтерес до яких не згасає й сьогодні. Цікаво, що назву ці рівняння отримали через випадкову помилку Леонарда Ейлера, який в одній із своїх робіт приписав їх авторство Джону Пелля. Ще піфагорійці знайшли розв'язок рівняння Пелля при $a=2$, а Феодор та Архімед - при а=3 та а=5. Цікаво, що у роботі "Виміри круга" Архімед визначив, що $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1361}{780}$., а пари чисел *(265;153)* та *(1361;780)* є розв'язками рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$.[2]. Рівняння Пелля зустрічається також у роботах Евкліда, Платона, Брахмагупти, Акхарія, П.Ферма, Д.Валіса, У.Броункера, Ж.Л.Лагранжа, Л.Ейлера, Н.Вайлдберга тощо.

## *2.1.Початкові теоретичні відомості про рівняння Пелля*

*Рівняння Пелля* – це клас діофантових рівнянь виду $x^2 – ay^2=1$, де *x, y* – цілочисельні змінні, *a* – цілочисельний коефіцієнт, який не точним квадратом. Так як рівняння діофантове, то й розв'язки шукають у цілих числах.

*Тривіальним розв'язком рівняння Пелля* називають найменший невід'ємний його розв'язок. Очевидно, що таким розв'язком є пара чисел (1;0).

*Найменшим нетривіальним розв'язком* рівняння Пелля називають найменший додатній розв'язок, відмінний від тривіального.

Проілюструвати наявність розв'язків рівняння Пелля можна графічно. Наприклад, побудуємо графік рівняння $x^2 - 2y^2 = 1$ (рис.1), а цілочисельні розв'язки можна знайти у «вузлах» клітинок. Очевидно, що натуральними розв'язками рівняння є пари чисел (1;0), (3;2), (17;12) тощо.

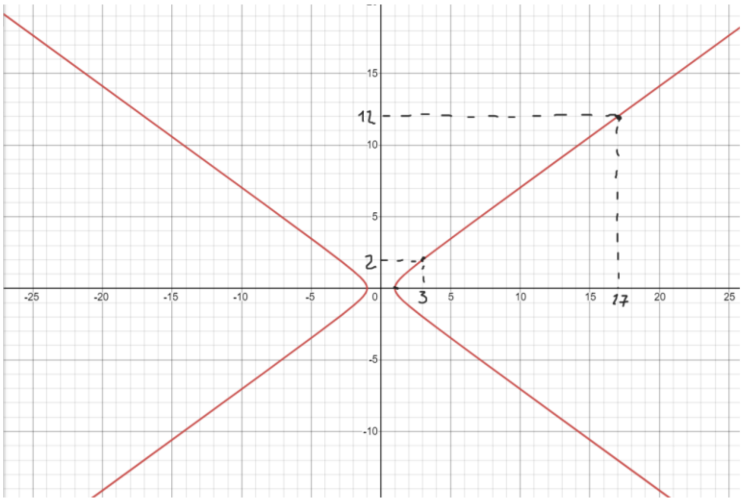


Рис.1

### *2.2.Методи дослідження та розв'язування рівняння Пелля*

#### 2.2.1.Біном Ньютона та кількість розв'язків рівняння Пелля

Розглянемо питання кількості розв'язків рівняння Пелля та виведемо формулу для їх знаходження, скориставшись міркуваннями першоджерела [1].

Нехай *($x_o$,,$y_o$)* – найменший нетривільний розв'язок рівняння $x^2$-$ay^2$=*1*. Підставимо ці значення у рівняння та розкладемо ліву частину одержаної рівності на множники: ($x_0+\sqrt{a}y_0$)($x_0-\sqrt{a}y_0$)=*1*. (2.1)

Перший множник рівності піднесемо до *n*-ого степеня за допомогою біномом Ньютона та одержимо рівність:

$$\left(x_0+\sqrt{a}\,y_0\right)^n = {x_0}^n + n{x_0}^{n-1}\sqrt{a}y_0 + \frac{n(n-1)}{2}{x_0}^{n-2}\left(\sqrt{a}\,y_0\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{a}\,y_0\right)^n.$$

Згрупуємо доданки наступним чином: у перших дужках - раціональні доданки, тобто ті, які стоять на непарних місцях, а у других дужках – ірраціональні, ті, що стоять на парних місцях рівності. Позначимо вираз, одержаний у перших дужках, через $x_n$, а у других дужках через $y_n\sqrt{a}$, тоді рівність набуває вигляду: $\left(x_0+\sqrt{a}y_0\right)^n = x_n+\sqrt{a}y_0$. Здійснюємо аналогічні перетворення для другого множника рівності (2.1), $x_0 - \sqrt{a}y_0$ та результати подамо у вигляді системи двох рівнянь:

{.                                                  (2.2)

Перемножимо ліві та праві частини рівнянь системи та одержимо рівність: $\left(x_0^{\ 2} - ay_0^{\ 2}\right)^n = x_n^{\ 2} - ay_n^{\ 2}$. Ураховуючи, що пара ($x_0$;$y_0$) є розв'язком рівняння, одержуємо рівність $x_n^2$-$ay_n^2$=1, отже, пара ($x_n$;$y_n$) також є розв'язком рівняння. Надаючи змінній *n* різних значень, можна одержувати нові розв'язки рівняння. Так як число $n$ може набувати довільного натурального значення, то й *розв'язків рівняння Пелля існує безліч*.

### 2.2.2. Формули знаходження нетривіальних розв'язків рівняння Пелля та метод нескінченного спуску

Розглянемо питання знаходження нетривіальних розв'язків рівняння $x^2$-$ay^2$=1. Для цього виразимо із системи (2.2) змінні $x_n$ та $y_n$, почленно додавши та віднявши її рівняння:

{,.                                   (2.3)

За допомогою одержаних формул можна знайти нескінченну кількість розв'язків, знаючи перший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля.

Знаходити розв'язки рівняння Пелля можна також за допомогою рекурентних формул, в яких ($x_0$;$y_0$)-найменший нетривіальний розв'язок, ($x_{n-1}$;$y_{n-1}$) – деякий нетривіальний розв'язок рівняння:

{$x_n = x_0x_{n-1} + ay_0y_{n-1}$ $y_n = x_0y_{n-1} + x_{n-1}y_0$.

(2.6)

Переконатися у тому, що пара чисел ($x_n$;$y_n$) є розв'язком рівняння Пелля можна перемноживши очевидні рівності $x_0^2 - ay_0^2 = 1$ та $x_{n-1}^2 - ay_{n-1}^2 = 1$. Одержуємо рівність$(x_0^2 - ay_0^2)(x_{n-1}^2 - ay_{n-1}^2) = 1$, та виконаємо ланцюжок наступних перетворень:

$x_0^2x_{n-1}^2 - ax_0^2y_{n-1}^2 - ay_0^2x_{n-1}^2 + a^2y_0^2y_{n-1}^2 = 1$;

$$x_0^2x_{n-1}^2 - ax_0^2y_{n-1}^2 - ay_0^2x_{n-1}^2 + a^2y_0^2y_{n-1}^2 + 2ax_0x_{n-1}y_0\,y_{n-1} - 2ax_0x_{n-1}y_0\,y_{n-1} = 1;$$
$$(x_0x_{n-1} + ay_0y_{n-1})^2 - a(x_0\,y_{n-1} + x_{n-1}y_0)^2 = 1.$$

Урахувавши формули (2.4) одержуємо, рівність $x_n^2 - ay_n^2 = 1$, яка підтверджує, що пара *($x_n$;$y_n$)* є розв'язком рівняння Пелля.

Рекурентні співвідношення між коренями рівняння можна знаходити за допомогою аналізу закономірностей між коренями рівняння, але це доцільно застосовувати при досить малих значеннях коефіцієнта $a$. Проілюструємо зазначене на прикладі розв'язання рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$, скориставшись при цьому міркуваннями джерел [3, 4].

Підбором можна знайти деякі розв'язки рівняння *(2;1), (7;4), (26;15), (97;56)* тощо. Розглянемо низку рівностей:

*7=2□2+3□1 та 4=2+2□1;*

*26=2□7+3□4 та 15=7+2□4;*

*97=2·26 +3·15 та 56=26+2·15.*

Виникає гіпотеза, що наступні розв'язки рівняння можна одержати за допомогою перетворень: *(x;y)→(2x+3y; x+2y).* Доведемо, що розв'язки рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$ завжди можна одержати за допомогою зазначеного перетворення. Для цього підставимо пару *(2x+3y; x+2y)* у рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$ та виконаємо наступний ланцюжок перетворень:

$$(2x+3y)^2 - 3(x+2y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 3(x^2 - 4xy + 4y^2) = x^2 - 3y^2 = 1.$$

Отже, розв'язки рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$ знаходяться серед пар виду *(2x+3y; x+2y).*

Доведемо, що інших розв'язків у цілих невід'ємних числах, ніж одержана пара *(2x+3y; x+2y),* рівняння $x^2 - 3y^2 = 1$ не має. Для доведення використаємо *метод нескінченного спуску*.

Насамперед, позначимо через *Х=2х-3у, У=х+2у,* тоді х*=2Х-3У, у=2У-Х* та доведемо наступне допоміжне твердження:

*ЛЕМА: Якщо Х,У – натуральні числа, що задовольняють рівність* $X^2-3У^2=1$, *то вирази 2Х-3У та 2У-Х набувають невід'ємних значень, причому 2У-Х<У.*

Для доведення кожної нерівності застосуємо метод від супротивного.

1) Припустимо, що *2Х-3У<0,* $X<\frac{3У}{2}$, тоді оцінимо вираз $X^2-3У^2<\frac{9У^2}{4}-3У^2=-\frac{3У^2}{4}<1$, що суперечить рівності $X^2-3Y^2=1$, отже, *2Х-3У≥0.*

2) Припустимо, що *2У-Х<0, Х>2У*, тоді оцінимо вираз $X^2-3Y^2>4Y^2-3Y^2=Y^2\geq 1$

маємо $X^2-3Y^2>1$, що також суперечить рівності $X^2-3Y^2=1$, отже, *2У-Х*$\geq 0$.

3) Припустимо, що *2У-Х≥ У*, тоді *Х≤У,* $X^2-3У^2\leq У^2-3У^2=-2У^2\leq -2$, що також суперечить рівності $X^2-3Y^2=1$, отже, *2У-Х<У.*

Доведена лема є основою для доведення єдиності рекурентного співвідношення між розв'язками рівняння $x^2-3y^2=1$, тобто інших розв'язків у цілих невід'ємних числах, ніж пари чисел виду *(2х+3у; х+2у),* зазначене рівняння не має.

Розглянемо довільну пару *(Х;У),* що є натуральними розв'язками рівняння $x^2-3y^2=1$. Для неї існує попередня пара розв'язків (х;у), у якої є також попередня пара розв'язків і т.д. Нескінченно цей процес не можна продовжувати, так як за лемою *у<У*, та не існує нескінченно спадної послідовності натуральних чисел. На деякому етапі пара *(х;у)* буде складатися не лише з натуральних чисел, одне з них буде дорівнювати нулю. З рівності $x^2-3y^2=1$ випливає, що $x\neq 0$, тоді у=0. Таким чином одержуємо тривіальний розв'язок (1;0). Здійснимо процес у зворотному порядку, тобто від пари (1;0) до пари *(Х;У),* який відбувається за правилом *(х;у)→(2х+3у; х+2у).* Таким чином інших розв'язків, окрім $(2x+3y;x+2y)$ рівняння $x^2-3y^2=1$ не має. Аналогічним чином можна довести єдиність рекурентних формул для знаходження нетривіальних розв'язків рівняння Пелля для інших значень коефіцієнта $a$.

За допомогою формул (2.3) та (2.4) можна знаходити нескінченну кількість розв'язків рівняння Пелля. Найбільшою складністю при цьому становить етап знаходження найменшого нетривіального розв'язку. Тому зупинимося більш детально на його знаходженні.

### 2.2.3.Індійський (циклічний) метод

Ще у стародавній Індії була відома рівність $1151^2–92\cdot120^2=1$, а отже, й нетривіальний розв'язок (1151;120) рівняння $x^2-92y^2=1$. Індійський математик Брахмагупта у другому сторіччі запропонував досить громіздке виведення цієї рівності, а загальний метод розв'язування рівняння $x^2-ay^2=1$ було запропоновано його співвітчизником Бхаскарія Акхарія [2, 5]. Цей метод зараз відомий як *індійський* або *циклічний метод розв'язування рівняння Пелля.* Зупинимося на ньому більш детально.

Насамперед, розглянемо допоміжний вираз $(a^2–kb^2)(c^2–kd^2)$, та перетворимо його наступним чином:

$(a^2–kb^2)(c^2–kd^2)=a^2c^2–kb^2c^2–kd^2a^2+k^2b^2d^2+2kabcd–2kabcd=(ac+kbd)^2–k(bc+ad)^2.$

$(a^2–kb^2)(c^2–kd^2)=(ac+kbd)^2–k(bc+ad)^2$..............................................................(2.5)

Розглянемо ідею застосування цього методу та сформулюємо *основні етапи його реалізації для розв'язування* рівняння Пелля $x^2–ky^2=1$. (Зауважимо, що коефіцієнт при $y$ змінили на $k$ для зручності подальших викладок).

1) Підібрати $x=a$ та $y=b$ такі, щоб значення виразу $a^2–kb^2$ максимально наближалося до одиниці. Позначити $a^2–kb^2=n$.
2) Розглянути рівності $a^2–kb^2=n$ та $r^2–k\square1^2=s$ та застосувати до них (2.5):
   $(a\cdot r+kb\square1)^2–k(b\ r+a\square1)^2=ns$ (2.6)
3) Підібрати значення $r$ таким, щоб вираз $(br+a)$ був кратним $n$ та значення виразу $(ar+kb)^2–k(br+a)^2$ набувало найменшого значення за модулем.

4) Скоротити обидві частині рівності (2.6) на найбільший спільний дільник чисел лівої та правої частин.

5) Циклічно продовжити зазначений алгоритм (пункти 1-4) для спрощеної рівності, до тих пір, поки у правій частині рівності не одержимо одиницю.

Проілюструємо зазначений алгоритм на прикладах. Спочатку розглянемо рівняння, у якому розв’язок знаходиться на першому етапі циклу.

*Приклад 5.* Знайти найменший нетривіальний розв'язок рівняння $x^2-11y^2=1$.[1]

У якості першого наближення візьмемо рівність $3^2-11\cdot1^2=-2$ та застосуємо до неї та рівності $r^2-11\cdot1^2=S$ вираз *(2.5).*

$(3^2-11\cdot1^2)(r^2-11\cdot1^2)=-2S,$ $(3r+11\cdot1)^2-11(r+3)^2=-2S.$

Обираємо таке значення $r$, щоб вираз $(r+3)$ був кратним коефіцієнту, що стоїть у правій частині рівності та значення $-2S$ було якомога меншим за модулем:

якщо $r=1$, то $-2S=14^2-11\cdot4^2=20 \rightarrow 7^2-11\cdot2^2=5\neq1;$

якщо r=3, то $-2S=20^2-11\cdot6^2=4 \rightarrow 10^2-11\cdot3^2=1.$

Остання рівність дає перший нетривіальний розв'язок (10;3) заданого рівняння. Тепер розглянемо більш складніше рівняння.

*Приклад 6 (I спосіб).* Знайти перший нетривіальний розв'язок рівняння $x^2-67y^2=1$.[5]

Перший етап: За перше наближення візьмемо рівність $8^2-67\cdot1^2=-3$ та застосуємо (2.6):

$(8^2-67\square1^2)(r^2-67\square1^2)=(8r+67\square1)^2-67(1\square r+8)^2,$

$(8r+67)^2-67(r+8)^2=-3S.$

Підбираємо значення $r$, таке що значення $(r+8)$ було кратним 3 та права частина рівності набувала найменшого значення за модулем:

| $r$ | $-3S$ | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -2 | 189 | $51^2-67\cdot36=189$ | |
| 1 | 198 | $75^2-67\cdot81=198$ | |
| 4 | 153 | $99^2-67\cdot12^2=153$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 54-min | $123^2–67·15^2=54$ | $41^2–67·5^2=6≠1$ |

Другий етап:

*$(41^2–67\square5^2)(r^2–67\square1^2)=6S$;      $(41r+67\square5)^2–67(5r+41)^2=6S$.*

*$(5r+41)$* ⇢ min, кратний 6.

| *r* | *6S* | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -1 | 396 | $294^2–67·36^2=396$ | |
| 5 | -252-min | $540^2–67·66^2=-5$ | $90^2–67·11^2=-7≠1$ |
| 11 | 324 | $786^2-67·96^2=324$ | |

Третій етап:

*$(90^2-67·11^2)(r^2–67·1^2)=-7S$;      $(90r+67·11)^2–67(11r+90)^2=-7S$.*

*$(11r+90)$* ⇢ min, кратний 7.

| *r* | *-7S* | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -12 | -539 | $343^2–67·42^2=-539$ | |
| -5 | 294 | $287^2–67·35^2=294$ | |
| 2 | 441 | $917^2–67·112^2=441$ | |
| 9 | -98-min | $1547^2–67·189^2=-98$ | $221^2–67·27^2=14≠1$ |

Четвертий етап:

*$(221^2–67·27^2)(r^2–67·1^2)=-2S$,      $(221r+67·27)^2–67(27r+221)^2=-2S$.*

*$(27r+221)$* ⇢ min, кратний *2*.

| *r* | *-2S* | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| 3 | 116 | $2472^2–67·302^2=116$ | |
| 5 | 84 | $2914^2–67·356^2=84$ | |
| 7 | 36 | $3356^2-67·410^2=36$ | |
| 9 | -28-min | $3798^2-67·464^2=-28$ | $1899^2–67·232^2=-7≠1$ |

П’ятий етап:

*$(1899^2–67·232^2)(r^2–61·1^2)=-7S$;   $(1899r+67·232)^2–67(232r+1899)^2=-7S$.*

*$(232r+1899)$* ⇢ min, кратний 7.

| *r* | *-7S* | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -2 | 441 | $11746^2–67·1435^2=441$ | |
| 5 | 294-min | $25039^2–67·3059^2=294$ | $3577^2–67·437^2=6≠1$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | -539 | $38332^2–67\cdot4683^2=-539$ | |

Шостий етап:

$(3577^2–67\cdot437^2)(r^2–67\cdot1^2)=6S$, $(3577r+67\cdot437)^2– 67(437r+3577)^2=6S$.

$(437r+3577)$ ⇢ min, кратний 6.

| $r$ | $6S$ | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -5 | -252 | $11394^2–67\cdot1392^2=-252$ | |
| 1 | 396 | $32856^2–67\cdot4014^2=396$ | |
| 7 | -108-min | $54318^2–67\cdot6636^2=108$ | $9053^2–67\cdot1106^2=3\neq1$ |
| 13 | 612 | $75780^2–67\cdot9258^2=612$ | |

Сьомий етап:

$(9053^2-67\cdot1106^2)(r^2-67\cdot1^2)=3S$, $(9053r+67\cdot1106)^2–67(1106r+9053)^2=3S$.

$(1106r + 9053)$ ⇢ min, кратний 3.

| r | 3S | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|
| -1 | 198 | $65049^2–67\cdot7947^2=198$ | |
| 2 | 189 | $92208^2–67\cdot11265^2=189$ | |
| 5 | 126 | $119367^2–67\cdot14583^2=126$ | |
| 8 | 9-min | $146526^2–67\cdot17901^2=9$ | $48842^2–67\cdot5967^2=1$ |

Одержана у правій частині спрощеної рівності одиниця означає, що пара чисел (48842; 5967) є найменшим нетривіальним розв’язком рівняння $x^2–67y^2=1$.

### 2.2.4. Англійський метод

Англійський метод також застосовується для знаходження найменшого нетривіального розв’язку рівняння $x^2–ky^2=1$. Його алгоритм аналогічний індійському, але за однією відмінністю: значення $r$ підбирається як максимальне з можливих, що задовільняє нерівність $r^2\leq k$ [5].

Розглянемо застосування методу на прикладі

*Приклад 6 (ІІ спосіб).* Знайти найменший додатній нетривіальний розв'язок рівняння $x^2–67y^2=1$.

1) Підбираємо x=8 та y=1. Тоді розглянемо рівність $8^2-67\cdot1^2=-3$, значення правої частини наближується до 1.
2) До рівностей $8^2–k\square1^2=n$ та $r^2–k\square1^2=s$ застосовуємо (2.5): $(8r+67)^2- 67(r+8)^2=-3S$.
3) Підбираємо значення $r$ таким, що вираз $(r+8)$ кратний 3, $r^2\leq67$, $r$– максимальне з можливих. Одержуємо значення $r$=7, ($7^2\leq67$).та відповідну рівність $123^2-67\cdot15^2=54$.
4) Скорочуємо обидві частини рівності на найбільший спільний дільник лівої та правої частин та одержуємо спрощену рівність $41^2-67\cdot5^2=6\neq1$, для якої повторюємо зазначені кроки 1-4.

Подальші етапи реалізації англійського методу запишимо у вигляді таблиці:

| Етап | $r$, $r^2<67$ | $S$ | Рівність | Спрощена рівність |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | -18 | $123^2-67\cdot15^2=54$ | $41^2-67\cdot5^2=6$ |
| 2 | 5 | -42 | $540^2-67\cdot66^2=-252$ | $90^2- 67\cdot11^2=-7$ |
| 3 | 2 | -63 | $917^2-67\cdot112^2=441$ | $131^2-67\cdot16^2=9$ |
| 4 | 7 | -18 | $1989^2-67\cdot243^2-162$ | $221^2-67\cdot27^2=-2$ |
| 5 | 7 | -18 | $3356^2-67\cdot410^2=36$ | $1678^2- 67\cdot205^2=9$ |
| 6 | 2 | -63 | $17091^2-67\cdot2088^2=-567$ | $1899^2-67\cdot232^2=-7$ |
| 7 | 5 | -42 | $25039^2-67\cdot3059^2=294$ | $3577^2–67437^2=6$ |
| 8 | 7 | -18 | $54318^2-67\cdot6636^2=-108$ | $9053^2–67\cdot1106^2=-3$ |
| 9 | 8 | -3 | $146526^2-67\cdot17901^2=9$ | $48842^2-67\cdot5967^2=1$ |

Одержана у правій частині спрощеної рівності одиниця означає, що пара чисел (48842;5967) є найменшим додатнім нетривіальним розв’язком рівняння $x^2–67y^2=1$ і цей результат аналогічний тому, що одержали при застосуванні індійського методу.

Зауважимо, що індійський та англійський методи мають схожі алгоритми. Відмінність полягає лише у обмеженнях величини, що стоїть у других дужках рівності (2.6). А саме, в індійському методі значення цього виразу повинно набувати найменшого за модулем значення, а в англійському методі значення змінної  повинно набувати максимального значення із усіх можливих та задовольняти нерівність $c^2<k$. Крім того, обидва методи визначають алгоритми знаходження першого нетривіального розв'язку рівняння Пелля, хоча й призводять до громіздких обчислень та перебору великої кількості варіантів. Серед недоліків методів також слід зазначити, що алгоритми обох методів не дають відповіді на питання, чи цей процес є скінченним та чи обов'язково ми таким чином знайдемо розв'язки рівняння.

### 2.2.5. Метод на основі теорії ланцюгових дробів

Заданий метод ґрунтується на наступних поняттях та теоремах, які розглянемо без доведення.

*Означення*: *Ланцюговий дріб* – це математичний вираз виду $[a_0; a_{1,} a_{2,} a_{3,\dots}] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_{3+\dots}}}}$, де $a_0$ є цілим числом, а інші $a_n$ є натуральними числами.

*Означення:* Дроби вигляду $\frac{a_0}{1}; a_0 + \frac{1}{a_1};\quad a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}};..$ називаються *підхідними дробами ланцюгового дробу* $[a_0; a_{1,} a_{2,} a_{3,\dots}]$.

*Теорема 1*: Якщо$(x_0;y_0)$ – додатні розв'язки рівняння Пелля $x^2-ay^2=1$, то дріб $\frac{x_0}{y_0}$ є підхідним дробом $\sqrt{a}$.[1]

*Теорема 3*: Нехай $n$ – довжина періоду послідовності елементів ланцюгового дробу числа $\sqrt{a}$. Тоді чисельник і знаменник підхідного дробу до числа $\sqrt{a}$ є розв'язком рівняння Пелля тоді і тільки тоді, коли його номер має вигляд $kn$-$1$ (тобто при діленні на $n$ дає остачу $(n$-$1)$ ) та є непарним числом.

Нехай $S$ довжину періоду ланцюгового дробу, тоді:

Якщо $S$– парне число, то підхідний дріб має вигляд $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}}$ $=[a_0; a_1, a_{2,} a_3, \ldots, a_{S-1}\ ]$, та найменшим натуральним розв'язком рівняння Пелля є $x$=P$_{S-1}$, $y$=Q$_{S-1}$.

- Якщо $S$ – непарне число, то $x$=P$_{2S-1}$, $y$=Q$_{2S-1}$. [1]

Розкласти ірраціональне число у ланцюговий дріб можна за допомогою *формул Ейлера* – алгоритму виділення цілої частини:

$a=q_o+\frac{1}{\alpha_1}{}_1,\ q_o=[a],\ \alpha_1>1,$

$\alpha_1=q_1+\frac{1}{\alpha_2},\ де\ q_1=[\alpha_1],\ \alpha_2>1,$

$\alpha_2=q_2+\frac{1}{\alpha_3},\ де\ q_2=[\alpha_2],\ \alpha_3>1$ *і так далі.*

Проілюструємо вищезазначене при розв'язанні наступних рівнянь.

*Приклад 7 (І спосіб).* Знайти найменший додатній нетривіальний розв'язок рівняння $x^2–8y^2=1$. [1]

Подамо числа $\sqrt{8}$ у вигляді ланцюгового дробу:

$[\sqrt{8}\,]=2,\ \sqrt{8}=2+\frac{1}{\alpha_1},$

$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{8}-2}=\frac{\sqrt{8}+2}{4}=1+\frac{1}{\alpha_2};$

$\alpha_2=\frac{1}{\frac{\sqrt{8}+2}{4}-1}=\frac{4}{\sqrt{8}-2}=\sqrt{8}+2=4+\frac{1}{\alpha_3};$

$\alpha_3=\frac{1}{(\sqrt{8}+2)-4}=\frac{1}{\sqrt{8}-2}=\frac{\sqrt{8}+2}{4}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}=1+\frac{1}{\alpha_4}.$

Так як $\alpha_1=\alpha_3$, то цей процес можна зупинити. Тоді розклад числа $\sqrt{8}$ можна подати у вигляді ланцюгового дробу $\sqrt{8}$ = [2;(1,4)]. Довжина періоду елементів ланцюгового дробу *S=2* – парне число, значить найменший підхідний дріб має вигляд: $\frac{P_{S-1}}{Q_{S-1}}=\frac{P_1}{Q_1}=2+\frac{1}{1}=\frac{3}{1}$, отже, одержуємо й найменший натуральний розв'язок рівняння $x_o=3$, $y_o=1$. Для знаходження решти розв’язків застосовуємо формули (2.3):

$$x_n=\frac{1}{2}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^n+\left(3-\sqrt{8}\right)^n\right),$$

$$y_n=\frac{1}{2\sqrt{8}}\left(\left(3+\sqrt{8}\right)^n-\left(3-\sqrt{8}\right)^n\right).$$

Наприклад, при *n=2* одержуємо наступну пару розв’язків рівняння (17;6), а при *n=3* - (99;35) і таких розв’язків буде безліч.

Тепер розглянемо випадок, коли довжина періоду ланцюгового дробу є непарним числом.

*Приклад 8*. Знайдемо найменший натуральний розв'язок рівняння $x^2-13y^2=1$.

Розкладемо $\sqrt{13}$ у ланцюговий дріб за допомогою алгоритму Ейлера:

$$\lfloor\sqrt{13}\rfloor=3,\quad \left[\sqrt{13}\right]=3+\frac{1}{\alpha_1};$$

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{13}-3}=\frac{\sqrt{13}+3}{4}=1+\frac{1}{\alpha_2};$$

$$\alpha_2=\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{13}+3\right)-1}=\frac{4}{\sqrt{13}-1}=\frac{\sqrt{13}+1}{3}=1+\frac{1}{\alpha_3};$$

$$\alpha_3=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\sqrt{13}+1\right)-1}=\frac{3}{\sqrt{13}-2}=\frac{\sqrt{13}+2}{3}=1+\frac{1}{\alpha_4};$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{\frac{1}{3}\left(\sqrt{13}+2\ \right)-1} = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{\alpha_5};$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{\frac{1}{4}\left(\sqrt{13}+1\ \right)-1} = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{\alpha_6};$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{\sqrt{13}+3-6} = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \alpha_1.$$

Тоді $\sqrt{13}$ =[3;(1,1,1,1,6)]

Отже, періодом ланцюгового дробу є число $S$=5, яке є непарним числом, тоді $x_0 = P_{2S-1} = P_9$ , $y_0 = Q_{2S-1} = Q_9$. Ланцюговий дріб набуває вигляду:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cdots}}}}}}}}}}$$

При обчисленні значень дробу $\frac{P_9}{Q_9}$ одержуємо ланцюжок обчислень який подамо у вигляді розрахункової таблиці:

| Етап | Обчислення | Результат | Етап | Обчислення | Результат |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{1+1}$ | $\frac{1}{2}$ | 6 | $\frac{1}{\frac{33}{38}+1}$ | $\frac{38}{71}$ |
| 2 | $\frac{1}{1+\frac{1}{2}}$ | $\frac{2}{3}$ | 7 | $\frac{1}{1+\frac{38}{71}}$ | $\frac{71}{109}$ |
| 3 | $\frac{1}{1+\frac{2}{3}}$ | $\frac{3}{5}$ | 8 | $\frac{1}{1+\frac{71}{109}}$ | $\frac{109}{180}$ |
| 4 | $\frac{1}{6+\frac{3}{5}}$ | $\frac{5}{33}$ | 9 | $3+\frac{109}{180}$ | $\frac{649}{180}$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | $\frac{1}{1+\frac{5}{33}}$ | $\frac{33}{38}$ | | | |

Таким чином найменший нетривіальним розв'язок рівняння $x^2$-$13y^2=1$ є пара чисел (649;180).

### 2.2.6. Метод Вайлдбергера

Даний метод запропонував у 2008 році австралійський математик Н. Вайлдбергер. Метод ґрунтується на понятті квадратичної форми та визначає алгоритм знаходження натуральних розв’язків рівняння Пелля, відмінних від пари (1;0) та розкладає $\sqrt{a}$, де *a*-коефіцієнт рівняння $x^2 - ay^2 = 1$ у ланцюговий дріб. Насамперед, розглянемо наступні теоретичні відомості [7]:

*Означення:* Вираз $ax^2 + bxy + cy^2$, де *a,b,c* – цілі числа , *x, y* – змінні, називається *квадратичною формою*. Дискримінантом квадратичної форми є вираз виду $b^2 - 4ac$.

*Означення:* Операція *L* перетворює пару чисел *(x;y)* у пару *(x+y;y)*. *О*перація *R* перетворює пару чисел *(x;y)* у пару *(x;x+y)*.

*L:(x;y)→ (x+y;y),* (2.7)

*R: (x;y)→ (x;x+y).*

*Теорема:* Якщо в квадратичній формі $ax^2 + bxy + cy^2$, $a + b + c < 0$ , то для її перетворення застосовується операція *L*. Якщо $a + b + c > 0$, то – операція *R*.

Проілюструємо цей метод під час розв’язування рівнянь, що вже розв’язувалися іншими методами.

Зауважимо, що скоріш за все, назва операцій пов’язані із першими літерами англійських слів *left* та *right* та відповідним напрямком. Наприклад, якщо значення виразу *a+b+c>0,* а додатні числа розташовані праворуч від 0 на координатній прямій, то виконуємо операцію *R⇢ right,* тобто змінюємо змінну, що стоїть у парі *(x;y)* праворуч на $x+y$. Аналогічно і для операції $L$.

*Приклад 7 ( II спосіб).* Розв'язати рівняння $x^2-8y^2=1$

Розглянемо вираз лівої частини рівняння $x^2-8y^2$, який є квадратичною формою, причому $a=1,\ b=0,\ c=-8$. Тоді $a+b+c=1+0-8<0$, тому застосуємо операцію *L:(x;y)→(x+y;y).* Подальші міркування подамо у вигляді таблиці:

| Операція | Перетворення квадратичної форми $x^2-8y^2$ | Результат перетворення | Знак виразу $a+b+c$ | Наступна операція |
|---|---|---|---|---|
| L | $(x+y)^2-8y^2$ | $x^2+2xy-7y^2$ | 1+2-7<0 | L |
| L | $(x+2y)^2-8y^2$ | $x^2+4xy-4y^2$ | 1+4-4>0 | R |
| R | $(3x+2y)^2-8(x+y)^2$ | $x^2-4xy-4y^2$ | 1-4-4<0 | L |
| L | $(3x+5y)^2-8(x+2y)^2$ | $x^2-2xy-7y^2$ | 1-2-7<0 | L |
| L | $(3x+8y)^2-8(x+3y)^2$ | $x^2-8y^2$ | | |

У результаті останнього перетворення ми одержали початкову квадратичну форму, при цьому ланцюжок перетворень має вигляд *(x;y)→…→(3x+8y;x+3y)→(x;y).* Тоді формули $X=3x+8y$, $У=x+3y$ є рекурентними формулами для знаходження розв'язків рівняння $x^2-8y^2=1$. За допомогою цих формул знаходимо нетривіальні розв'язки заданого рівняння Пелля (3;1), (17;6), (99;35) і т.д. Крім того, одержаний результат дає змогу розкласти $\sqrt{8}$ у ланцюговий дріб. Для цього запишемо декілька разів послідовно операції над квадратичною формою $x^2-8y^2$:LLRLL LLRLL LLRLL… Запишемо послідовно натуральні числа, які відповідають кількості літер L та R. Така послідовність має вигляд: 2, 1, 4, 1, 4, 1, 4… . Запишемо послідовність у вигляді [2;(1,4)], а це і є розкладом числа $\sqrt{8}$ у ланцюговий дріб.[7]

*Приклад 6 (ІІІ спосіб).* Розв'язати рівняння $x^2 – 67y^2 = 1$.

Як і у попередньому прикладі розглянемо квадратичну форму $x^2 – 67y^2$, в якій $a=1$, $b=0$, $c=-67$, $a+b+c=1+0-6 <0$, отже, першою для перетворення є операція L. Складемо розрахункову таблицю:

| Операціяція | Перетворення квадратичної форми | Результат перетворення | Знак виразу $a+b+c$ | Наступна операція |
|---|---|---|---|---|
| L | $(x+y)^2-67y^2$ | $x^2+2xy-66y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+2y)^2-67y^2$ | $x^2+4xy-63y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+3y)^2-67y^2$ | $x^2+6xy-58y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+4y)^2-67y^2$ | $x^2+8xy-51y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+5y)^2-67y^2$ | $x^2+10xy-42y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+6y)^2-67y^2$ | $x^2+12xy-31y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+7y)^2-67y^2$ | $x^2+14xy-18y^2$ | <0 | L |
| L | $(x+8y)^2-67y^2$ | $x^2+16xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(9x+8y)^2-67(x+y)^2$ | $14x^2+10xy-3y$ | >0 | R |
| R | $(17x+8y)^2-67(2x+y)^2$ | $21x^2+4xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(25x+8y)^2-67(3x+y)^2$ | $17x^2-8xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(41x+8y)^2-67(5x+y)^2$ | $6x^2+14xy-3y^2$ | <0 | L |
| L | $(41x+49y)^2-67(5x+6y)^2$ | $6x^2-2xy-11y^2$ | <0 | L |
| L | $(41x+90y)^2-67(5x+11y)^2$ | $6x^2+10xy-7y^2$ | >0 | R |
| R | $(131x+90y)^2-67(16x+11y)^2$ | $9x^2-4xy-7y^2$ | <0 | L |
| L | $(131x+221y)^2-67(16x+27y)^2$ | $9x^2-14xy-22y^2$ | >0 | R |
| R | $(352x+221y)^2-67(43x+27y)^2$ | $21x^2-10xy-22y^2$ | >0 | R |
| R | $(573x+221y)^2-67(70x+27y)^2$ | $29x^2+6xy-2y^2$ | >0 | R |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| R | $(794x+221y)^2-67(97x+27y)^2$ | $33x^2-2xy-2y^2$ | >0 | R |
| R | $(1015x+221y)^2-67(124x-27y)^2$ | $27x^2-2xy-2y^2$ | >0 | R |
| R | $(1236x+221y)^2-67(51x+27y)^2$ | $29x^2-6xy-2y^2$ | >0 | R |
| R | $(1457x+221y)^2-67(178x+27y)^2$ | $21x^2-10xy-2y^2$ | <0 | L |
| L | $(1678x+1899y)^2-67(205x+232y)^2$ | $9x^2+4xy-7y^2$ | >0 | R |
| R | $(3577x+1899y)^2-67(437x+232y)^2$ | $6x^2-10xy-7y^2$ | <0 | L |
| L | $(3577x+5476y)^2-67(437x+669y)^2$ | $6x^2+2xy-11y^2$ | <0 | L |
| L | $(3577x+9053y)^2-67(437x+1106y)^2$ | $6x^2+14xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(12630x+9053y)^2-67(1543x+1106y)^2$ | $17y^2+8xy+7x^2$ | >0 | R |
| R | $(12630x+21683y)^2-67(1543x+2649y)^2$ | $17x^2+8xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(3073x+9053y)^2-67(3755x+1106y)^2$ | $21x^2-4xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(39789x+9053y)^2-67(4861x+1106y)^2$ | $14x^2-10xy-3y^2$ | >0 | R |
| R | $(48842x+9053y)^2-67(5967x+1106y)^2$ | $x^2-16xy-3y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+57895y)^2-67(5967x+70737y)^2$ | $x^2-14xy-18y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+106737y)^2-67(5967x+13040y)^2$ | $x^2-12xy-31y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+155579y)^2-67(5967x+19007y)^2$ | $x^2-10xy+42y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+204421y)^2-67(5967x+24974y)^2$ | $x^2-8xy-51y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+253263y)^2-67(5967x+30941y)^2$ | $x^2-6xy-58y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+302105y)^2-67(5967x+36908y)^2$ | $x^2-4xy-63y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+350947y)^2-67(5967x+42875y)^2$ | $x^2-2xy-66y^2$ | <0 | L |
| L | $(48842x+399789y)^2-67(5967x+48842y)^2$ | $x^2-67y^2$ | | |

З останнього рядка таблиці визначаємо формули для знаходження коренів рівняння $x^2–67y^2=1$: $X=48842x+399789y$, $У=5967x+48842y$. Першим нетривіальним розв'язком рівняння є пара чисел (48842; 5967), а наступною парою є (4771081927; 582880428) і т.д. Як бачимо при розв’язанні рівняння $x^2–67y^2=1$ одержали однаковий перший нетривіальних розв'язок як при застосуванні англійського й індійського методів, так і методу Вайлдбергера. Кожен з цих методів складався з великої кількості обчислень, крім того, застосування англійського та індійського методів передбачало підбір чисел, кількість яких була неоднозначно визначена. Застосування метода Вайлдбергера передбачає використання строго визначеного алгоритму, без підбору чисел, лише з виконанням двох перетворень $L$ та $R$ над квадратичними формами, тому кількість відповідних рівностей визначається однозначно. Цей метод дає змогу не тільки знаходити перший нетривіальний розв'язок, а й записати рекурентні формули ( без застосування рівностей (2.3) та (2.4)) для знаходження інших розв’язків рівняння, а також розв’язати додаткову задачу: подання ірраціонального виразу $\sqrt{a}$ у вигляді ланцюгового дробу.

## Висновки

Метод розв’язування діофантового рівняння виду $x^2$- $ay^2=c$ залежить від значень параметрів $a$ та $c$.

Якщо $a$ є квадратом рівняння $x^2$-$ay^2$=$c$, то рівняння розв'язується за допомогою методу розкладання на множники.

Якщо $a<0$ та $c>0$ доцільно застосувати метод локалізації коренів.

Ефективним методом доведення відсутності розв'язків діофантового рівняння або знаходження розв'язків у простих числах є застосування елементів теорії подільності.

При розв'язуванні рівняння $x^2–ay^2=1$, достатньо знайти пару $(x_o;y_o)$, а решта розв'язків знаходиться серед пар чисел $(-x_o;y_o)$, $(-x_o;-y_o)$, $(x_o; -y_o)$.

Рівняння $x^2$-$ay^2$=1, де $a$ – не є квадратом числа, називається рівнянням Пелля. Пара чисел (1;0) є тривіальним розв'язком рівняння Пелля.

Рівняння Пелля має нескінченну кількість розв'язків, довести цей факт можна за допомогою бінома Ньютона та методу нескінченного спуску.

Найбільшу складність при розв'язуванні рівнянні Пелля становить знаходження найменшого натурального розв'язку, відмінного від тривіального.

Знайти найменший нетривіальний розв'язок рівняння Пелля можна наступними методами:

- ✔ Індійським ( циклічним) методом;
- ✔ Англійським методом;
- ✔ За допомогою ланцюгових дробів;
- ✔ Методом Вайлдбергера ( на основі квадратичних форм).

Подати вираз $\sqrt{a}$ у вигляді ланцюгового дробу можна за допомогою: методу Ейлера( алгоритму виділення цілої частини) або методу Вайлдбергера ( застосування квадратичних форм).

За допомогою методу Вайлдбергера можна одержати рекурентні формули для знаходження розв'язків рівняння.

## Використанні джерела

1. Гринько Е.П. Головач А.Г. Методи решения диофантових уравнений при подготовке школьников к олимпиаде: Брест,БрГУ, 2013. С. 96-107. URL: https://cutt.ly/lFBPkSx
2. Ван дер Варден. Уравнение Пелля в математике греков и индийцев. сб.: УМН.- 1976. - В. 5 (191). - Т. 31.-С. 57-70. URL: https://cutt.ly/tFBP3dc
3. Сендеро В., Співак А. Уравненик Пелля (Частина I). Квант.-2002.-№ 3. - С. 2-9. URL: https://cutt.ly/oFBDP5l
4. Співак А. Рівняння Пелля (частина II) : Квант.-2002.-№ 4.-С.5-11. URL:https://cutt.ly/oFBG7Ii
5. Співак А. Рівняння Пелля (частина III) : Квант-2002-№ 6.- С. 10-15. URL: https://cutt.ly/5FBC3Gh
6. Лейфура В.М. Діофантові рівняння. У світі математики: зб. наук .попул. ст., випуск 16. К.: Радянська школа, 1985, С. 57-67.
7. Спивак. А.В. Доказательство Вайлдбергера существования решения уравнения Пелля. URL: https://cutt.ly/UFBVrjP
8. Плахотник В. Про прості числа в рівняннях та послідовностях. У світі математики, том9, вип.3, 2003,вид. «ТВІМС»
9. Тадєєв В.О. Неформальна математика 6-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі.-Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2003.С.217-219.

## Додаток. Апробація роботи.

В якості апробації дана робота була представлена на засіданні математичного гуртка територіального відділення МАН України 18 січня 2022р. Тема доповіді «Методи розв’язання рівняння Пелля: метод

нескінченного спуску та Індійський метод (циклічний)». Доповідь відбулась онлайн на платформі ZOOM з використанням інтерактивної онлайн дошки miro.
(https://manmathmk.wordpress.com/%d0%bc%d0%b0%d1%82%d0%b5%d0%bc%d0%b0%d1%82%d0%b8%d1%87%d0%bd%d0%b8%d0%b9-%d0%b3%d1%83%d1%80%d1%82%d0%be%d0%ba/ )