ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА ІГРИ: ЗАДАЧА ПРО БАНКРУТСТВО

Юрченко-Титаренко Антон Юрійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

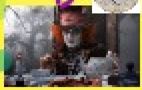
Уявімо ситуацію – Аліса, потрапивши у Країну чудес, побачила таку картину: перед будинком, під деревом, був виставлений стіл, за яким грали в якусь гру Березневий Заєць та Капелюшник. Між ними спав як убитий Сонько-Гризун, який бачив цікавий сон та від цього дригав своїми м'якими ніжками. Якщо Сонько ворушив лівою ніжкою, то Березневий Заєць віддавав Капелюшнику монетку; якщо правою – навпаки; одночасно двома ніжками Сонько ворушити не міг. Кількість монеток в обох друзів обмежена і дорівнює A у Зайця та B у Капелюшника (рис. 1).

Аліса з першого погляду зрозуміла: герої дуже азартні і гратимуть доти, доки у когось із них не залишиться грошей узагалі. Вважаємо, що ймовірність виграшу Зайця дорівнює p, а ймовірність його програшу (і, відповідно, виграшу Капелюшника) – $q = 1 - p$. Крім того, ми припускаємо, що Соньку наснився настільки цікавий сон, що на те, якою ніжкою він поворушить у наступну хвилину, не впливають його рухи в попередні моменти часу [1].

[1] Така ситуація дійсно могла б відбутися в оригінальному творі – «Аліса в країні чудес». Льюїс Керролл, його автор та до того ж професійний математик, зашифрував у романі цілу низку цікавих математичних концепцій, сатиру на своїх колег та математичну науку загалом. Тож ця казка насправді має подвійне (а то й потрійне!) дно та рекомендується до обов'язкового ознайомлення.

Рис. 1. Божевільне чаювання (ілюстрація Пітера Ньюелла)

A  

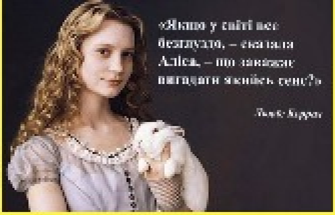
B  

$p + q = 1$

1Н
БЗ → К

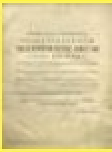
ПН
БЗ ← К

Аліса – дуже вихована дівчинка, тому вирішила почекати до закінчення гри, перш ніж звернутися до чудернацької трійки. «А чи закінчиться це взагалі?» – раптово подумала вона, спостерігаючи, як Заєць та Капелюшник по черзі віддають один одному невеликі срібні монетки. – «Та й цікаво, хто виграє…»

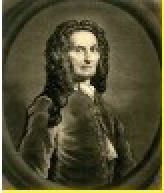


На щастя, відповіді на запитання Аліси є добре відомими; більше того, відомими ще здавна – задача такого вигляду є прикладом так званої класичної *задачі про банкрутство.* Немає сумніву в тому, що в історії теорії ймовірностей вона відіграла досить важливу роль: саме в цій задачі вперше почали вивчати зміни стохастичної системи в часі, тобто певною мірою вона стала першим кроком до створення теорії випадкових процесів.

Уперше задачу про банкрутство в дещо спрощеному вигляді було запропоновано ще у 1657 році Х. Гюйгенсом у книжці «Про розрахунки в азартній грі» (назва твору зайвий раз підкреслює, що корені теорії ймовірностей слід шукати в казино). Пізніше, вже в 1710–1713 роках задачу було сформульовано у вигляді, схожому на наведений вище, та знайдено перші підходи до її розв'язку. Так, у 1710 році ймовірності виграшу у такій грі у випадку $p = q$ знайшов П. Монмор, у 1711 році Н. Бернуллі узагальнив цей результат на випадок $p \neq q$, а в 1711 році А. де Муавр повторив резуль-



тати Монмора і Бернуллі та додатково обчислив середню кількість партій до завершення.



Тут треба зауважити, що ані Монмор, ані Бернуллі, ані де Муавр не мали апарату сьогоднішньої теорії ймовірностей, а тому їхні міркування були як на сучасні стандарти досить нестрогими. Проте зараз завдяки розвитку математики ми можемо навести чітко визначену модель такої гри.

Нехай ξ_n – виграш Зайця в n-й партії, тобто

$$\xi_n = \begin{cases} 1 & \text{з імовірністю } p, \\ -1 & \text{з імовірністю } q. \end{cases}$$

Згідно з нашими припущеннями, послідовність $\{\xi_n, n \geq 0\}$ – це послідовність *незалежних однаково розподілених випадкових величин*.

Щоб не обтяжувати читача, не знайомого з теорією міри, викладенням досить складних означень, будемо сприймати випадкову величину як деяке значення, яке ми не знаємо точно наперед, але можемо спрогнозувати з деякою ймовірністю[2]. Інтуїтивно незалежність випадкових величин означає, що на значення однієї випадкової величини не впливають значення

[2] У випадку, якщо читач бажає дізнатися більше, зокрема ознайомитися з формальним означенням випадкової величини, радимо звернутися до книжок [5], [7] або [8].

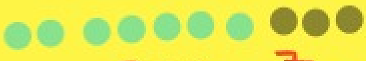
ξ_n

Випадкова величина (англ. *random variable*) — величина, можливими значеннями якої є результати випробувань чи спостережень явищ або процесів, що носять випадковий характер, наприклад, результати підкидання монети, кубика із числовими позначеннями на його гранях, значення довжини стрибків спортсмена у послідовних спробах тощо.

Задача. Учасники жеребкування беруть із ящика жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання взятого жетону не містить цифри 5.

Розв'язання. Серед жетонів, що містять цифру 5 наступні номери 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, ..., 59, 65, 75, 85, 95. Їх всього 19. А тих жетонів, що не містять цифри 5 – 81. Отже, за класичним означенням $P = \frac{81}{100} = 0{,}81$.

$0 \le P \le 1$



$P(A) = \frac{7}{10}$; $P(\bar{A}) = \frac{3}{10}$

p $\quad q = 1 - p$

$W(A) = \frac{m}{n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} W(A) = \frac{1}{2}$

Класичне означення ймовірності

Нехай в результаті експерименту E можна отримати n рівноможливих елементарних подій. Подія A відбувається, якщо відбувається m з цих елементарних подій (або говорять, m – кількість елементарних подій, що сприяють події A, $m \le n$). Тоді ймовірність події A:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (*)$$

Формула (*) називається *формулою класичної ймовірності*.

Приклад. Із урни, що містить 10 куль, серед яких 7 білих, навмання дістаємо одну кулю. Знайти ймовірність того, що вийнята біла куля?

Розв'язання: Ймовірність події $P(A) = \frac{7}{10}$.

інших. Такий погляд добре ілюструє суть незалежності, проте далі нам буде потрібна певна формалізація цього поняття, а тому наведемо таке означення.

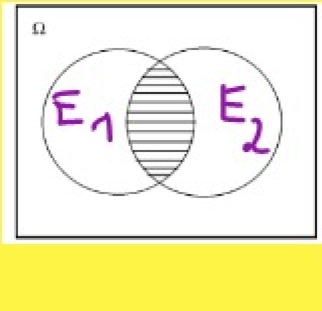
Означення 1. Умовною ймовірністю події E_2 за умови настання події E_1 (з $\mathsf{P}(E_1) > 0$) називається величина

$$\mathsf{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{\mathsf{P}(\text{настали події } E_1 \text{ і } E_2)}{\mathsf{P}(\text{настала подія } E_1)}.$$

$P_{E_1}(E_2) = P(E_2|E_1)$

Зауваження 1. Подію, що полягає в настанні одразу і E_1, і E_2, зазвичай позначають $E_1 \cap E_2$ або $E_1 E_2$. У таких позначеннях умовна ймовірність перепишеться як

$$\mathsf{P}(E_2 \mid E_1) = \frac{\mathsf{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathsf{P}(E_2)}.$$



Тут значок $\cap$ – ніщо інше, як теоретико-множинний *перетин*. Сенс такого позначення полягає в тому, що в теорії ймовірностей на події дивляться як на *множини* – із таким підходом можна ознайомитися, наприклад, у розділі I книжки В. Феллера [7]. Цей підхід не потребує від читача знань за межами шкільної програми. Надалі ми користуватимемося саме таким позначенням, а також будемо вживати нотацію $E_1 \cup E_2$ для події, що полягає в настанні E_1 або E_2 (можливо, обох одночасно).

Зауваження 2. Імовірність можна сприймати як «вагу», що ми приписуємо тій чи іншій події. Відповідно, умовна ймовірність $\mathsf{P}(E_2 \mid E_1)$ – ніщо інше, як доля «ваги» події $E_1 \cap E_2$ (тобто можливих перебігів подій, що призводять не тільки до E_1, але одночасно і до E_2) у загальній «вазі» події E_1.

Зауваження 3. У чому полягає зміст означення 1? $\mathsf{P}(E_2 \mid E_1)$ – це ймовірність настання події E_2, якщо відомо, що настала подія E_1.

Означимо поняття *незалежності* випадкових подій, яке грає важливу роль у теорії ймовірностей. Ясно, що події E_1 та E_2 природно вважати незалежними, якщо знання тієї обставини, що подія E_1 відбулася, не впливає на ймовірність настання події E_2.

Означення 2. Події E_1 та E_2 називаються *незалежними*, якщо

$$\mathsf{P}(E_2 \mid E_1) = \mathsf{P}(E_2).$$

Наступне означення фактично є прикладом застосування означення 2 до послідовності випадкових величин. На перший погляд для людини, незнайомої з теорією ймовірності, воно може здатися громіздким, але означає воно в точно те саме, що було сказано вище: випадкові величини з певного набору є незалежними, якщо значення одних величин із цього набору не впливає на значення інших.

Означення 3. Нехай задано послідовність випадкових величин $\{\xi_n, n \geq 0\}$, які, для простоти, можуть набувати лише цілих значень. Ці випадкові величини називаються *незалежними в сукупності*, або просто *незалежними*, якщо для будь-якого $m \geq 2$ та будь-якого набору цілих чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ виконується співвідношення

$$\mathsf{P}(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \ldots, \xi_m = x_m) =$$
$$= \mathsf{P}(\xi_1 = x_1)\mathsf{P}(\xi_2 = x_2)\cdots\mathsf{P}(\xi_m = x_m).$$

Перед тим, як перейти до розв'язку задачі, наведемо дуже просту теорему.

$P_{E_1}(E_2)$

♣ **Умовна ймовірність** $P(B/A)$ – ймовірність події B, обчислена в припущенні, що подія A вже відбулася.

♣ Подія B **незалежна** від події A з $P(A)\neq 0$, якщо ймовірність події B не залежить від того, відбулася подія A чи ні.

Теорема 1 (формула повної ймовірності). *Нехай задано події A, E_1, E_2, причому відомо, що події E_1 та E_2 несумісні (не можуть трапитися разом) та*

$$\mathsf{P}(\textit{відбудеться } E_1 \textit{ або } E_2) = 1.$$

Тоді

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A \mid E_1) \cdot \mathsf{P}(E_1) + \mathsf{P}(A \mid E_2) \cdot \mathsf{P}(E_2).$$

Повернемося до нашої чудернацької гри. Через S_n позначимо загальний виграш Зайця після n партій, тобто

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Також ясно, що до першої партії сумарний виграш Зайця становив 0 гривень, тобто покладемо $S_0 = 0$.

У такому формулюванні гра закінчується, якщо при деякому N виконується рівність $S_N = B$ (і тоді Заєць виграє) або $S_N = -A$ (у цьому випадку виграє Капелюшник). Така модель дуже добре ілюструється геометрично: кожному варіанту перебігу подій у грі можна поставити у відповідність траєкторію-ламану на папері в клітинку. Ламана починається в нулі; якщо $\xi_n = 1$ (з імовірністю p), то ламана на інтервалі $(n-1, n]$ іде вгору і вправо, якщо $\xi_n = -1$ (з імовірністю q) – то вниз і вліво (рис. 2). Міркувати в термінах таких геометричних траєкторій дуже зручно, адже вони дозволяють візуалізувати перебіг подій у нашій грі, причому за кожною траєкторією можна однозначно встановити, як саме проходила серія партій. Зауважимо також, що в нашому випадку закінченню гри відповідає досягнення траєкторією рівня B або $-A$.

Уявімо на хвилинку, що початковий розподіл капіталу $A + B$ між Березневим Зайцем та Капелюшником інший: на початку в Зайця $A + x$ замість A гривень, а у Капелюшника $B - x$ замість B гривень,

БЗ К

$A=4$; $B=3$

$S_0=0$

БЗ К

$S_0=0$

$S_1=-1$

$S_2=0$

$S_3=1$

$S_4=0$

$S_5=1$

$S_6=2$

$S_7=3$

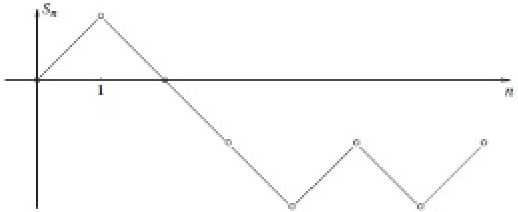


Рис. 2. *Ламана, що відповідає такому перебігу подій у перших семи партіях: спочатку виграв Заєць, потім три рази поспіль Капелюшник, потім переміг Заєць, потім Капелюшник, потім знов Заєць*

$x \in \{-A, -A+1, \ldots, B-1, B\}$ (за такого припущення у геометричній інтерпретації задачі траєкторії стартують не з нуля, а з точки x). На перший погляд це здається дивним, але для розв'язку задачі дуже зручно одночасно розглядати всі можливі варіанти початкового розподілу капіталу, а не лише той єдиний, який нам «потрібен». Саме тому надалі ми розглядаємо питання досягнення рівнів B та $-A$ всіма можливими траєкторіями, кожна з яких починається в одній із точок $\{-A, -A+1, \ldots, B-1, B\}$.

Уведемо деякі позначення. Через τ позначимо час першого потрапляння ламаної на один із рівнів B або $-A$ (якщо ламана ніколи не потрапляє на жоден із цих рівнів, то $\tau = \infty$). Подію, що полягає в досягненні ламаною саме рівня B, позначимо

$$W_1 = \{\tau < \infty, S_\tau = B\},$$

а рівня $-A$

$$W + 2 = \{\tau < \infty, S_\tau = -A\}.$$

Ясно, що $\{\tau < \infty\} = W_1 \cup W_2$. Далі, нехай $-A \leq x \leq B$. $\alpha(x) := \mathsf{P}(W_1 \mid S_0 = x)$ – імовірність того, що ламана, яка стартує з точки x, досягла рівня B, жодного разу не потрапивши при цьому на рівень $-A$, $\beta(x) := \mathsf{P}(W_2 \mid S_0 = x)$ – імовірність

не потрапляє

$\tau = \infty$

$B \neq S_\tau$

$-A \neq S_\tau$

$\tau \to B$

$\tau \to -A$

час

$\tau < \infty$

$W_1 = \{S_\tau = B; \tau < \infty\}$

$W_2 = \{S_\tau = -A; \tau < \infty\}$

$\Rightarrow \{\tau < \infty\} = W_1 + W_2$

(53)

того, що ламана, яка стартує з точки x, досягла рівня $-A$, не потрапивши при цьому на рівень B. K

Розглянемо деякі властивості функцій α та β. Якщо ламана стартує з точки B, то вона *вже потрапила* на рівень B, а тому

$$\alpha(B) = 1, \beta(B) = 0. \tag{1}$$

Аналогічно,

$$\alpha(-A) = 0, \beta(-A) = 1. \tag{2}$$

Тепер нехай ламана стартує з точки $x \in \{-A+1, -A+2, \ldots, B-2, B-1\}$. У момент часу 1 вона опиниться в точці $x+1$ з імовірністю p та в точці $x-1$ з імовірністю q. Помітимо дуже важливу особливість: якщо відомо, що ламана, що стартує з x, у момент часу 1 опинилася в точці $x+1$, то ймовірність того, що вона досягне рівня B, не потрапивши жодного разу на рівень $-A$, дорівнює $\alpha(x+1)$. Дійсно, ми можемо вважати початковим саме момент часу 1, *ігноруючи попередню поведінку ламаної, яка в цьому випадку не є важливою.* Саме тому, за формулою повної ймовірності:

$$\alpha(x) = p\alpha(x+1) + q\alpha(x-1), \tag{3}$$
$$\beta(x) = p\beta(x+1) + q\beta(x-1), \tag{4}$$

де $x \in \{-A+1, -A+2, \ldots, B-2, B-1\}$.

$\alpha(B) = 1$

$\beta(B) = 0$

$\alpha(-A) = 0$

$\beta(-A) = 1$

Вправа 1. Подумати, як саме у цьому випадку використано формулу повної ймовірності.

Ми отримали дві системи *різницевих рівнянь* (3), (4), разом із *граничними умовами* (1), (2).

Нехай $p \neq q$. Рівняння для α має два очевидні розв'язки: $\alpha_1(x) = 1$ та $\alpha_2(x) = \left(\frac{q}{p}\right)^x$. Надалі позначимо $\theta = \frac{q}{p}$.

Вправа 2. Перевірити, що α_1 та α_2 – справді частинні розв'язки системи різницевих рівнянь (3).

Шукатимемо тепер функцію α у вигляді

$$\alpha(x) = c_1\alpha_1(x) + c_2\alpha_2(x) = c_1 + c_2\theta^x. \quad (5)$$

З урахуванням граничних умов (1), (2) маємо

$$\alpha(x) = \frac{\theta^x - \theta^{-A}}{\theta^B - \theta^{-A}}. \quad (6)$$

Вправа 3. Перевірити формулу (6) та отримати аналогічну формулу для β:

$$\beta(x) = \frac{\theta^B - \theta^x}{\theta^B - \theta^{-A}}. \quad (7)$$

Чи достатньо цього? Ні: ми фактично «вгадали» вигляд функції α (і знайшли єдину можливу функцію такого вигляду, яка задовольняє всі потрібні умови), проте не можна гарантувати, що всі розв'язки можна подати у формі (5). Тобто може статися, що знайдеться інший розв'язок нашої задачі, який ми «загубили», коли припустили, як саме виглядає шукана функція.

Саме тому необхідно додатково перевірити, чи дійсно знайдена нами α є єдиним розв'язком задачі. Зрозуміло, що для цього достатньо довести, що якщо $\hat{\alpha}$ – деякий розв'язок системи (3), то його можна подати у вигляді (5).

Дійсно, неважко перевірити, що знайдуться такі дві сталі c_1, c_2, що

$$c_1 + c_2\theta^{-A} = \hat{\alpha}(-A),$$
$$c_1 + c_2\theta^{-A+1} = \hat{\alpha}(-A+1).$$

Вправа 4. Довести це.

Вказівка. Розглянути дві рівності, наведені вище, як систему рівнянь відносно c_1, c_2.

Тоді з різницевого рівняння (3) одержуємо:

$$\hat{\alpha}(-A+1) = p\hat{\alpha}(-A+2) + q\hat{\alpha}(-A),$$
$$c_1 + c_2\theta^{-A+1} = p\hat{\alpha}(-A+2) + q(c_1 + c_2\theta^{-A}),$$
$$\frac{1-q}{p}c_1 + \frac{1}{p}c_2\theta^{-A+1} - \frac{q}{p}c_2\theta^{-A} = \hat{\alpha}(-A+2).$$

Застосувавши те, що $p+q=1$ та $\theta = \frac{q}{p}$, спростимо останній вираз:

$$c_1 + c_2\theta^{-A+2} = \hat{\alpha}(-A+2).$$

Аналогічно перевіряється, що

$$c_1 + c_2\theta^{-A+3} = \hat{\alpha}(-A+3),$$
$$c_1 + c_2\theta^{-A+4} = \hat{\alpha}(-A+4),$$
$$\cdots\cdots$$

та, загалом,

$$c_1 + c_2\theta^{x} = \hat{\alpha}(x),$$

де $-A \le x \le B$.

Як бачимо, довільний розв'язок системи подається у вигляді (5), а отже ми довели єдиність знайденої нами функції. Випадок із β розглядається аналогічно.

Вправа 5. Отримати при $p = q = \frac{1}{2}$ розв'язок системи (6)–(7) з граничними умовами (1)–(2)

$$\alpha(x) = \frac{x+A}{B+A},$$
$$\beta(x) = \frac{B-x}{B+A},$$

та довести єдиність цього розв'язку.

Вказівка. Повторити міркування випадку $p \ne q$, взявши $\alpha_1(x) = 1$, $\alpha_2(x) = x$.

Вправа 6. Показати, що

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}} \frac{\theta^{x} - \theta^{-A}}{\theta^{B} - \theta^{-A}} = \frac{x+A}{B+A}.$$

Отже,

$$
\begin{gathered}
\mathsf{P}(\tau < \infty, S_\tau = B \mid S_0 = x) = \\
= \begin{cases} \dfrac{\theta^x - \theta^{-A}}{\theta^B - \theta^{-A}}, p \neq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{x + A}{B + A}, p = \frac{1}{2}; \end{cases}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathsf{P}(\tau < \infty, S_\tau = -A \mid S_0 = x) = \\
= \begin{cases} \dfrac{\theta^B - \theta^x}{\theta^B - \theta^{-A}}, p \neq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{B - x}{B + A}, p = \frac{1}{2}. \end{cases}
\end{gathered}
$$

Відзначимо, що $\forall x, -A \leq x \leq B$,

$$
\begin{gathered}
\mathsf{P}(\tau < \infty \mid S_0 = x) = \\
= \mathsf{P}(\tau < \infty, S_\tau = B \mid S_0 = x) + \\
+ \mathsf{P}(\tau < \infty, S_\tau = -A \mid S_0 = x) = 1,
\end{gathered}
$$

а звідси ламана, що починається в точці $-A \leq x \leq B$ з імовірністю 1 досягне одного з рівнів $-A, B$.

Повернемося тепер до нашої гри. Із попередніх обчислень, гра між Капелюшником та Зайцем обов'язково закінчиться, причому ймовірності перемоги Зайця (ПЗ) та перемоги Капелюшника (ПК) такі:

$$
\mathsf{P}(\text{ПЗ}) = \begin{cases} \dfrac{1 - \theta^{-A}}{\theta^B - \theta^{-A}}, p \neq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{A}{B + A}, p = \frac{1}{2}; \end{cases}
$$

$$
\mathsf{P}(\text{ПК}) = \begin{cases} \dfrac{\theta^B - 1}{\theta^B - \theta^{-A}}, p \neq \frac{1}{2}, \\ \dfrac{B}{B + A}, p = \frac{1}{2}. \end{cases}
$$

Отже, ми відповіли на запитання Аліси. Залишається відзначити, що цей приклад – лише проста ілюстрація того, як за допомогою математики можна описати явища нашого життя. Ми живемо у Всесвіті, де робити абсолютно точні прогнози неможливо, але апарат теорії ймовірностей та математичної статистики настільки гнучкий та зручний, що дозволяє аналізувати навіть ті процеси, які, на перший погляд, аналізу принципово не піддаються.

Якщо ж читач бажає докладніше ознайомитися із теорією ймовірностей та цікавими задачами з неї (зокрема детальніше розібрати описану тут задачу про банкрутство), радимо звернутися до книжок [2] та [6], для розуміння яких достатньо знання шкільної програми з математики.

Література

[1] *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей: учебник / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988. – 448 с.

[2] *Гнеденко Б. В.* Элементарное введение в теорию вероятностей / Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. – М. : Наука, 1970. – 168 с.

[3] *Голомозий В. В.* Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / В. В. Голомозий, М. В. Карташов, К. В. Ральченко. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. – 366 с.

[4] Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань у фінансовій математиці та теорії ризику / Д. В. Гусак та ін. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 287 с.

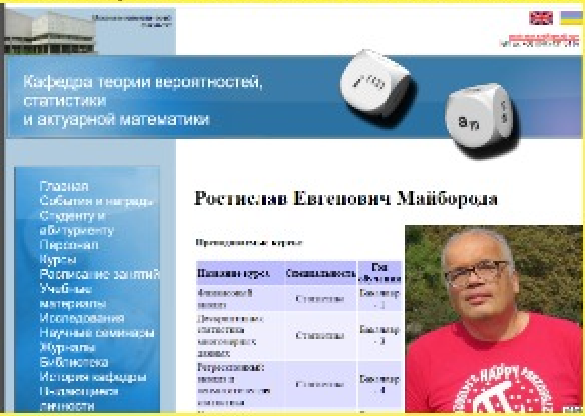
[5] *Карташов М. В.* Імовірність, процеси, статистика. / М. В. Карташов. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 494 с.

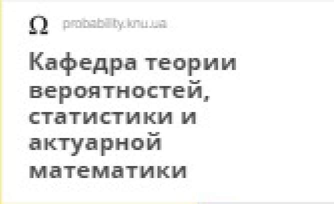
[6] *Мостеллер Ф.* Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостеллер. – М. : Наука, 1975. – 112 с.

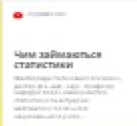
[7] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения / В. Феллер. – М. : Мир, 1967. – 498 с.

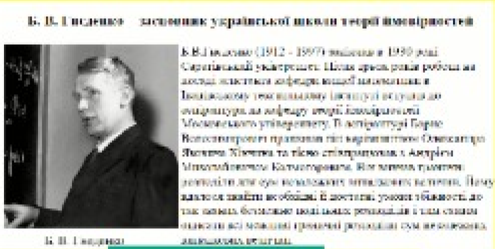
[8] *Ширяев А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989. – 640 с.

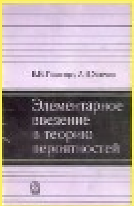
Майборода Ростислав Євгенович,

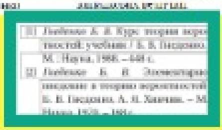


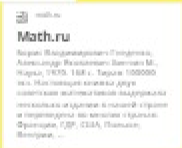


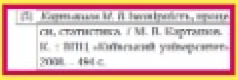


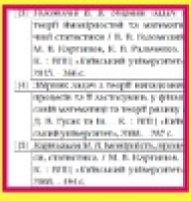








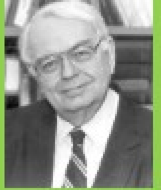




Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями [Чарльз Мостеллер] (fb2) читать онлайн

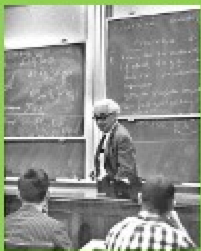
Настройки текста: Настоящая книга в действительности содержит 57, а не 50 задач. Некоторые задачи являются подготовительными; в силу различия вкусов часть задач может не показаться читателю интересной, наконец, семь задач скорее обсуждаются, чем решаются...

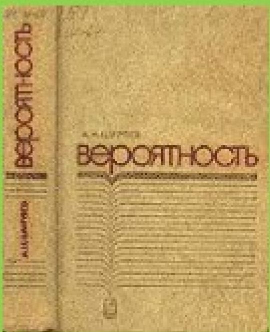
[6] Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостеллер. – М. : Наука, 1975. – 112 с.

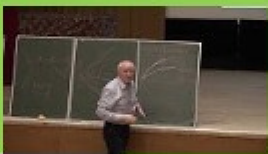


Уильям Феллер
(William Feller)
(07.07.1906 - 14.01.1970)

Вільям «Вілім» Феллер (7 липня 1906 — 14 січня 1970), народжений як **Вілібальд Сречко Феллер**, був хорватсько-американським математиком, який спеціалізувався на теорії ймовірностей.







[8] Ширяев А. Н. Вероятность / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1989. – 640 с.

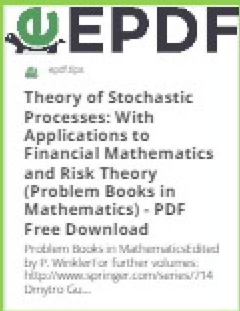
А.Н. Ширяев. Вероятность и концепция случайности

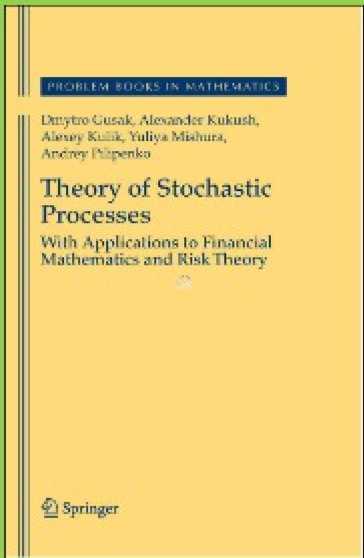
26.11.2009 18:00

А.Н. Ширяев. Случайность в вероятности

[4] Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань у фінансовій математиці та теорії ризику / Д. В. Гусак та ін. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 287 с.

доктор фізико-математичних наук, професор Гусак Дмитро Васильович



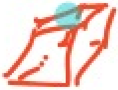


[4] Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань у фінансовій математиці та теорії ризику / Д. В. Гусак та ін. – К. : ВПЦ «Київський університет», 2008. – 287 с.

16 Підкидається гральний кубик. Подія A_i полягає в тому, що випадає число i, де $i = \overline{1,6}$. Позначимо події: B = "випадає парне число"; C = "випадає непарне число"; E = "випадає число не менше 2"; F = "випадає число більше 5". Знайти ймовірність події (за класичним означенням)

а) $P(A_2) = \frac{1}{6}$; б) A_4; в) B;

г) C; д) E; е) F.



$P(C) = \frac{3}{6} = P(B) = \frac{1}{2}$ $P(E) = \frac{5}{6}$ $P(F) = \frac{1}{6}$

$\frac{100}{6} \approx 1{,}6\%$ $> 50\%$

Кидають 3 гральні кубика. Знайти ймовірність того, що на верхніх гранях випадуть числа очок, які всі є однаковими.

Розв'язок.

a_1 a_2 a_3

Нехай, подія А – всі числа однакові.

$n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ кількість варіантів випадання чисел на 3-х кубиках.

$m = 6$ – кількість варіантів випадання чисел очки, яких є всі однаковими (111, 222, 333, 444, 555, 666)

$$P = \frac{m}{n}$$

$$P(A) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$$

3%

В пірамiдi стоять R гвинтівок, з них L з оптичним прицілом. Імовірність того, що стрілець, стріляючи із гвинтівки з оптичним прицілом, влучить у мішень дорівнює P. Імовірність того, що стрілець, стріляючи із гвинтівки без оптичного прицілу, влучить у мішень дорівнює P. Знайти, що стрілець влучить у мішень, стріляючи із навмання обраної гвинтівки.

Розв'язок.

$K = 14$; $P_1 = 0{,}81$; $P_2 = 0{,}46$ $R = 19$; $L = 4$

15 без приціла; 4 з прицілом.

A – стрілець влучить з гвинтівки, вибраної навмання.

Сформулюємо гіпотези щодо вибору гвинтівки

H_1 – вибрано гвинтівку з оптичним прицілом.

H_2 - вибрано гвинтівку без оптичного прицілу.

$$P(H_1) = \frac{4}{19} \qquad P(H_2) = \frac{15}{19}$$

$$P_{H1}(A) = 0{,}81 \qquad P_{H2}(A) = 0{,}46$$

$$P(A) = P(H_1)\ \ P_{H1}(A)\ +\ P(H_2)\ \ P_{H2}(A) = \frac{4}{19}\cdot 0{,}81 + 0{,}46\cdot\frac{15}{19} = \frac{4\cdot 81}{1900} + \frac{46\cdot 15}{1900} =$$

$$= \frac{324+690}{1900} = \frac{1014}{1900} = \frac{507}{950} \approx 0{,}534$$

В урні міститься К чорних і білих куль, до них додають L білих куль. Після цього з урни навмання виймають М куль. Знайти ймовірність того, що всі вибрані кулі є білими, припускаючи, що всі можливі варіанти (гіпотези) про початковий вміст урни є рівно можливими.

Розв'язок.

$$K = 6,\ L = 3,\ M = 5$$

6 білих і чорних куль + 3 білих кулі

5 куль виймають.

A – вийняті 5 кульок – білі.

Сформулюємо гіпотези про початковий склад кульок:

H_1 – 6 білих і 0 чорних куль

H_2 – 5 білих і 1 чорна кулі

H_3 – 4 білих і 2 чорних кулі

H_4 – 3 білих і 3 чорних кулі

H_5 – 2 білих і 4 чорних кулі

H_6 – 1 білих і 5 чорних кулі

H_7 – 0 білих і 6 чорних кулі

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) \ldots\ldots P(H_7) = \frac{1}{7}$$

$$P_{H1}(A) = 1$$

$$P_{H2}(A) = \frac{C_8^5}{C_9^5} = \frac{8!5!4!}{5!3!9!} = \frac{8!4\cdot3!}{3!9\cdot8!} = \frac{4}{9}$$

$$P_{H3}(A) = \frac{C_7^5}{C_9^5} = \frac{7!5!4!}{5!2!9!} = \frac{7!4\cdot3\cdot2!}{2!9\cdot8\cdot7!} = \frac{1}{6}$$

$$P_{H4}(A) = \frac{C_6^5}{C_9^5} = \frac{6!5!4!}{5!9!} = \frac{6!4\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7\cdot6!} = \frac{1}{21}$$

$$P_{H5}(A) = \frac{C_5^5}{C_9^5} = \frac{5!5!4!}{5!9!} = \frac{5!4\cdot3\cdot2}{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5!} = \frac{1}{126}$$

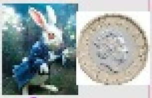
$$P_{H6}(A) = 0 = P_{H7}(A)$$

За формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\ P_{H1}(A) + P(H_2)\ P_{H2}(A) + P(H_3)\ P_{H3}(A) + P(H_4)\ P_{H4}(A) + P(H_5)\ P_{H5}(A) = \frac{1}{7}(1+\frac{4}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{126}) = \frac{1}{7}(\frac{126+56+21+6+1}{126}) = \frac{210}{7\cdot126} =$$

$$= \frac{30}{126} = \frac{5}{21}, \text{ отже } P(A) = \frac{5}{21}$$

New table

n	 A	 B	S_n
0	4	3	0
1	3	4	-1
2	4	3	0
3	3	4	-1
4	4	3	0
5	5	2	1
6	6	1	2
7	7	0	3

$\underline{\tau} < \infty$ ✓

$\tau - \infty$

БЗ $\quad$ к

$A+x \quad B-x$

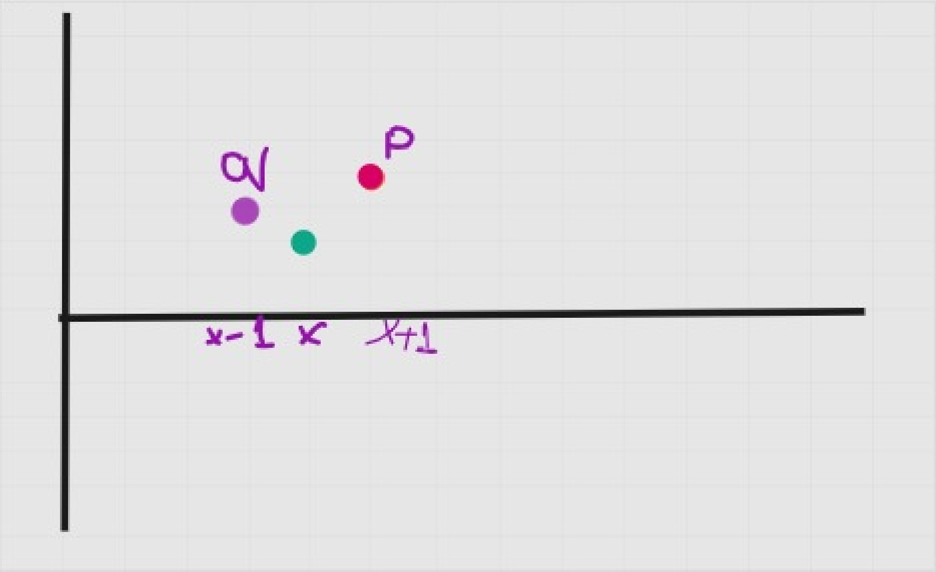
$$x \in \{-A; -A+1; -A+2; \ldots; B-1; B\}$$

$$-A \le x \le B$$

$$\beta(x) = P(W_2 \mid S_0 = x) \quad \boxed{К}$$

$$\alpha(x) = P(W_1 \mid S_0 = x) \quad БЗ$$

$z = 1 \quad p + q = 1$



$$\alpha(x) = p\,\alpha(x+1) + q\,\alpha(x-1)$$

$$\beta(x) = p\,\beta(x+1) + q\,\beta(x-1)$$

$$x \in \{-A+1, \ldots, b-1\}$$

Бз К

3 2

I – K_1

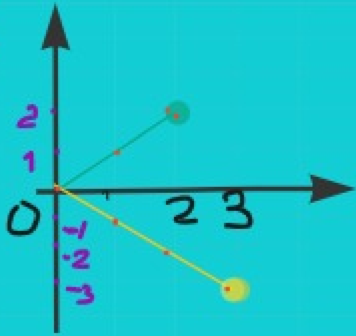
II – K_2

$S_I = -K_1 - II$

$S_{II} = K_2 - I$

n	Бз	К	S_n
0	3	2	0
1	2	3	-1
2	1	4	-2
3	0	5	-3

n	Бз	К	S_n
0	3	2	0
1	4	1	1
2	5	0	2



n	Бз	К	S_n
1	3	2	0
2	2	3	-1
3	1	4	-2
4	2	3	-1
5	3	2	0
6	2	3	-1
7	1	4	-2
8	0	5	-3