



11. **STRENGTHENING THE FOUNDATION**  
The foundation of any successful business is a strong and clear mission statement. This statement should define the company's purpose, its core values, and its long-term goals. It should be concise, memorable, and inspiring, serving as a guiding light for all business decisions and actions.

**12. BUILDING A STRONG TEAM**  
A strong team is the backbone of any successful business. To build a strong team, you need to attract, hire, and retain top talent. This involves creating a positive work environment, providing opportunities for growth and development, and fostering a culture of collaboration and innovation.

**13. FOCUSING ON CUSTOMER SERVICE**  
Customer service is a key differentiator for many businesses. Providing excellent customer service can lead to increased customer loyalty, repeat business, and positive word-of-mouth referrals. To focus on customer service, you need to listen to your customers, understand their needs, and provide timely and effective solutions. This involves training your staff, implementing a customer service strategy, and continuously improving your service quality.

**14. MONITORING AND ADJUSTING**  
Business is a dynamic environment, and you need to be able to monitor and adjust your strategy as needed. This involves regularly reviewing your financial performance, market trends, and customer feedback. You should be prepared to make changes to your strategy, operations, or products when necessary to stay competitive and successful.

*An axiomatic approach to the group definition, one of the most important in mathematics, is given. The definitions are accompanied by clear examples and exercises that are useful for optional classes at high school. A new proof of the Cauchy theorem is found not to be beyond the scope of the high-school mathematical programs.*

Представлен аксиоматический подход к понятию группы – одному из важнейших в математике. Приводимые определения сопровождаются простыми примерами и упражнениями, полезными для факультативных занятий в школе. Чтобы сделать материал не выходящим за рамки школьной программы, для теоремы Коши найдено элементарное доказательство.

## ГРУППОВЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Московский государственный университет  
им. М.В. Ломоносова

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Используемые в математике алгебраические операции равноправны с численными на арифметических действиях с числами. В статье [1] мы обратили внимание на важную роль усвоения симметрий геометрических фигур или многоугольников от нескольких предметов. Такого рода пронаблюдания естественно изучать в контексте групп преобразований. Теперь мы переходим к общему понятию группы, которое оказалось одним из центральных в современной математике. На этот раз основной акцент делается на аксиоматическом подходе и его возможности. Не забывая о примерах, мы коротко начинаем в разделе 2 аксиоматическое определение, чтобы читатель мог ознакомиться с следующей статьей независимо от предыдущей. По-прежнему не предполагаем никаких знаний вне рамок школьной программы.

### 2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Начнем с примера. Сколько существует различных поворотов в трехмерном пространстве, сохраняющих куб (рис. 1) с самим собой? Перечислите такие повороты. Во-первых, мы всегда учитываем тождественное преобразование, при котором каждая точка остается на своем месте. Во-вторых, прокрутите ось  $AB$  через середину противоположных граней, на один из трех различных взаимодополнительных поворотов около этой оси на углы  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ . (У куба три такие оси.) В-третьих, около диагонали  $J-K$  куб можно поворачивать на  $120^\circ$  и  $240^\circ$ . (Никогда еще три такие диагонали:  $J-K$ ,  $J'-J''$  и  $K'-K''$ .) Наконец, около оси  $CD$ , проходящей через середины противоположных ребер, куб можно поворачивать на

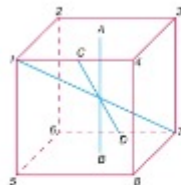


Рис. 1.

## BOOLEAN ALGEBRAS AND BOOLEAN-VALUED MODELS

A. G. KUSRAEV

*The subject of this paper is classical algebraic structure – Boolean algebra and its importance in contemporary mathematical science. Boolean algebra can be considered as a real bridge between different mathematical disciplines. Boolean-valued models have proven to be a powerful machinery for independence proofs in the sets theories and simultaneously as a basis for development of a new mathematical theory, so-called Boolean-valued analysis.*

Обсуждается классическая алгебраическая структура – булева алгебра и ее значение для современной математической науки. Показано, что булевы алгебры можно рассматривать как мост между различными математическими дисциплинами. Булевозначные модели оказались удачным инструментом для доказательства независимости в теории множеств и одновременно основой для развития новой математической теории – булевозначного анализа.

## БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ И БУЛЕВОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ

А. Г. КУСПРАЕВ

Сахаровский государственный университет  
им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ

### ВВЕДЕНИЕ

Теория булевых алгебр берет свое начало от классического сочинения Джорджа Буля “Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и теории вероятностей”, изданного в 1854 году. Цель и задача этой книги автор сформулировал так: “В предлагаемом изложении читателей трактате мы намерены исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод”. Следуя такой установке, Дж. Буль провел по существу алгебраизацию той логической системы, которая лежит в основе классических математических рассуждений. Таким образом возникла алгебраическая структура, именуемая ныне *алгеброй Буля* или *булевой алгеброй*.

Булевы алгебры имеют многочисленные связи с многими важнейшими направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяется той существенной ролью, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и комбинаторике. Живое и увлекательное о булевых алгебрах рассказано в книге [1] (см. также цитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга [2]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях [3, 4]. Здесь мы коротко остановимся на внутриматематических применениях булевых алгебр, затронув также новый способ булевозначного моделирования, который привел к значительному прогрессу в исследованиях по логическим основаниям самой математики.

### БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Множество  $X$  называют (частично) упорядоченным, если для некоторых пар его элементов  $x$  и  $y$  определено отношение порядка  $\leq$  так, что выполнены условия: 1)  $x \leq x$  (рефлексивность); 2) если  $x \leq y$  и  $y \leq z$ , то  $x \leq z$  (транзитивность); 3) если  $x \leq y$  и  $y \leq x$ , то  $x = y$  (антисимметричность), какими бы ни были элементы  $x, y \in X$ . Элемент  $y \geq x$  означает, что  $x \leq y$ .

Под  $A$  вводится часть  $X$ . Элемент  $x$  называют *мажорой* (супремум) *элементов* множества  $A$ , если  $x \geq y$

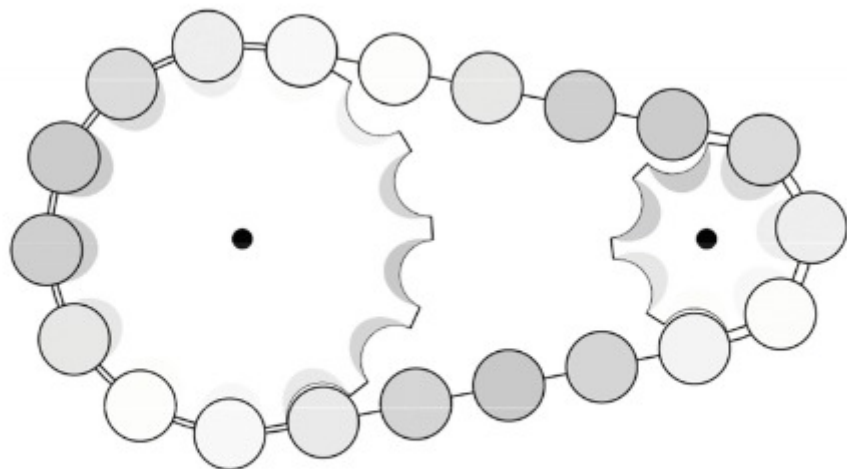
ISSN 2524-2407 (online), ISSN 1029-4171 (print)

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

у

# світі математики

2018 р., т. 2(24)



12.11.2021

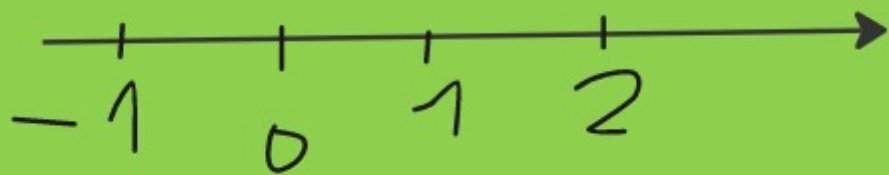
Математичний гурток. Заняття №1

## Матриці $2 \times 2$

### та їх застосування

**Керівник Воробйова А.І.**

засідувач відділенім матемстики Миколаївського тв МАН  
кандидат фіз-мат наук, доцент кафедри інтелектуальних  
інформаційних систем, секція прикладної та вищої  
математики, ЧНУ ім. Петра могили



$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; b \neq 0 ; a \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \{\pi; e; \dots; \sqrt{3}; \sqrt{11}\}$$

$\pi$

$$\frac{c}{d} \in \mathbb{R}$$

$$\pi = \frac{c}{d}$$





## THE EFFECTS OF STRESS

Stress is a natural response to a perceived threat or challenge. It can be both helpful and harmful, depending on the situation and the individual's ability to cope. Chronic stress can lead to a variety of health problems, including high blood pressure, heart disease, depression, and anxiety.

Stress can also affect your immune system, making you more susceptible to illness. It can also interfere with your ability to think clearly and make decisions. If you're feeling stressed, it's important to take steps to manage it. This might include exercise, meditation, or talking to a professional.

## MANAGING STRESS EFFECTIVELY

There are several strategies you can use to manage stress effectively:

- 1. **Exercise:** Regular physical activity can help reduce stress and improve your mood.
- 2. **Meditation:** Mindfulness meditation can help you focus on the present moment and reduce stress.
- 3. **Deep Breathing:** Taking deep breaths can help calm your mind and reduce stress.
- 4. **Time Management:** Prioritizing your tasks and setting realistic deadlines can help reduce stress.
- 5. **Support:** Talking to a friend or family member can help you feel less alone and more supported.

Remember, stress is a natural part of life, but it doesn't have to control you. By using these strategies, you can take control of your stress and live a healthier, more balanced life.

## О НЕРАЗРЕШИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ И ТЕОРИИ ГРУПП

В. Г. ЗВЯГИН

Воронежский государственный университет

### ON NONSOLVABILITY OF ALGEBRAIC EQUATIONS IN RADICALS AND THE GROUP THEORY

V. G. ZVYAGIN

*Some ideas and results of group theory are explained and the way to reduce the problem of solvability in radicals of algebraic equation of  $n$ -th degree by one variable to some results of the group theory is shown. An example of how such equation can be solved using them is presented.*

Даны некоторые понятия и результаты теории групп и показана, каким образом проблема разрешимости в радикалах алгебраического уравнения  $n$ -й степени связана с теорией групп и решается с ее помощью.

В курсе средней школы подробно изучают алгебраические уравнения с одним неизвестным 1-й и 2-й степеней. При этом оказывается, что для решения таких уравнений существуют общие формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов (для уравнений 2-й степени). Подобного типа формулы были установлены еще в XVI веке и для уравнений 3-й (Дж. Кардано) и 4-й (Л. Феррари) степеней. Долгое время математики пытались найти метод решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Однако в 1824 году норвежский математик Нильс Генрик Абель доказал следующую теорему: Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в радикалах, то есть не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, извлечения в натуральную степень и извлечения корня из натурального степени.

Цель статьи – познакомить читателя с рядом понятий и результатов теории групп и показать, каким образом проблема разрешимости в радикалах алгебраического уравнения  $n$ -й степени от одного неизвестного сводится к некоторой проблеме в теории групп и каким образом она там решается.

### ГРУППА

**Определение 1.** Группой называется множество  $G$  элементов произвольной природы, в котором любой упорядоченной паре  $(a, b)$  элементов этого множества поставлен в соответствие третий элемент, который мы будем обозначать символом  $a \cdot b$ , и при этом предполагаются выполненными следующие условия:

$$1) a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \text{ для любых } a, b, c \in G;$$

2) в  $G$  существует такой элемент  $e$ , называемый единичной группы  $G$ , для которого  $a \cdot e = e \cdot a = a$  для любого элемента  $a \in G$ .

## О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ГРУППАХ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

THE COMPUTATION COMPLEXITY  
IN GROUPS

A. Yu. OLSHANSKII

*Any group  $G$  can be described in terms of generators and relations. The key question is whether given two words in generators represent the same element of  $G$  or not. Examples, the setting of the algorithmic problem and formulations of some recent results on the complexity of the word problem for groups are given.*

*Любая группа  $G$  может быть задана с помощью порождающих элементов и соотношений между ними. При этом основным оказывается вопрос о существовании алгоритма для распознавания, представляют ли два слова от порождающих один и тот же элемент в  $G$  или нет. В статье приведены примеры, сформулирована проблема и описаны недавние результаты исследования сложности проблемы слов для групп.*

[www.issep.rssi.ru](http://www.issep.rssi.ru)

Группы появляются в математике вместе с симметриями и преобразованиями. Для знакомства с примерами и основными понятиями рекомендуем опубликованные в «Соросовском Образовательном Журнале» статьи [1, 2]. Напомним только, что всякая группа  $G$  является множеством, наделенным ассоциативной операцией  $a \cdot b$  для  $a, b \in G$  (элемент  $e = a \cdot b$  группы  $G$  называют обычно произведением элементов  $a$  и  $b$ ), причем выполнены аксиомы единичным (существует элемент  $e \in G$ , такой, что  $ae = ea = a$  для любого  $a \in G$ ) и обратного (для любого  $a \in G$  существует элемент  $b = a^{-1} \in G$ , такой, что  $ab = ba = e$ ). Из аксиом непосредственно следует единственность единичным и единственность обратного для всякого  $a \in G$ . Некоторые другие особенности групповых исчислений обсуждаются в [2].

Для эффективного вычисления произведений в группе  $G$  должен быть какой-то единообразный способ описания ее элементов. Во многих группах (так называемых группах Ли) эта задача решается с помощью задания локальной (а иногда глобальной) системы координат. Характерным примером является группа всех движений трехмерного евклидова пространства, где каждое движение задается шестью параметрами в соответствии с нашим представлением о шести степенях свободы твердого тела в пространстве.

Но есть и другие группы, устроенные дискретно в том смысле, что в малой окрестности элемента группы других элементов вообще нет (см. примеры ниже). В статье речь пойдет об универсальном способе задания элементов любой группы в виде слов от порождающих. Мы затронем основной вопрос, возникающий в исчислении слов, — проблему распознавания равенства слов в группе.

## ПОРОЖДАЮЩИЕ

Начнем с примеров.

1. Вообразим неограниченный лист клетчатой бумаги, клетки которого — единичные квадраты и который покрывает всю евклидову плоскость. Пусть  $G_1$  — группа всех параллельных переносов плоскости вдоль себя (или сдвигов), сохраняющих данную клетчатую

## WHAT A SEMIGROUP IS

L. N. SHEVRIN

*The paper presents the concept of semigroup and numerous examples of semigroups. Isomorphisms between semigroups are considered and, in particular, a well-known fundamental fact is proved that each semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations.*

**Статья знакомит с понятием полугруппы и многочисленными примерами полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается хрестоматийный факт, что всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.**

## ЧТО ТАКОЕ ПОЛУГРУППА

Л. Н. ШЕВРИН

Уральский государственный университет, Екатеринбург

... Я приветствую полугруппу, где бы я ее ни встретил, а встречается она повсюду. Впрочем, от друзей я слышал, что в математике попадают объекты, отличные от полугруппы.

Эйвар Хилле

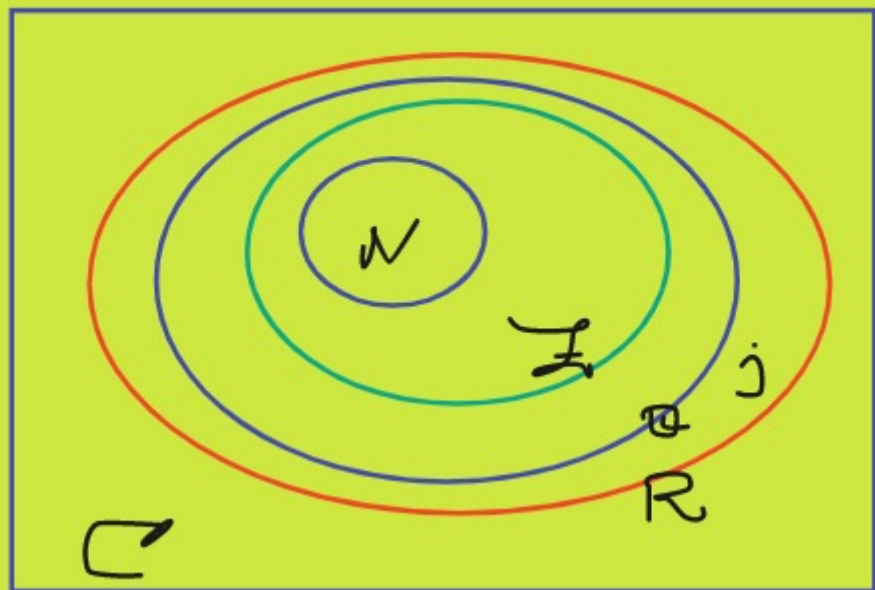
## ВВЕДЕНИЕ

Высказывание, воспроизведенное в эпиграфе, принадлежит известному американскому математику Э. Хилле и содержится в предисловии к первому изданию его фундаментальной монографии "Функциональный анализ и полугруппы"<sup>1</sup>. Рассматриваемые в указанной монографии полугруппы — это главным образом разного рода полугруппы линейных операторов пространств, и изучаемых в функциональном анализе. Соответствующая теория — аналитическая теория полугрупп возникла в 40-х годах. В ту пору, как писал Хилле в упомянутом предисловии, она представляла собой "недавнее попадание все время растущей сферы математических дисциплин"; теперь это одна из важнейших частей функционального анализа. Вообще же понятие полугруппы — чисто алгебраическое понятие, ставшее основой развития большой области современной алгебры и участвующее в разнообразных приложениях алгебры, в том числе в приложениях в теории автоматов, теории кодов, математической лингвистике и многих других областях, включая даже биологию и социологию.

Исходные понятия теории полугрупп и простейшие свойства полугрупп достаточно элементарны и вполне доступны школьникам старших классов. Более того, можно сказать, что с полугруппами встречается, не подозревая этого, уже першоклассник, и затем они сопровождают учащихся на протяжении всех лет обучения в школе. Полугруппы поистине всездущи, и то, что, говоря словами Хилле, они встречаются повсюду, очень легко продемонстрировать, что мы и сделаем в настоящей статье.

Отметим, что некоторые примеры и свойства полугрупп (под углом зрения точности) приводились в статье автора [2]. В задуманном продолжении

<sup>1</sup> Переработанное и значительно расширенное второе издание подготовлено совместно с Р. Филдингсом [1]. Для любознательного читателя отметим во избежание недоразумения, что в русском переводе первого издания, вышедшего в 1951 году, фамилия автора *Hille* не только транскрибировалась как Хилл,



$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$= \left\{ \infty \right\}$$

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = x_n < 3$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2,25$$

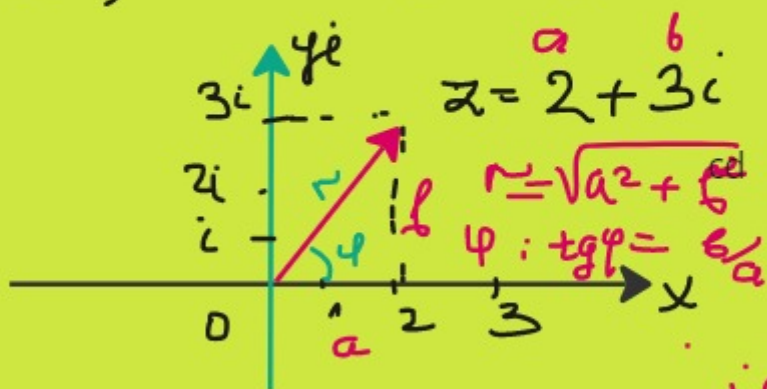
$$x_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2,59$$

$$x_{100} \approx 2,7048$$

$$x_{10000} \approx 2,7169$$

def  $z = a + bi$   $a, b \in \mathbb{R}$ .

$i = \sqrt{-1}$ ;  $i^2 = -1$  imaginär.



$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

$f(x)$



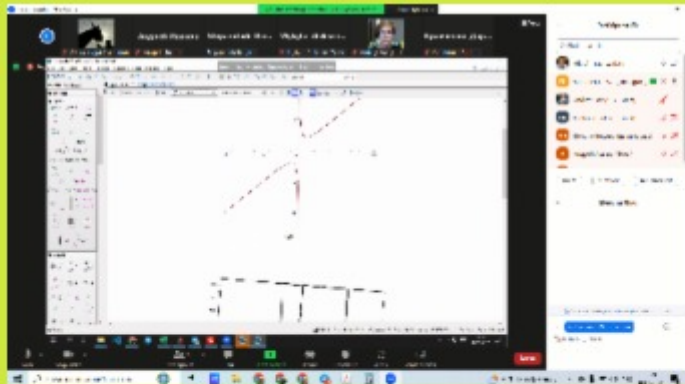
$$\Gamma = \{(x, y) \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$w(z) = \underbrace{u(x, y)}_{\operatorname{Re} w} + i \underbrace{v(x, y)}_{\operatorname{Im} w}$$

$$\Gamma = \{(x, y, z)\} \in \mathbb{R}^3$$

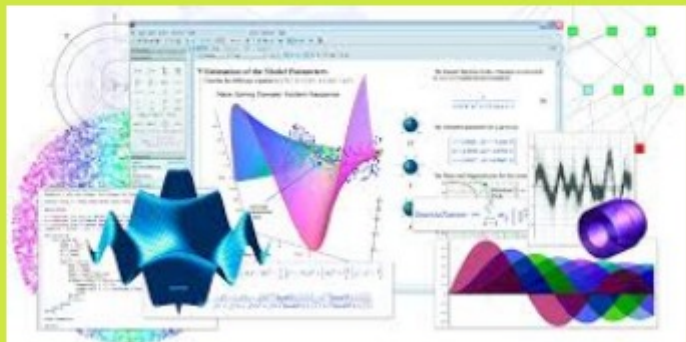






$$f(x, y, z) \rightarrow a \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

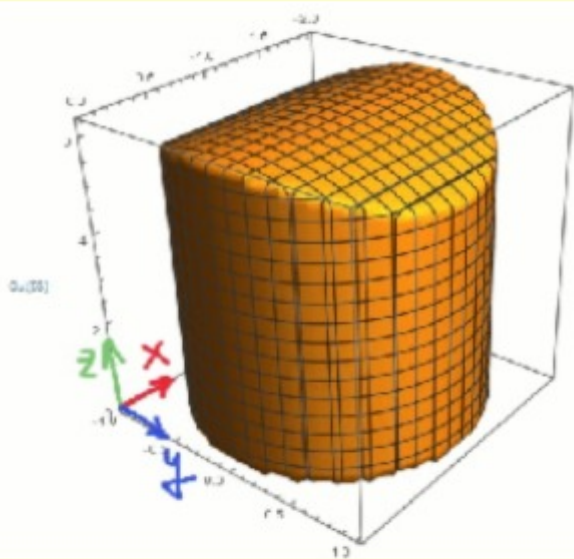
sin(2)



A screenshot of a Zoom meeting interface. The main window displays eight video thumbnails of participants arranged in a 3x3 grid (with the bottom-right cell empty). The participants are: top-left (man with headphones), top-middle (woman with blonde hair), top-right (man with glasses and headphones), middle-left (man with a red beanie), middle-middle (woman with dark hair), middle-right (man with a yellow beanie), bottom-left (woman with dark hair), and bottom-right (man with a white shirt and suspenders). The Zoom control bar at the bottom shows icons for mute, video, chat, and other functions. On the right side, there is a 'Teilnehmer' (Participants) list with 8 entries, each showing a profile picture, name, and status (e.g., 'online'). The Windows taskbar is visible at the very bottom.

A second screenshot of the same Zoom meeting, showing the same eight participants in the same grid layout. The interface elements, including the control bar and the 'Teilnehmer' list on the right, are identical to the first screenshot. The Windows taskbar is also visible at the bottom.

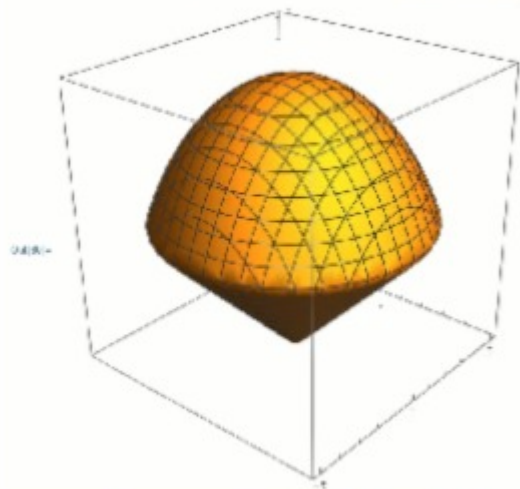
$$0. \quad x^2 + y^2 + 2x = 0,$$
$$z = 25/4 - y^2, \quad z = 0.$$



```

r1 = RegionPlot3D[x^2 + y^2 < 36, x^2 + y^2 <= z^2, {x^2 + y^2} / 36 <= z <= 6
(* Out[30]= RegionPlot3D[...
*)
*) {x, -20, 20}, {y, -20, 20}, {z, -40, 40}, PlotPoints -> 100, PlotRange -> All]

```



$$z^2 < 36 - x^2 - y^2$$

$$z^2 > \frac{x^2 + y^2}{3}$$

