Bluebird Math Circle
Як зацікавити математикою

Заняття 1: Квадрат — відрізка брат. Методи розв'язування задач з комбінаторики та геометрії

Діліться своїми задачами, рішеннями, моделями, історіями і творчістю: https://aimathcircles.org/Bluebird

Як хочете, але досконалість зрештою досягається не тоді, коли вже нема чого додати, а коли вже нема чого забрати.

Марія Толчіф,
Ім'я осейджі: Ki He Kah Stah Tsa,
Перша велика прима-балерина Америки

ОГОЛОШЕННЯ

Приєднуйтесь онлайн до Sunflower Bluebird MTC, беріть участь разом із друзями та родиною.

Пт, 28 жовтня, 18:00-20:00 за київським часом.

Реєстрація: https://aimathcircles.org/Bluebird

МАТ-ЗАГАДКА

Перемістіть один сірник, щоб отримати інший квадрат

Натхнення: Творчість корінних американців


Килим навахо автора Sally Fowler


Які фігури ви бачите в центрі килима?

Розминка

1. Одного гарного літнього дня Синя пташка прийшла до своєї подруги Таязури, і одразу отримала від неї запитання. Для проєкту з рукоділля Таязурі потрібен був ідеальний квадрат з картону. Вона взяла шматок картону і вирізала потрібну форму. Тепер у неї був картон із отвором і вирізаний шматок. Вона хотіла переконатися, що цей шматок справді квадрат, але не мала жодних інструментів: ні лінійки, ні циркуля, ні чогось іншого. Синя пташка розв'язала задачу! Чи можете ви також її розв'язати?

2. Площа однієї клітинки дорівнює 1. Знайдіть площі внутрішніх фігур на кожному з рисунків нижче. Що це за фігури?

AIMC додому про Події Наші партнери Зв'яжіться з нами Математичний гурток «Синя пташка».

Тетяна Шубіна

Директор

Тетяна є одним із засновників проєкту Navajo Nation Math Circles і має довгу історію роботи з математичними гуртками, включно з одним із початкових математичних гуртків у Сполучених Штатах. Вона є стипендіатом Sequoyah в Науково-технічному товаристві американських індіанців (AISES) і є усиновленим членом клану племені навахо, Tocich'ii'nii (Гірка вода). Вона проживає в Сан-Хосе, Каліфорнія, США.

електронна адреса: tatiana.shubin@sjsu.edu

Катерина Терлецька

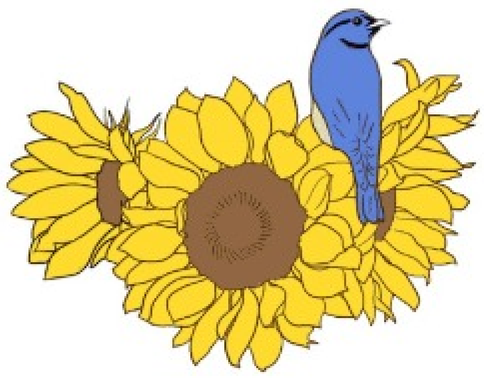
доктор фізико-математичних наук, завідувачка лабораторії прикладної математики НЦ МАНУ, старший науковий співробітник ІПММС НАН України

Лауреатка II української премії L'ORÉAL-ЮНЕСКО «Для жінок у науці». Увійшла до ТОП-10 найуспішніших українських [вчених-жінок](#).

ALLIANCE

[BB home – Alliance of Indigenous Math Circles (aimathcircles.org)](https://aimathcircles.org)

SUNFLOWER BLUEBIRD



Квадрат — відрізка брат

October 28, 2022

Bluebird Math Circle
Як зацікавити математикою

Заняття 1: Квадрат — відрізка брат. Методи розв'язування задач з комбінаторики та геометрії

Діліться своїми задачами, рішеннями, моделями, історіями і творчістю: https://aimathcircles.org/Bluebird

Як хочете, але досконалість зрештою досягається не тоді, коли вже нема чого додати, а коли вже нема чого забрати.

Марія Толчіф,
Ім'я осейджі: Ki He Kah Stah Tsa,
Перша велика прима-балерина Америки

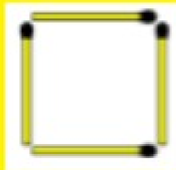
ОГОЛОШЕННЯ

Приєднуйтесь онлайн до Sunflower Bluebird MTC, беріть участь разом із друзями та родиною.

Пт, 28 жовтня, 18:00-20:00 за київським часом.

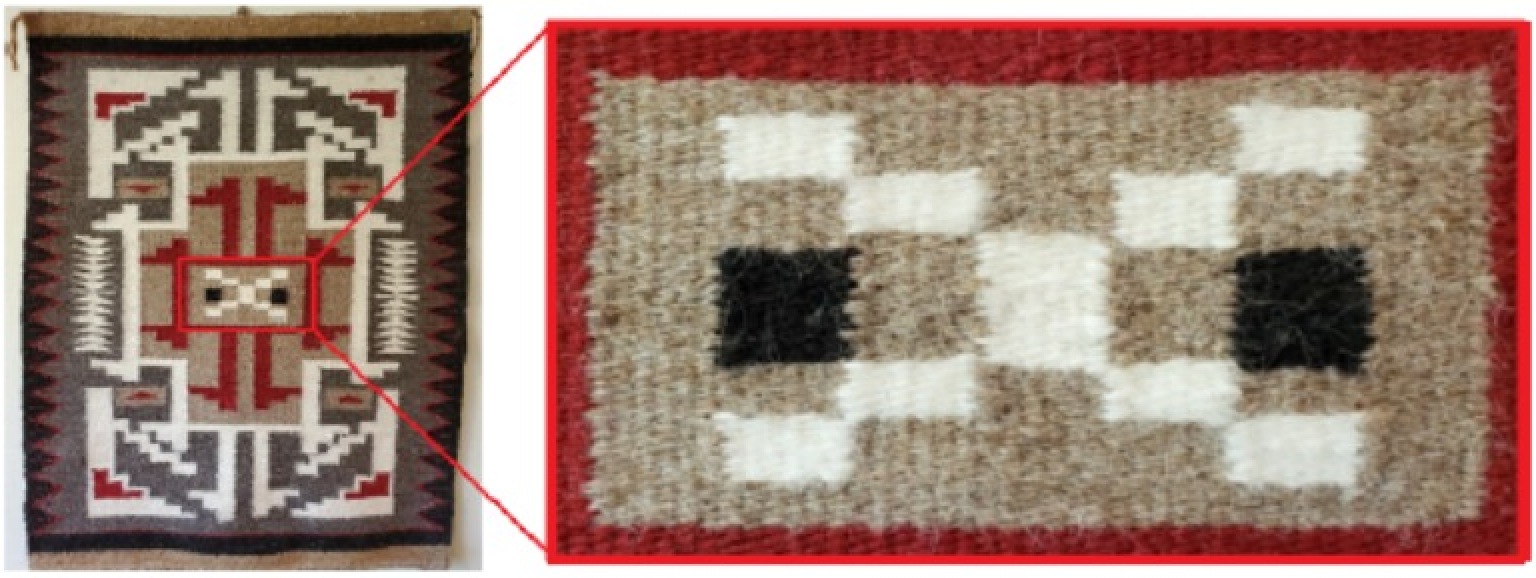
Реєстрація: https://aimathcircles.org/Bluebird

МАТ-ЗАГАДКА



Перемістіть один сірник, щоб отримати інший квадрат

Натхнення: Творчість корінних американців



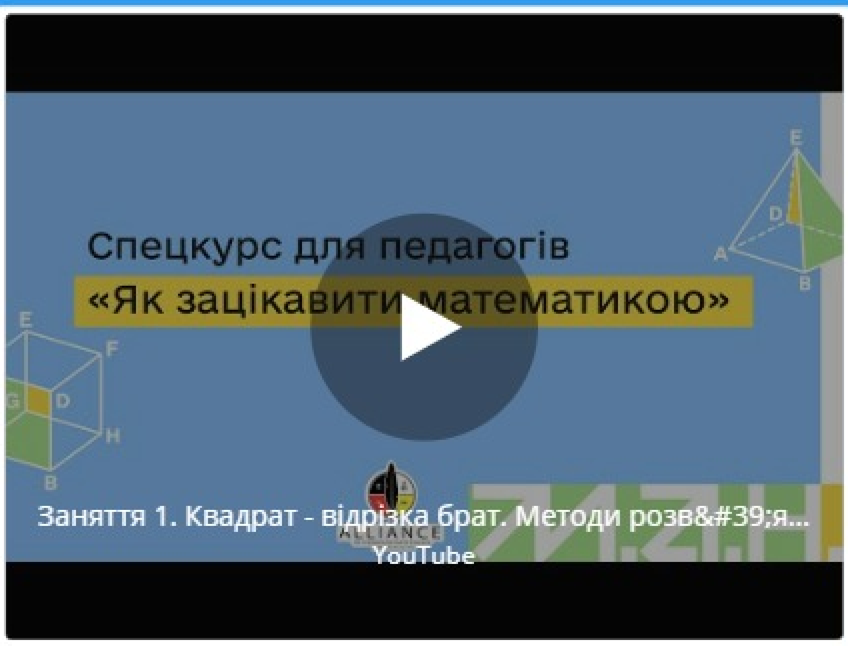
Килим навахо автора Sally Fowler

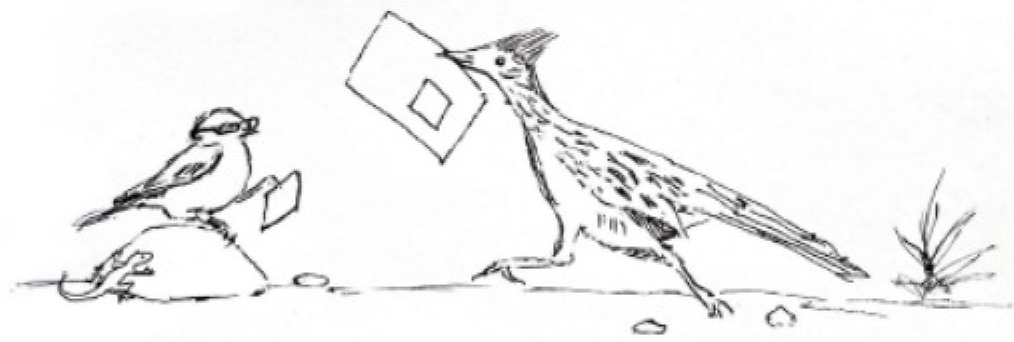
Які фігури ви бачите в центрі килима?

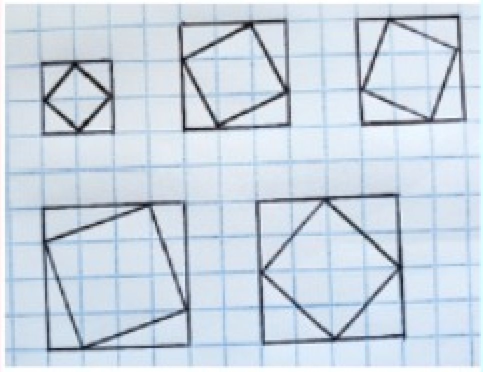
Розминка

1. Одного гарного літнього дня Синя пташка прийшла до своєї подруги Таязури, і одразу отримала від неї запитання. Для проєкту з рукоділля Таязурі потрібен був ідеальний квадрат з картону. Вона взяла шматок картону і вирізала потрібну форму. Тепер у неї був картон із отвором і вирізаний шматок. Вона хотіла переконатися, що цей шматок справді квадрат, але не мала жодних інструментів: ні лінійки, ні циркуля, ні чогось іншого. Синя пташка розв'язала задачу! Чи можете ви також її розв'язати?

2. Площа однієї клітинки дорівнює 1. Знайдіть площі внутрішніх фігур на кожному з рисунків нижче. Що це за фігури?





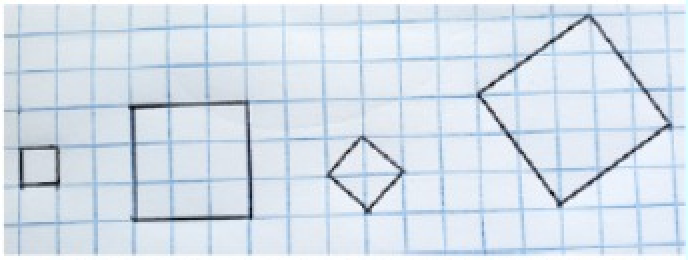


Родинне коло: Нумо рахувати!

Зробімо щось просте і легке. Що може бути простішим за підрахунок, і що може бути легшим за квадрат? Порахуймо квадрати на папері в клітинку.

Ми рахуватимемо два типи квадратів:

- Квадрати, сторони яких лежать на лініях сітки. Для зручності, назвемо їх *правильними* квадратами.
- Квадрати, вершини яких лежать у вузлах сітки, але сторони не лежать на лініях сітки. Назвемо їх *нахиленими* квадратами.



Приклади правильних квадратів 1×1 та 3×3 і два нахилені

1. Почнемо з квадрата 1×1. Скільки тут правильних квадратів? А нахилених? Якою є загальна кількість квадратів?
2. Перейдемо до квадрата 2×2. Скільки в ньому правильних квадратів? Скільки нахилених? Якою є загальна кількість квадратів?
3. Тепер розглянемо квадрат 3×3. Скільки в ньому правильних квадратів? Скільки нахилених? Якою є загальна кількість квадратів?

Чи помічаєте ви якісь закономірності? Чи можете ви передбачити, скільки нахилених квадратів буде в квадраті 4×4? А скільки правильних?

А що можна сказати про квадрат 7×7? Якщо ви знайомі з алгеброю, то скільки правильних і похилих квадратів міститиме квадрат n×n?

Запитай у Синьої пташки

ЗАПИТАННЯ — *Де той хлопець, який ввів у математику літери, щоб я міг всипати йому перцю?* - Luke A.

ВІДПОВІДЬ — Досить важко всипати перцю людині, яка жила майже 2000 років тому! Це був Діофант, якого часто називають батьком алгебри. Він жив в Александрії, у Римському Єгипті, у 1-му, 2-му чи 3-му столітті нашої ери. У своєму трактаті під назвою «Арифметика» він використовував літери для позначення невідомих і описав методи розв'язування алгебраїчних рівнянь.

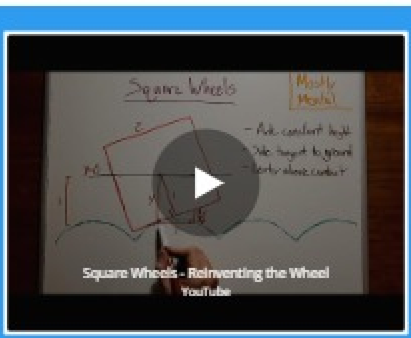
Це суперлиходій з алгебри, якого ми знаємо. Подібні підлі схеми виникали в багатьох різних місцях по всьому світу. Можливо тому, що всі людські мови начебто використовують змінні чи невідомі? "Cat" англійською, "แมว" тайською, "Mósí" мовою навахо може означати будь-що котяче. Так само літера в математичній мові може означати невідоме число або багато чисел. Як ви можете собі уявити, з роками світові культури розробляли традиції для своїх математичних букв. Наприклад, x часто означає невідоме, яке ми шукаємо: "Хто ж такий цей загадковий містер x?" У відомій формулі $e = mc^2$, m означає "маса". Символ π був у списку найбільш розшукуваних по всьому світу протягом тисячоліть, і тепер має своє власне свято 3/14 (14 березня).

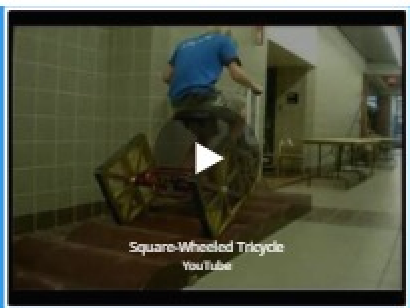
ЦІКАВИЙ ФАКТ У 1997 році Стен Вейґон, професор математики в коледжі Макалестер у Сент-Полі, штат Міннесота, сконструював велосипед із квадратними колесами, який може плавно котитися на рівномірно розташованих пагорбах спеціальної форми, відомої як перевернута ланцюгова лінія або катенарія. Ланцюгова лінія — це вигин, який утворює мотузка або ланцюг, коли ви тримаєте кінці двома руками і дозволяєте їй висіти. Кемперам подобаються намети з «катенарним перерізом». Таким чином полотно краще чіпляється за мотузку, на якій воно звисає, ніж якщо переріз прямий. А надземні залізничні дроти називаються катенарією за формою кривої, яку вони утворюють.

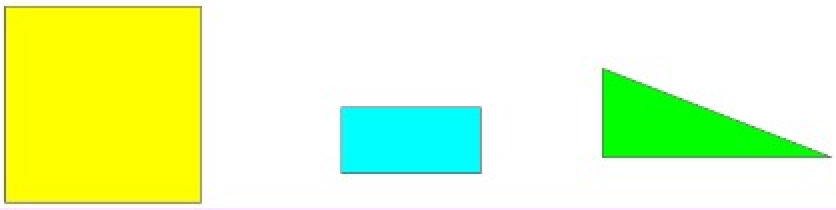
Фотографія Стена Вейґона, коледж Макалестер

Ідея, насправді, може бути старою: біля деяких стародавніх пірамід в Єгипті були знайдені різні шматки дерева, вирізані чвертями кіл. Одна з теорій полягає в тому, що їх використовували для того, щоб великі мармурові блоки з квадратним поперечним перерізом можна було легко скочувати. Дійсно, чверть кола досить близька до катенарії, щоб це спрацювало.

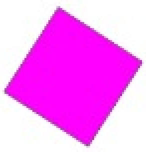
Сьогодні люди можуть їздити на велосипеді Вейґона у багатьох місцях, включаючи Музей науки МАН у Києві.
Як відбувається поїздка, можна подивитися тут: https://youtu.be/LgbWu8zJubo



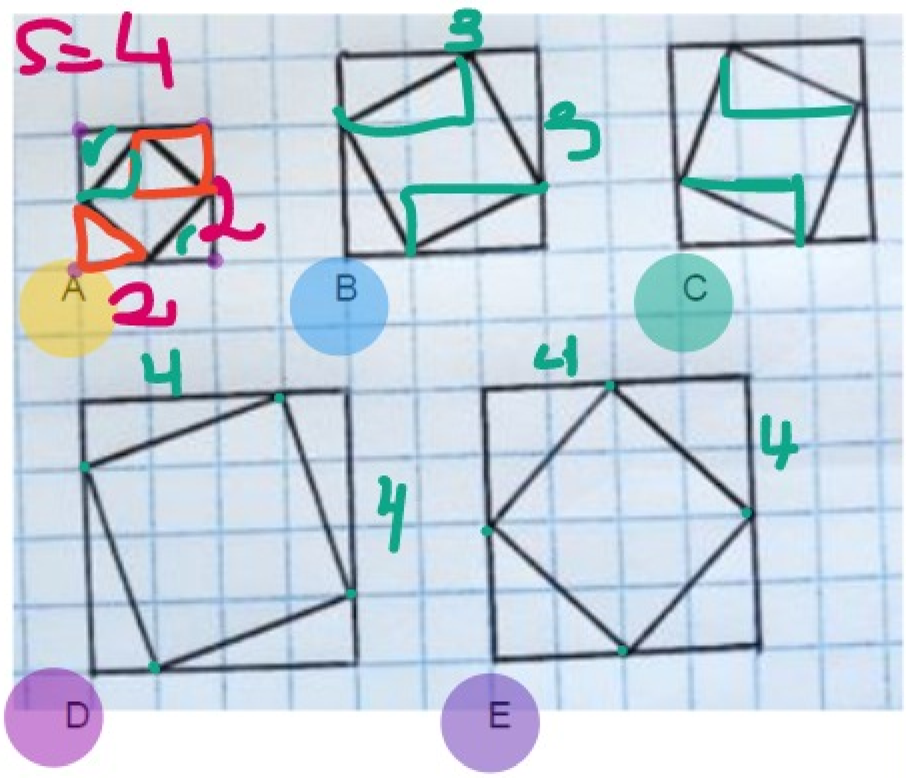




Підрахуємо площу

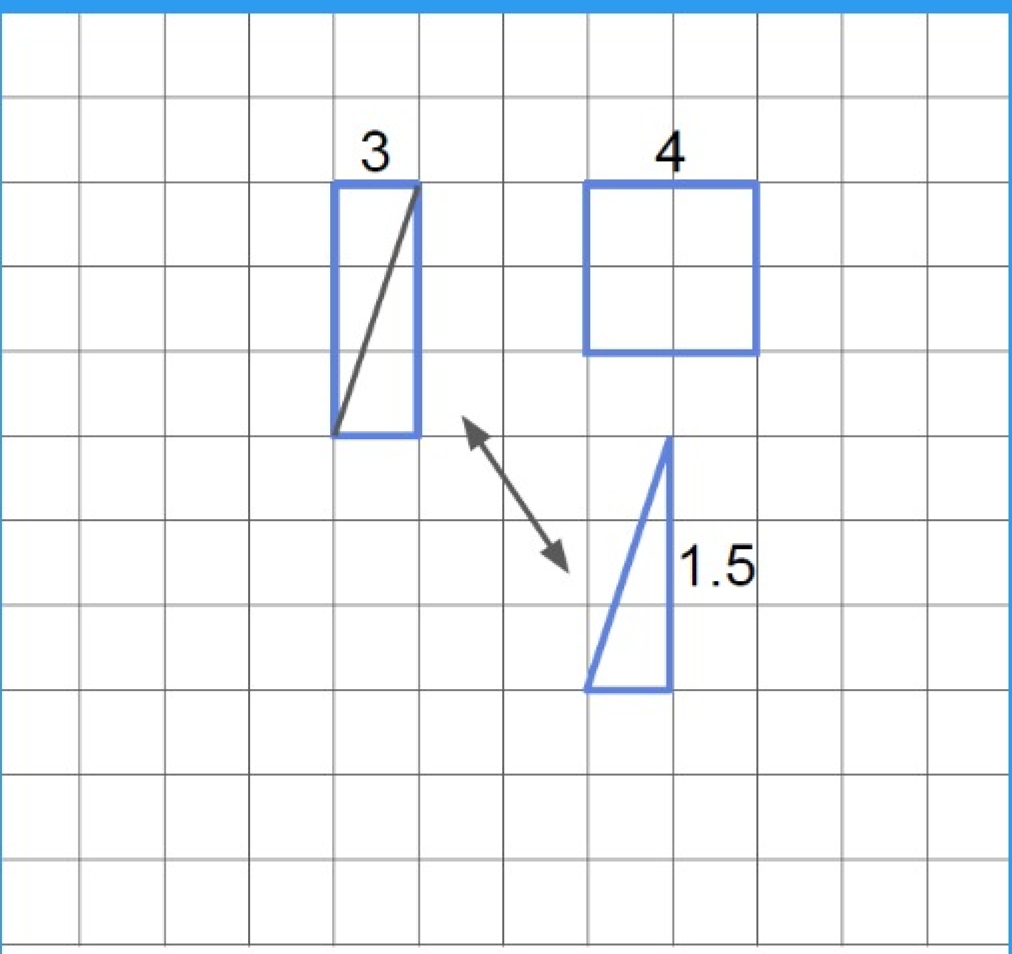


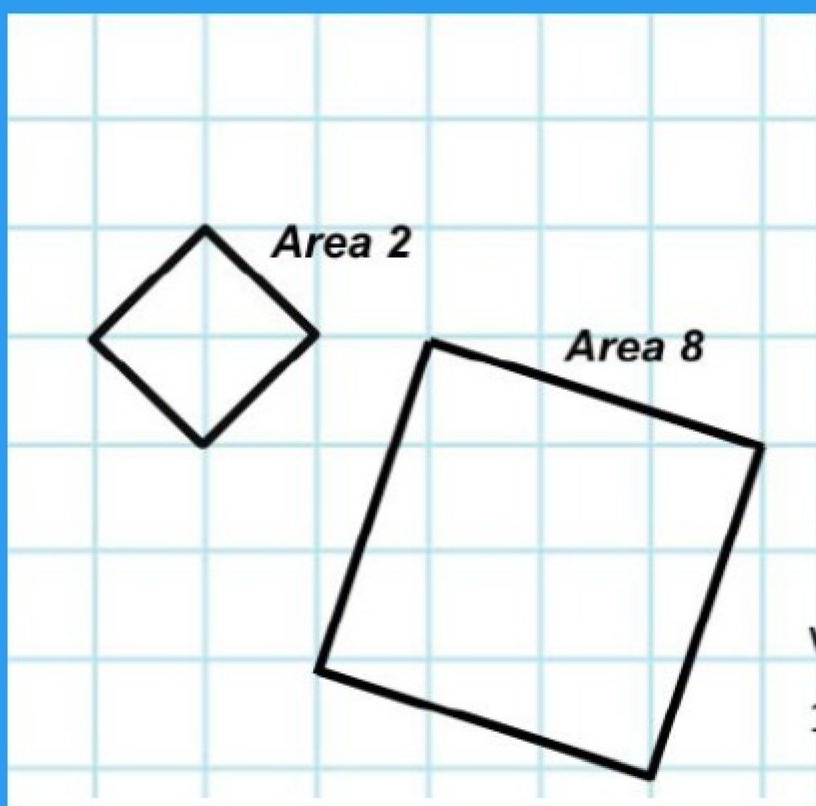
Знайдіть площі внутрішніх чотирикутників



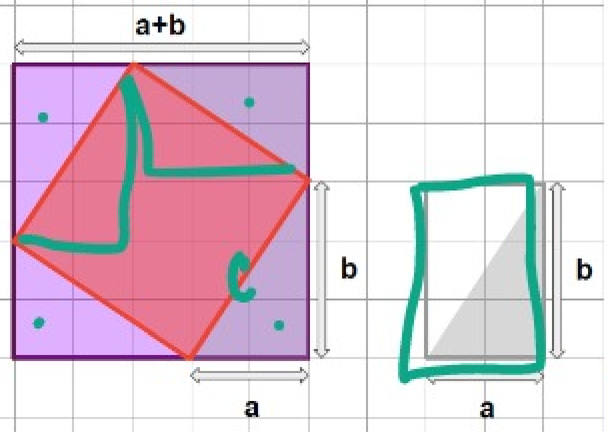
New table

A = 2	4-2=2
B = 5	9-4
C = 5	9
D = 10	16-6
E = 8	16-8





$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



Площа фіолетового квадрата:
$(a + b)^2$

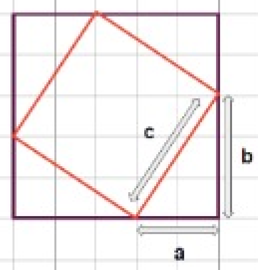
Площа двох прямокутних трикутників:
$a \times b$

Площа червоного квадрата:

$(a + b)^2 - 2ab =$

$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab =$

$\boxed{a^2 + b^2}$



🍎🍎🍎 **Бонус**

Ми щойно довели теорему Піфагора!

$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Можливі площі квадратів і дещо ще….

Можливі площі:

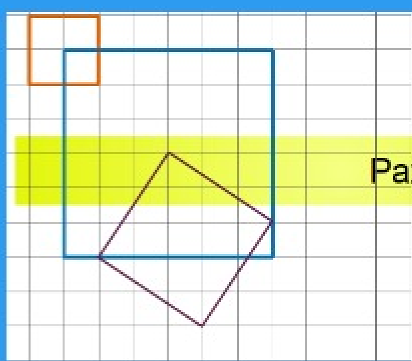
1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, …

Неможливі площі:

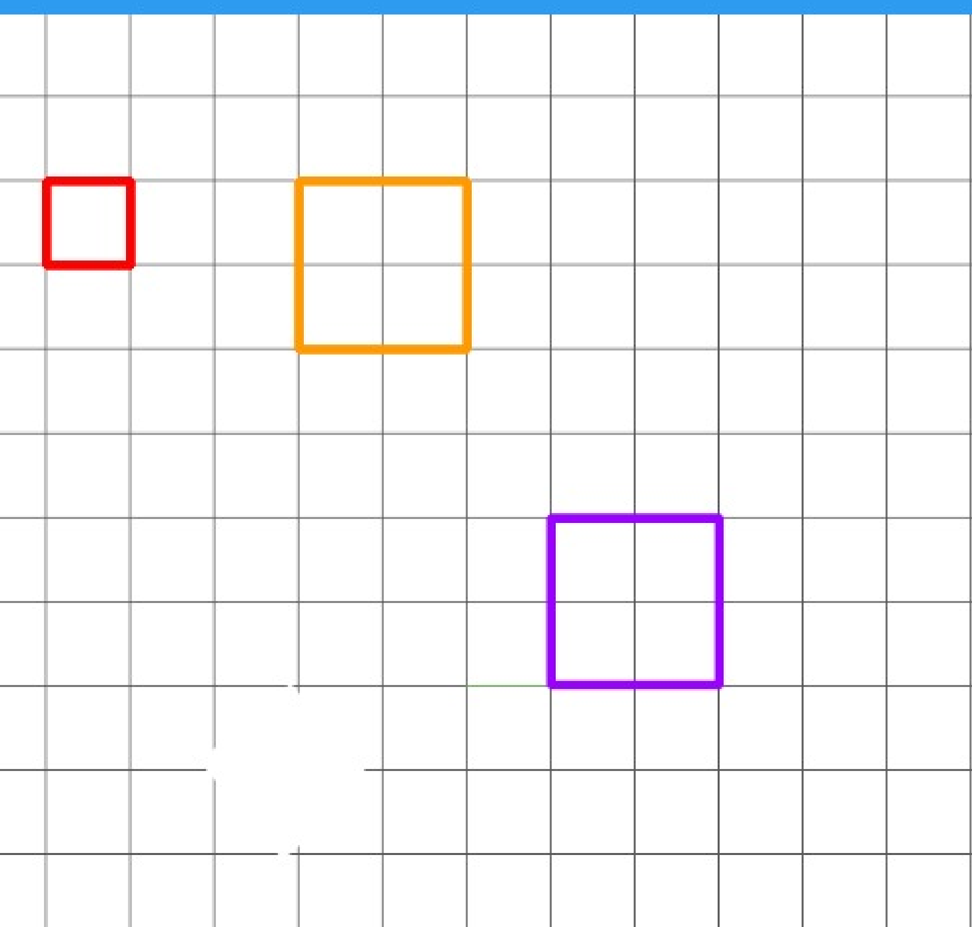
3, 6, 7, 11, …

Результат із теорії чисел (глибокий!):

Натуральне число n не може бути представлене сумою двох квадратів, якщо ..



Рахуємо квадрати

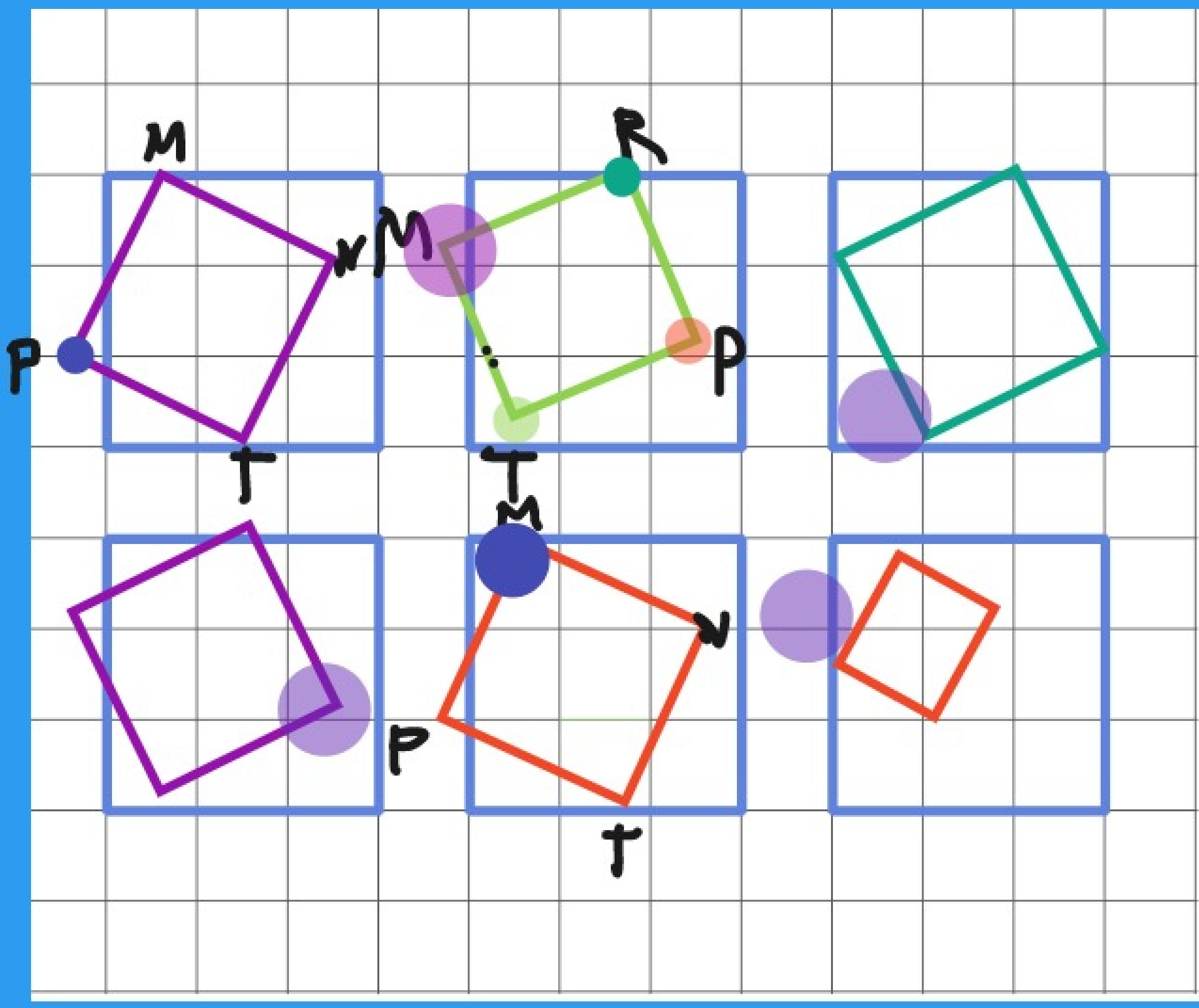


Експериментуйте й заповнюйте таблицю

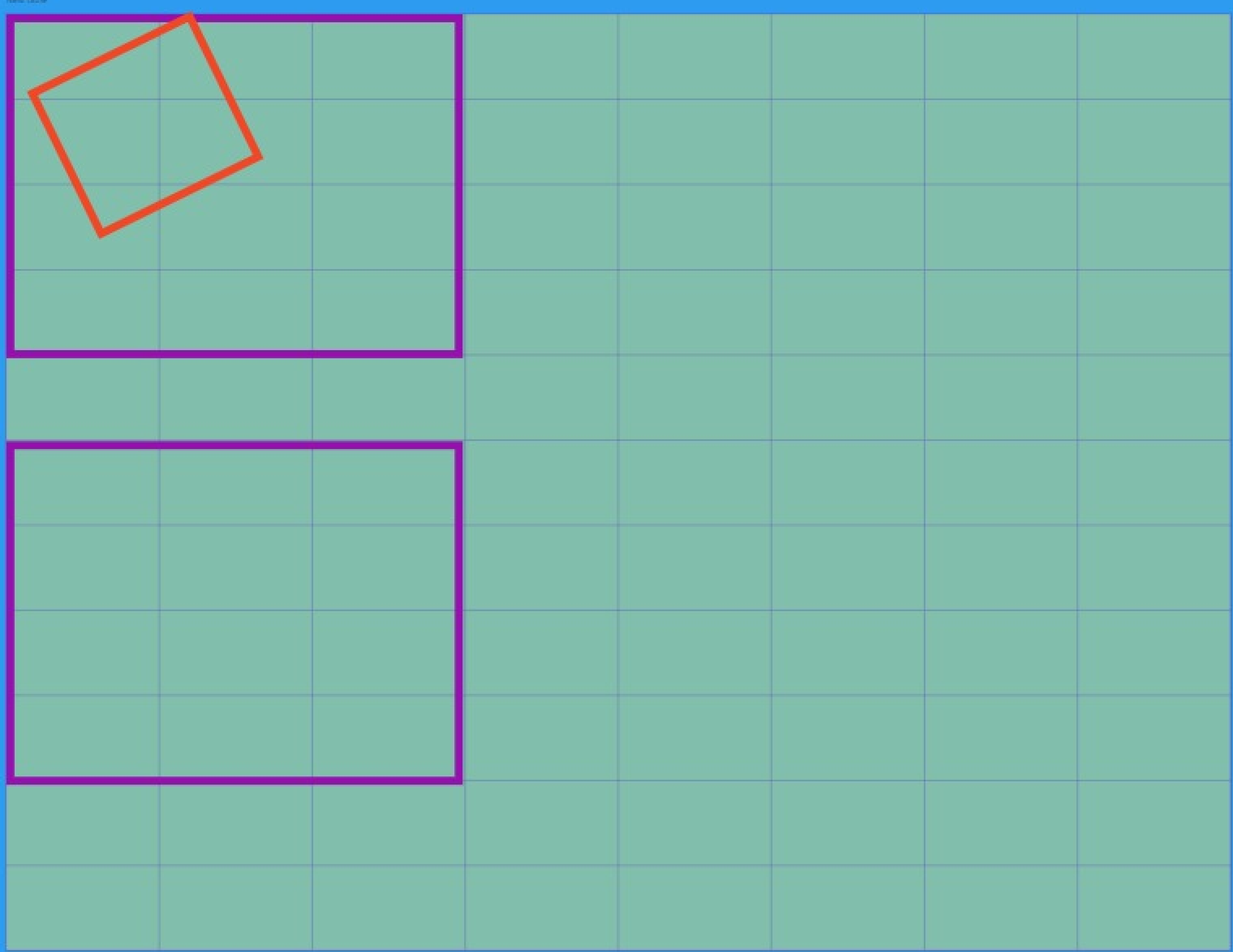
Розмір області	К-ть правильних квадратів	К-ть нахилених квадратів	Разом
1 x 1	1	0	1
2 x 2	5	1	6

У червоній та оранжевій фігурах зобразіть правильні квадрати.

У фіолетовій області розмістіть нахилені квадрати.



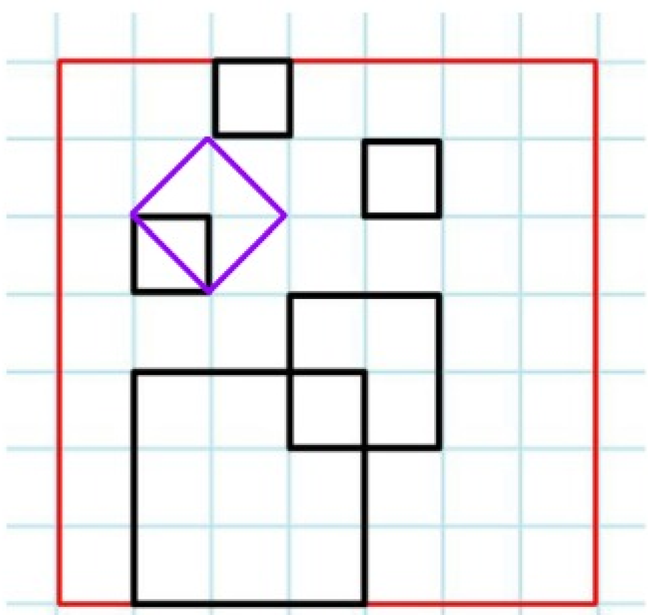
Розмір області	К-ть правильних квадратів	К-ть нахилених квадратів	Разом
1 x 1	1	0	1
2 x 2	5	1	6
3 x 3	14	[illegible]	20



Що тут за закономірність?

Розмір області	К-ть правильних квадратів	К-ть нахилених квадратів	Разом
1 x 1	1	0	1
2 x 2	5	1	6
3 x 3	14	6	20
4 x 4			
5 x 5			

Як підраховується к-ть правильних квадратів?	В області, розміру:	К-ть правильних квадратів	К-ть нахилених квадратів	Разом
1	1 x 1	1	0	1
$5 = 1 + 4 \quad = 1 + 2^2$	2 x 2	5	1	6
$14 = 5+9 \quad = 5 + 3^2$	3 x 3	14	6	20
We guess: $14 + 4^2 = 30$	4 x 4	30		
We guess: $30 + 5^2 = 55$	5 x 5	55		



Підрахуймо всі квадрати в сітці 7×7

🍎🍎🍎 **Розуміння/Челендж**

Залиште ці підказки для допомоги. Для збільшення складності, не залишайте.

<u>Підраховуючи, звертайте увагу:</u>
1. Чи кожна вершина у вузлі сітки?
2. Ваша фігура точно квадрат?
3. Чи враховуєте ви нахилені квадрати?

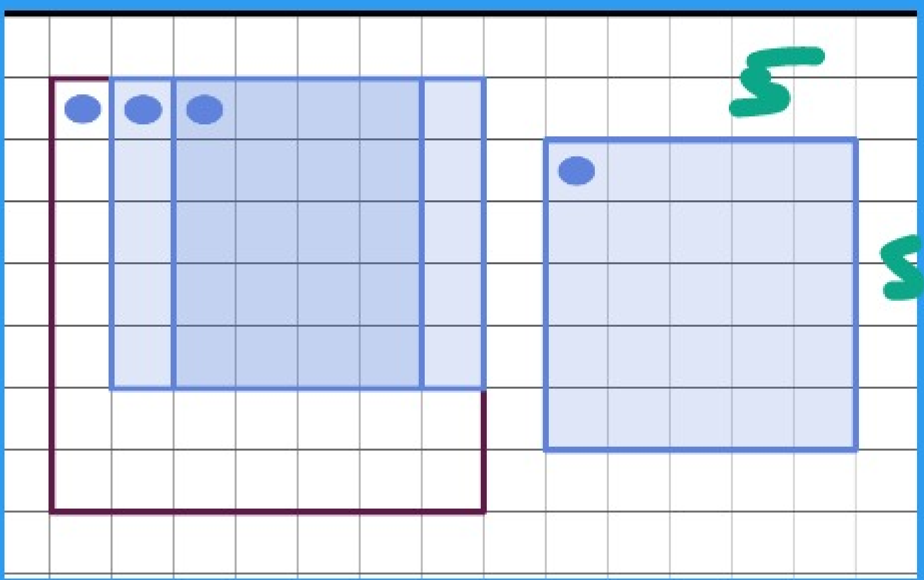
Як підраховується к-ть правильних квадратів?	В області, розміру:	К-ть правильних квадратів	К-ть нахилених квадратів	Разом
1^2	1 x 1	1	0	1
$1^2 + 2^2$	2 x 2	5	1	6
$1^2 + 2^2 + 3^2$	3 x 3	14	6	20
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$	4 x 4	30	20	50
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$	5 x 5	55	50	105
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$	6 x 6	91	105	196
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$	7 x 7	140	196	336

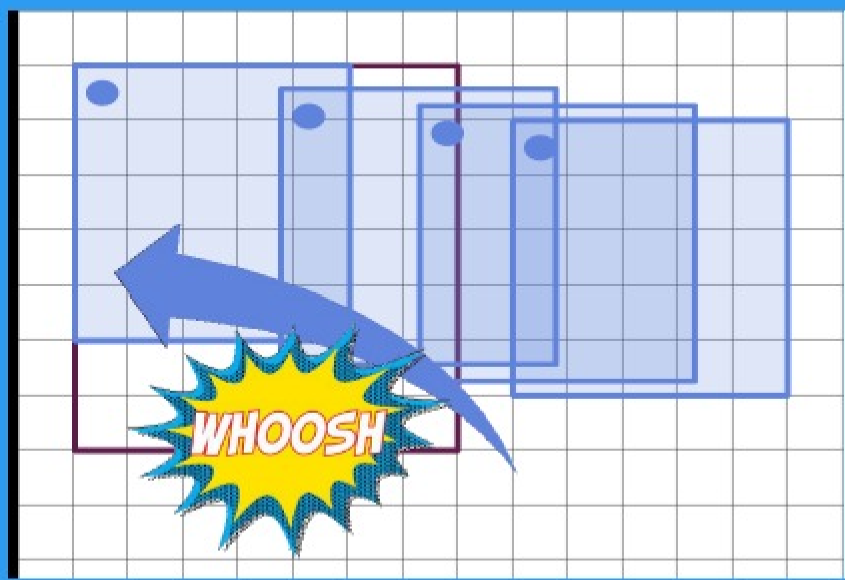
К-ть *правильних* квадратів заданого розміру в сітці 7×7:

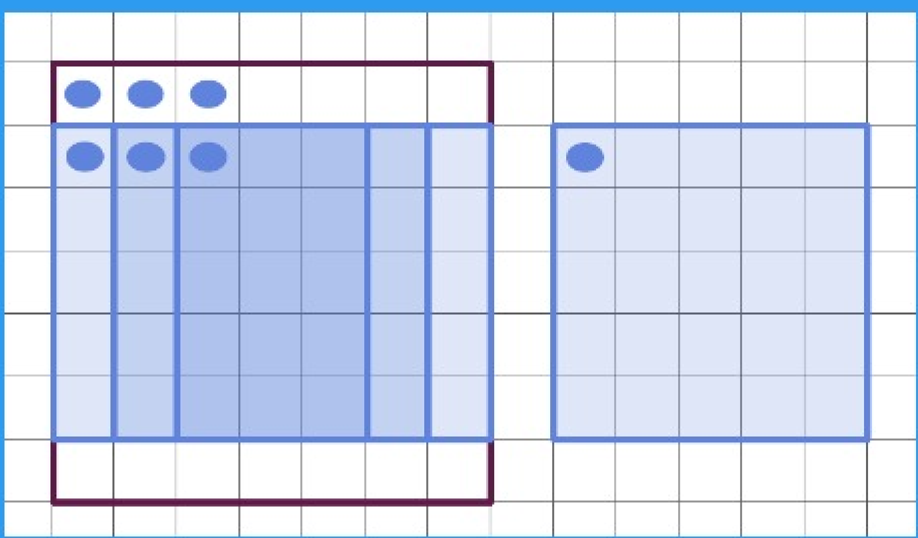
Розмір	К-ть таких квадратів (напишіть свої відповіді в клітинках)
1×1	?
2×2	?
3×3	?
4×4	?
5×5	?
6×6	?
7×7	?

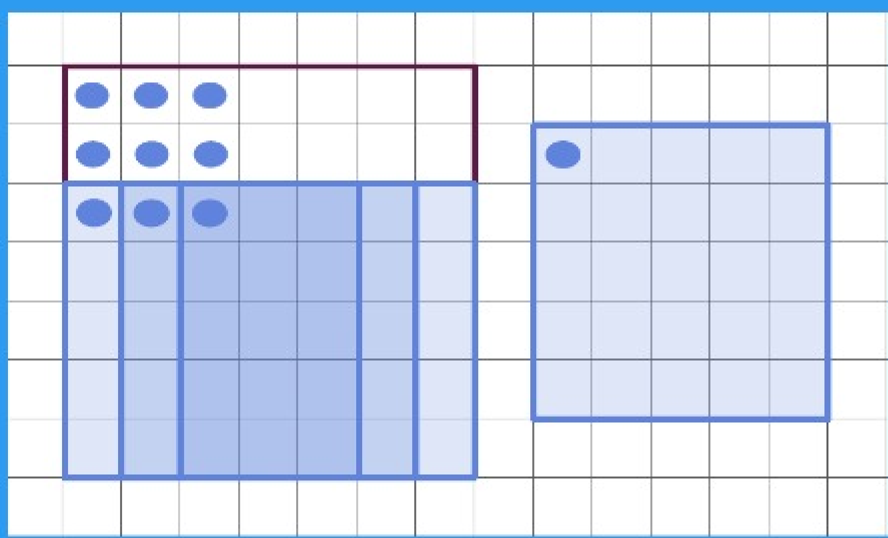
К-ть *правильних* квадратів заданого розміру в сітці 7×7:

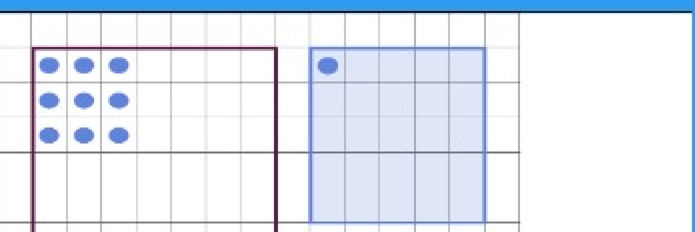
Розмір	К-ть таких квадратів
1×1	49
2×2	36
3×3	25
4×4	16
5×5	9
6×6	4
7×7	1











Розмір	К-ть таких квадратів
4×4	16
5×5	$9 = 3^2$
6×6	4

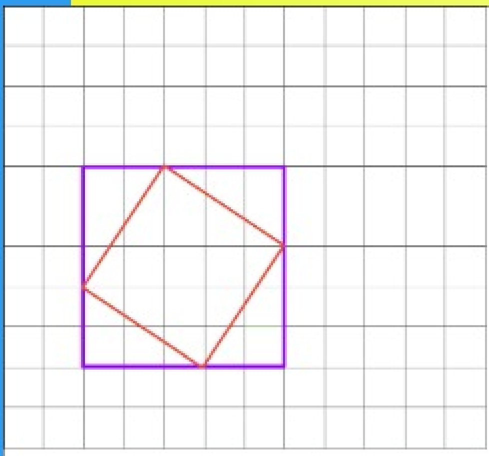
К-ть *правильних* квадратів заданого розміру в сітці 7×7:

Розмір	К-ть таких квадратів
1×1	$49 = 7^2$
2×2	$36 = 6^2$
3×3	$25 = 5^2$
4×4	$16 = 4^2$
5×5	$9 = 3^2$
6×6	$4 = 2^2$
7×7	$1 = 1^2$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

Отже, загальна к-ть правильних квадратів у сітці n×n:

підрахуємо всі *нахилені* квадрати в сітці 7×7?



Червоний нахилений квадрат є ***вписаним*** у фіолетовий правильний квадрат.

У загальному випадку, ми кажемо, що нахилений квадрат є вписаним у правильний, якщо

всі вершини нахиленого квадрата лежать на сторонах правильного.

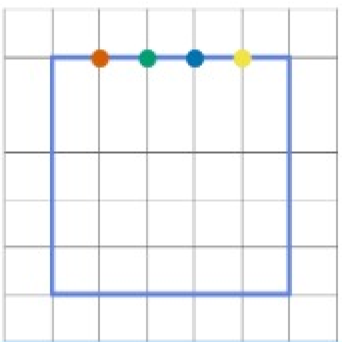
К-ть *вписаних нахилених квадратів* у правильний квадрат заданого розміру:

Розмір правильного квадрата	К-ть вписаних нахилених квадратів
1×1	0
2×2	1
3×3	2
4×4	?
…	…
n×n	?

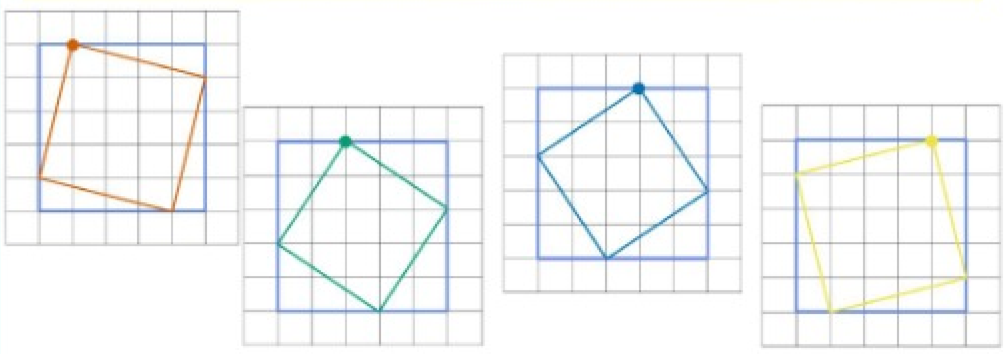
Звідки ми знаємо, що в квадрат 5×5 вписуються 4 нахилені квадрати?

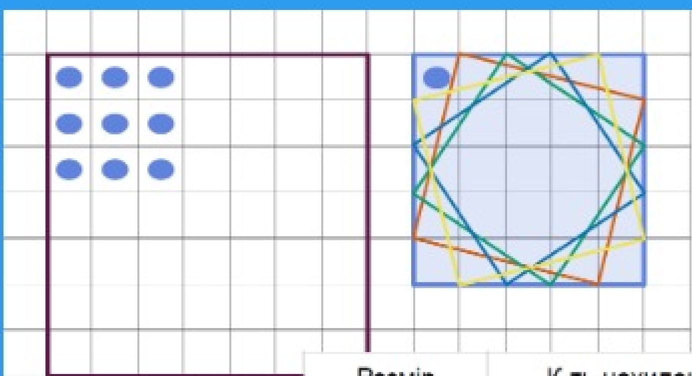
Одна з вершин нахиленого квадрата має лежати на верхній стороні квадрата 5×5.

Вона може зайняти рівно одне з 4 положень, позначених крапками:



Чотири нахилені квадрати, вписані в квадрат 5×5:





Розмір правильного квадрата	К-ть нахилених квадратів, вписаних в усі правильні квадрати цього розміру в сітці 7×7
5×5	$3^2 \cdot 4$

Неочікуваний результат:

🍎🍎🍎 **Розуміння/Челендж**

Ці рівняння використовують **всі** попередні активності! Для кращого розуміння, нехай учні відслідкують ці зв'язки, або ж зробіть це гуртом. Для більшої складності, пропустіть цю підказку.

К-ть **нахилених квадратів у сітці 7×7**:

$7^2 \cdot 0 + 6^2 \cdot 1 + 5^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 3 + 3^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 6 = \mathbf{196}$

К-ть **усіх квадратів у сітці 6×6**:

$6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 +$

$6^2 \cdot 0 + 5^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 5 = \mathbf{196}$

Цей результат справедливий і в загальному випадку:

Кількість усіх квадратів у сітці n×n дорівнює кількості всіх нахилених квадратів у сітці (n+1) × (n+1).

Отже, між ними має бути деяка взаємно-однозначна відповідність!

Чи можете ви встановити природну взаємно-однозначну відповідність між множиною всіх квадратів сітки n×n і множиною нахилених квадратів сітки (n+1) × (n+1)?

Sunflower Bluebird Спецкурс
математики

Заняття 1

На цьому занятті простий аркуш паперу в клітинку є благодатним підґрунтям для запитань, що ведуть до комбінаторних міркувань, скінченних арифметичних рядів, алгебраїчних тотожностей, теореми Піфагора тощо.

Додаткові задачі

1. Скільки є прямокутників, чиї сторони лежать на лініях сітки, у області 7×7? А в n×n?

2. Знайдіть у явному вигляді формулу загальної кількості:

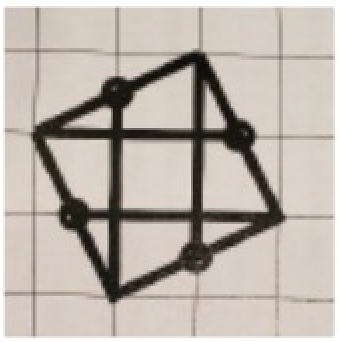
   2a. всіх правильних квадратів у сітці n×n;

   2b. всіх нахилених квадратів у сітці n×n;

   2c. всіх квадратів (правильних і нахилених) у сітці n×n.

3. Кількість усіх квадратів у сітці n×n є тим самим числом, що й кількість нахилених квадратів у сітці (n+1)×(n+1). Це означає, що є деяка взаємно-однозначна відповідність між множиною всіх квадратів сітки n×n і множиною нахилених квадратів сітки (n+1)×(n+1). Побудуйте цю відповідність явно.

4. З'єднайте вершини квадрата по колу з серединами протилежних сторін (див. рисунок). Ці чотири відрізка формують внутрішній чотирикутник всередині початкового квадрата.



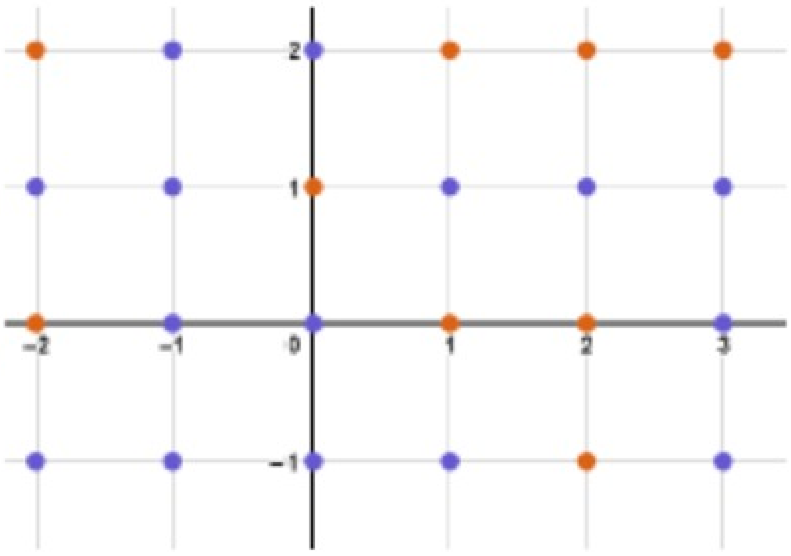
   4a. Що це за чотирикутник?

   4b. Яку частину площі початкового квадрата він займає?

   4c. Середина кожної зі сторін ділить сторону на два відрізки, співвідношення яких дорівнює 1:1. Що станеться, якщо розділити кожну зі сторін не на рівні дві частини, а на частини, що відносяться, як a:b?

5. Уявіть, що кожен вузол нескінченної сітки фарбується одним із заданого набору кольорів.

   5a. Якщо кожне ціле число числової прямої розфарбувати одним із двох кольорів, то чи можна зробити так, щоб не було трьох однокольорових чисел, що формують арифметичну прогресію?



   5b. Якщо кожен вузол нескінченної сітки фарбується в один із двох кольорів, чи можливо уникнути появи трьох точок одного кольору, що формують рівнобедрений прямокутний трикутник? Що якщо можна використовувати три кольори, а не два?

   5c. Припустимо, що, знову, нескінченна сітка розфарбовується двома кольорами. Чи можна це зробити так, щоб жодні чотири однокольорові точки не формували квадрат?

Арифметична прогресія

Числова послідовність задана, якщо будь-якому натуральному числу «n» поставлене у відповідність деяке число «a_n».

Приклади:

1; 3; 5; 7; ...;
-5; -4.5; -4; -3.5; -3; ...;

Послідовність задають за допомогою формули «n-го» члена, тоді неважко обчислити будь-який його член.

Послідовність («a_n») задана формулою:

$a_n = n^3$; $n \in N$; 1 ($1^3 = 1$); 8 ($2^3 = 8$); 27 ($3^3 = 27$); 64 ($4^3 = 64$); ...;

Послідовності бувають скінченні і нескінченні. Послідовність («a_n») називається зростаючою або спадною, якщо для будь-якого номера «n» справджується нерівність: «$a_{n+1} > a_n$» для зростаючої та «$a_{n+1} < a_n$» для спадної, «a_n» - попередній член, «a_{n+1}» - наступний член послідовності.

$$a_n = a_1 + d(n - 1); n \in N$$

$$a_n = a_k + d(n - k); n > k; n, k \in N$$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, де\ n \geq 2; n \in N$$

Числова послідовність («a_n»), кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додане одне й те саме число, називається арифметично прогресією. Це число позначають буквою «d» і називають різницею арифметичної прогресії.

Різниця арифметичної прогресії («d») знаходиться так: «$d = a_{n+1} - a_n$», тобто, різницю арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній.

1; 3; 5; 7; 9; ... — зростаюча арифметична прогресія, де «$a_1 = 1$»; «$d = 2$», оскільки «$3 - 1 = 2$», «$5 - 3 = 2$».

30; 25; 20; 15; 10; 5; ... - спадна арифметична прогресія, де «$a_1 = 30$»; «$d = -5$», оскільки «$25 - 30 = -5$».

Також можна знайти будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох рівновіддалених членів, тобто:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}; де\ k < n; n \geq 2; n \in N$$

Дану формулу можна записати трішки в простішому вигляді:

$$a_n = \frac{a_m + a_k}{2}; де\ n = \frac{m + k}{2}; n \geq 2; n, m, k \in N$$

Приклад: $a_3 = 10$; $a_5 = 14$; $a_4 = ?$

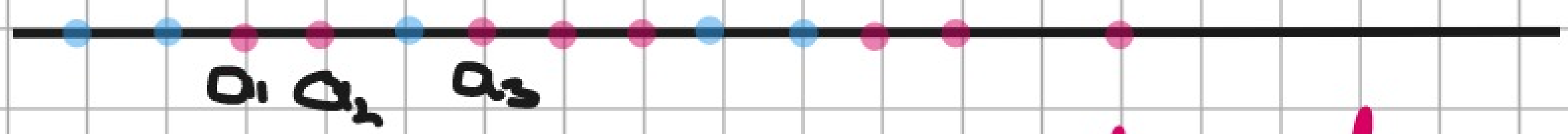
$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}; a_4 = \frac{10 + 14}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

Будь-яку арифметичну прогресію можна задати формулою:

«$a_n = dn + b$», де «d» і «b» - деякі числа.

Послідовність «a_n», задана формулою «n-го» члена **«$a_n = dn + b$»**, де «d» і «b» - деякі числа, є арифметичною прогресією.

5а. Якщо кожне ціле число числової прямої розфарбувати одним із двох кольорів, то чи можна зробити так, щоб не було трьох однокольорових чисел, що формують арифметичну прогресію?



$a_n = d \cdot n + b$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}; де\ k < n; n \geq 2; n \in N$$

Додаткові задачі

1. Скільки є прямокутників, чиї сторони лежать на лініях сітки, у області 7×7? А в n×n?
2. Знайдіть у явному вигляді формулу загальної кількості:

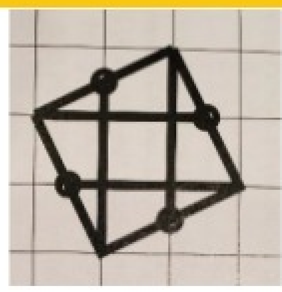
   2a. всіх правильних квадратів у сітці n×n;

   2b. всіх нахилених квадратів у сітці n×n;

   2c. всіх квадратів (правильних і нахилених) у сітці n×n.

3. Кількість усіх квадратів у сітці n×n є тим самим числом, що й кількість нахилених квадратів у сітці (n+1)×(n+1). Це означає, що є деяка взаємно-однозначна відповідність між множиною всіх квадратів сітки n×n і множиною нахилених квадратів сітки (n+1)×(n+1). Побудуйте цю відповідність явно.

4. З'єднайте вершини квадрата по колу з серединами протилежних сторін (див. рисунок). Ці чотири відрізка формують внутрішній чотирикутник всередині початкового квадрата.

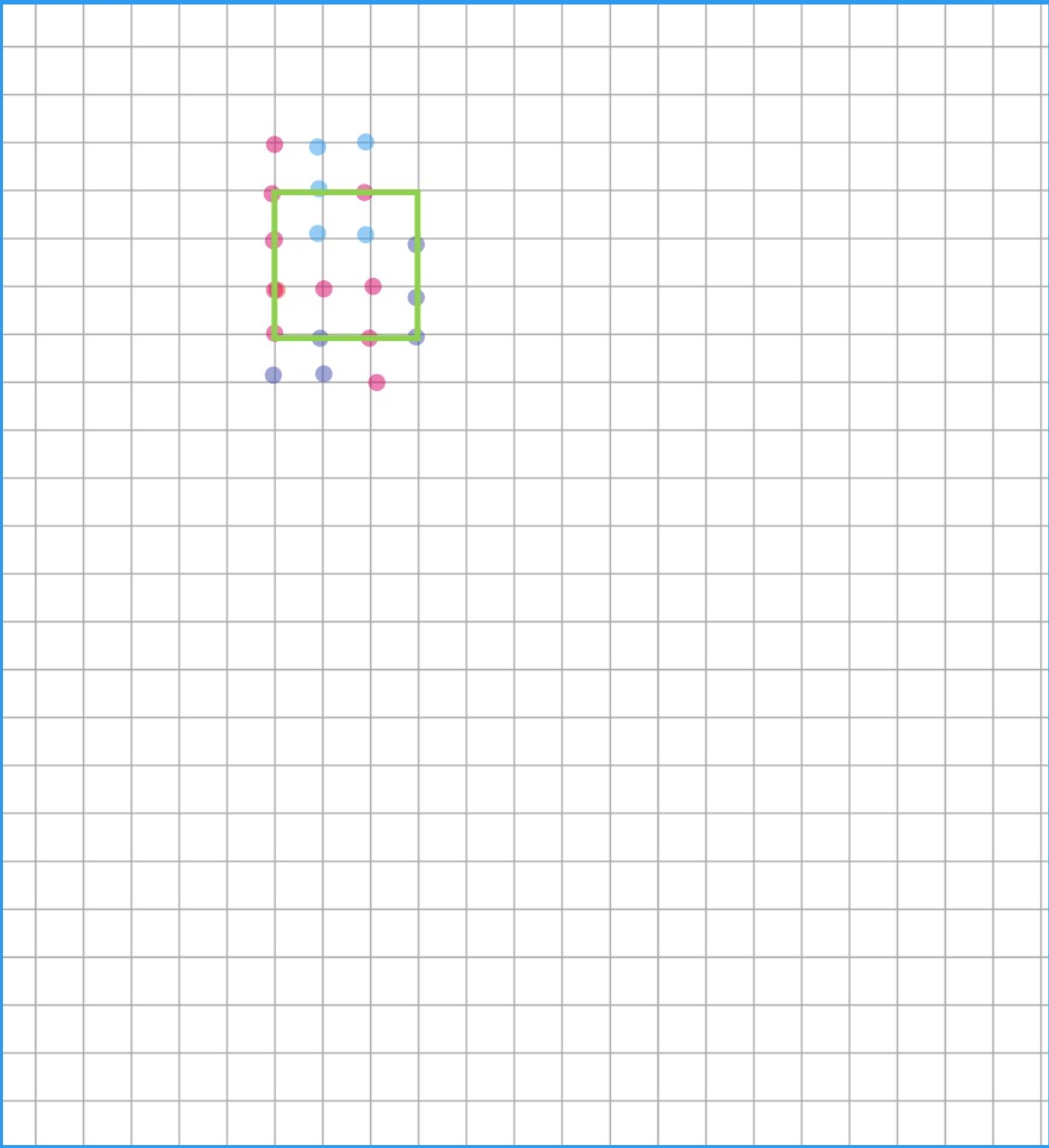


   4a. Що це за чотирикутник?

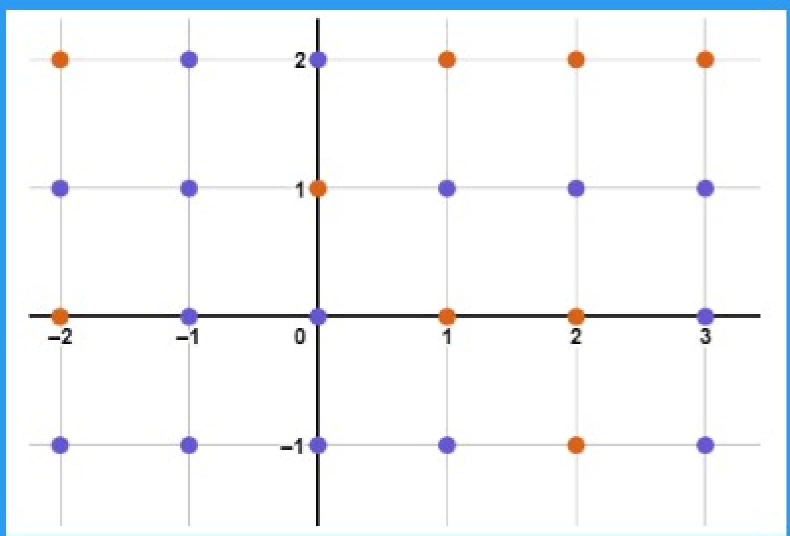
   4b. Яку частину площі початкового квадрата він займає?

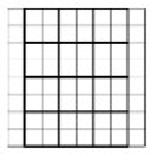
   4c. Середина кожної зі сторін ділить сторону на два відрізки, співвідношення яких дорівнює 1:1. Що станеться, якщо розділити кожну зі сторін не на рівні дві частини, а на частини, що відносяться, як a:b?

5c. Припустимо, що, знову, нескінченна сітка розфарбовується двома кольорами. Чи можна це зробити так, щоб жодні чотири однокольорові точки не формували квадрат?



5b. Якщо кожен вузол нескінченної сітки фарбується в один із двох кольорів, чи можливо уникнути появи трьох точок одного кольору, що формують рівнобедрений прямокутний трикутник? Що якщо можна використовувати три кольори, а не два?





Информация о задаче

Клетки бумажного квадрата 8×8 раскрашены в два цвета. Докажите, что Арсений может вырезать из него по линиям сетки два квадрата 2×2, не имеющих общих клеток, раскраски которых совпадают. (Раскраски, отличающиеся поворотом, считаются ра...

ГОТУЄМОСЯ ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ОЛІМПІАДИ

МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ КОНКУРС «КЕНГУРУ — 2001»

І.М.МІТЕЛЬМАН

РОЗФАРБУЄМО КЛІТЧАСТУ ДОШКУ

Умова

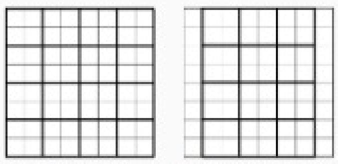
Автори: [illegible]

Клітини паперового квадрата 8×8 розфарбовані у два кольори. Доведіть, що Арсен може вирізати з нього по лініях сітки два квадрати 2×2, які мають загальних клітин, розмальовки яких збігаються. (Розмальовки, що відрізняються поворотом, вважаються різними.)

Рішення

Перше рішення. Припустимо, що вирізати такі два квадрати Арсенію не вдається. Це означає, що будь-які два квадрати, що збігаються за розмальовкою, перетинаються хоча б однією клітиною.

Розіб'ємо наш квадрат на 16 квадратів 2×2, як зазначено малюнку; всі вони мають бути розфарбовані по-різному. Оскільки всього різних способів розфарбувати квадрат 2×2 у два кольори рівно 16, то всі розмальовки серед них є по одному разу.



Тепер виділимо 12 квадратів-«нащадків» 2×2, відмічених на другому малюнку, кожен з яких перетинається з двома квадратами-«батьками» першого розбиття, зістикованими горизонтально. Зауважимо, що кожен «нащадок» збігається за розмальовкою з одним із «батьків» (оскільки він повинен збігтися з одним із квадратів першого розбиття і він не може збігтися з тими, з якими він не перетинається).

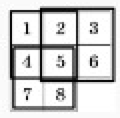
Але якщо два квадрати, зміщені один щодо одного на одну клітинку по горизонталі, збігаються за розмальовкою, то їх верхні клітини повинні бути одного кольору та їх нижні клітини теж одного кольору. Це дає всього чотири варіанти розмальовки для таких квадратів-нащадків. Але всього їх 12, отже, якісь з них збігатимуться за розмальовкою; при цьому всі вони попарно не перетинаються. Протиріччя.

Друге рішення. Як і в попередньому рішенні, припустимо, що вирізати такі два квадрати Арсенію не вдалося.

Розглянемо все 49 квадратів 2×2. Так як всього можливих розмальовок таких квадратів 16, то за принципом Діріхле деякі четвірки квадратів збігаються за розмальовкою.

Зауважимо, що більш ніж 4 квадрата за розмальовкою збігтися не можуть. Дійсно, в цьому випадку або їх вертикальні координати, або горизонтальні набувають хоча б трьох різних значень, тобто у двох квадратів одна з координат відрізняється хоча б на 2 (Для визначеності можна розглядати координати центрів квадратів). Такі квадрати перетинатися не можуть.

Аналогічні міркування дозволяють помітити, що три чи чотири квадрати з однаковим розфарбуванням обов'язково повинні мати загальну клітину.



Розглянемо деяку трійку квадратів з однаковим розфарбуванням. Без обмеження спільності вважатимемо, що вони розташовані так, як на малюнку. Тоді із збігу розмальовок випливає, що клітини 1, 2, 4 мають однаковий колір; аналогічно з трійками клітин $\{2, 3, 5\}$, $\{4, 5, 7\}$, $\{5, 6, 8\}$. Виходить, що у всіх цих клітин один і той самий колір.

Зрозуміло, що для чотирьох квадратів з однаковим розфарбуванням висновок буде аналогічним. Це означає, що в трійці або четвірці квадратів з розфарбуванням вони всі або повністю першого кольору, або повністю другого. Значить, решта 14 способів розфарбувати квадрат 2×2 можуть бути представлені не більше ніж 2 екземплярами.

Тоді всього квадратів 2×2 не більше $2 \cdot 4 + 14 \cdot 2 = 36$. Але їх 49. Протиріччя.

Джерела та прецеденти використання

олімпіада Назва Московська математична олімпіада рік Номер 84 Рік 2021 клас Клас 9 завдання Номер 2

Подання чисел у вигляді суми двох квадратів

Питання про подання чисел у вигляді суми двох квадратів - дуже старе питання; воно розглядається ще в "Арифметиці" Діофанта (біля 250 року нашої ери), але точний сенс тверджень Діофанта неясний. Правильну відповідь на це питання уперше дав німецький математик Жирар (Albert Girard) в 1625 році і трохи пізніше Ферма. Можливо, що у Ферма був доказ його результату, але першим з відомих нам доказів є доказ Ейлера, опублікований в 1749 році.

Легко встановити, що деякі числа не представляються у вигляді суми двох квадратів. По-перше, квадрат будь-якого парного числа порівнянний з 0 по mod 4, а квадрат будь-якого непарного числа порівнянний з 1 по mod 4. Звідси витікає, що сума будь-яких двох квадратів порівняна з 0+0, або з 0+1, або з 1+1 по mod 4, тобто з 0, 1 або 2 по mod 4. Таким чином, жодне число виду 4k+3 не представляється сумою двох квадратів.

0
1

0 0
0 1
1 0
1 1

0, 1
2

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a-b \,\vdots\, m$

$5 \equiv 15 \pmod{2}$

$5 \equiv 1 \pmod{2} \Rightarrow 5-15=-10 : 2$

$15 \equiv 1 \pmod{2}$

mod = m = 4

−8	−7	−6	−5
−4	−3	−2	−1
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
$K_0^{(4)}$	$K_1^{(4)}$	$K_2^{(4)}$	$K_3^{(4)}$

$-1 \equiv 3 \pmod{4}$

$3-(1)=4 : 4$

$\mathbb{Z}$ (:2)

0	1
−4	−3
−2	−1
0	1
2	3
4	5
2k	2k+1
„п"	„неп"

$(2k)^2 = 4 \cdot k^2 : 4$

$(2k+1)^2 = \underbrace{4k^2+4k}_{:4}+1$ → 1

$a = b \cdot q + r$

$0 \le r < b$

TANIYAMA CONJECTURE AND FERMAT LAST THEOREM

Yu. P. SOLOV'EV

The aim of this article is to present an introduction to the circle of ideas which form the background for the recent proof of Fermat Last Theorem: elliptic curves, modular forms, Frey's construction and the Taniyama conjecture.

Статья представляет собой введение в круг понятий и идей, на основе которых было получено доказательство последней теоремы Ферма: эллиптические кривые, модулярные формы, конструкция Фрея и гипотеза Таниямы.

ГИПОТЕЗА ТАНИЯМЫ И ПОСЛЕДНЯЯ ТЕОРЕМА ФЕРМА

Ю. П. СОЛОВЬЕВ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Нет ни одной математической проблемы, которая была бы столь популярна, как знаменитая последняя теорема Ферма [1]. Ее автор, Пьер Ферма (1601–1665), еще при жизни был признан одним из величайших математиков Европы. Сегодня имя Ферма неотделимо от теории чисел, однако его теоретико-числовые работы были настолько революционны и так опережали свое время, что их значение не было понято современниками и слава Ферма основывалась главным образом на его достижениях в других областях математики: ему принадлежат важные труды по аналитической геометрии (наряду с Декартом Ферма был одним из создателей этой науки), по теории максимумов и минимумов функций, впоследствии развившейся в математический анализ, и по геометрической оптике.

Свои научные результаты Ферма не публиковал. Будучи по профессии юристом, он посвящал математике лишь свободное время и не рассматривал ее как главное дело своей жизни. О сделанных им открытиях известно из его переписки с другими учеными, а также из бумаг, оставшихся после его смерти. В частности, на полях своего экземпляра "Арифметики" Диофанта, великого классического произведения древнегреческой математики, в 1621 году переведенного на латинский язык, Ферма оставил 48 замечаний, содержащих открытые им факты о свойствах чисел.

Доказательства Ферма до нас не дошли, однако в тех случаях, когда он утверждал, что доказал ту или иную теорему, впоследствии эту теорему удавалось доказать. Единственным исключением является следующее утверждение: "Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullum in infinitum ultra quadratum potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet" ("Невозможно разложить куб на два куба, или биквадрат на два биквадрата, или вообще степень, большую двух, на две степени с тем же самым показателем; я нашел этому поистине чудесное доказательство, однако поля слишком узки, чтобы оно здесь вместилось.").

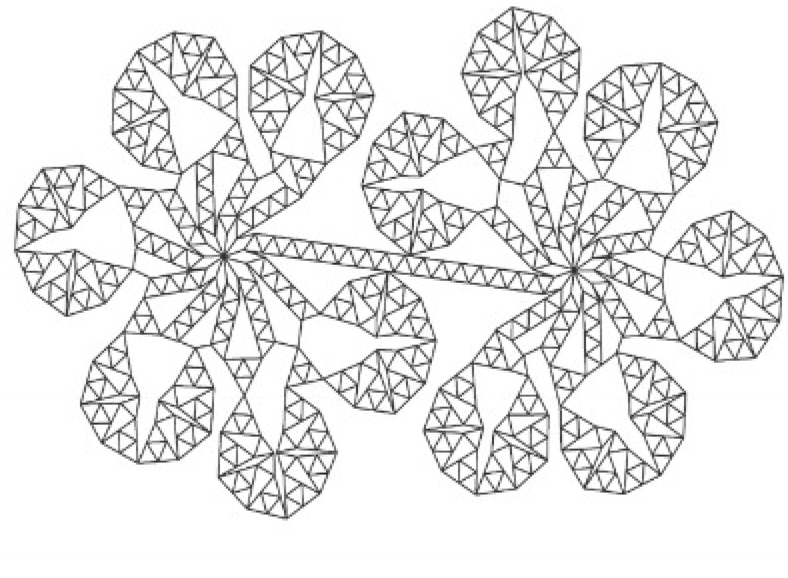
Этот текст, сопровождаемый указанием: "Наблюдение господина Пьера де Ферма", содержится в издании трудов Диофанта, которое было выпущено Ферма-сыном в 1670 году, через 5 лет после смерти отца. Это подлинное замечание, внесенное Ферма

ISSN 2524-2407 (online), ISSN 1029-4171 (print)

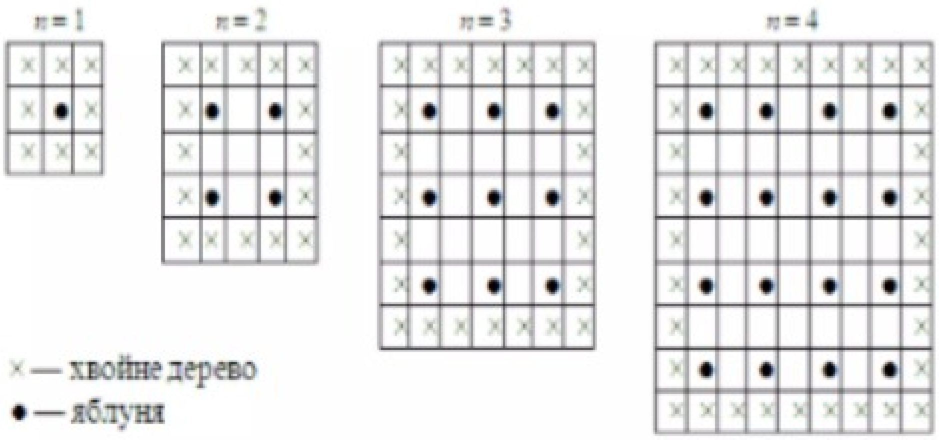
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У світі математики

2017 р., т. 23



Фермер на садовій ділянці висаджує яблуні у формі квадрата, як показано на малюнку. Для захисту яблунь від вітру він саджає по краях ділянки хвойні дерева. Нижче на малюнку зображені схеми посадки яблунь і хвойних дерев для декількох значень n, де n – кількість рядів висаджених яблунь. Цю послідовність можна продовжити для будь-якого числа n.



Запитання 1:
Заповніть таблицю

n	Кількість яблунь	Кількість хвойних дерев
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

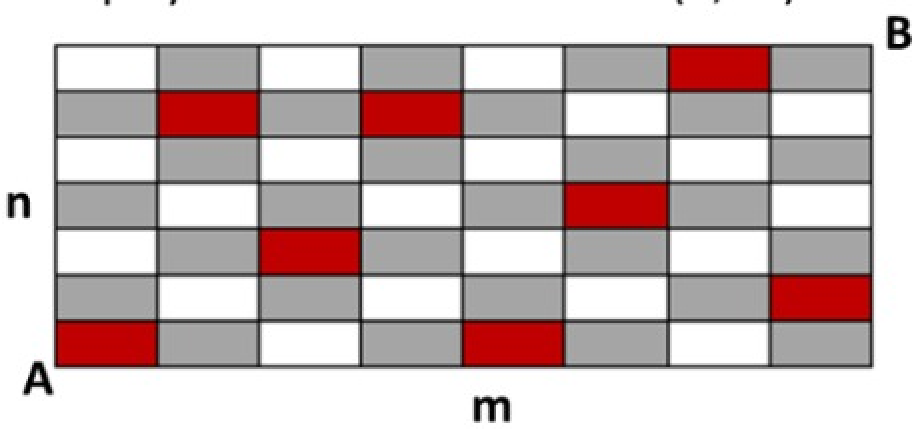
Відповідь:

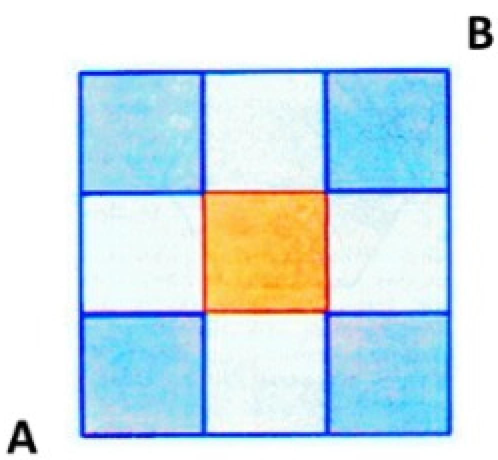
n	Кількість яблунь	Кількість хвойних дерев
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40

Кількість шляхів у цілочисельній сітці квадрату nxn із точки A в точку B, якщо рухатися або вправо або вгору.

Формула кількості шляхів: $K(n)=2^{n\times n}$

Формула кількості шляхів: $K(n; m)=2^{n\times m}$





$K(n)=2^{3\times 3}=512$