[illegible]

GROUP CALCULUS

A. Yu. OL'SHANSKII

An axiomatic approach to the group definition, one of the most important in mathematics, is given. The definitions are accompanied by clear examples and exercises that are useful for optional classes at high school. A new proof of the Cauchy theorem is found not to be beyond the scope of the high-school mathematical programs.

Представлен аксиоматический подход к понятию группы – одному из важнейших в математике. Приводимые определения сопровождаются простыми примерами и упражнениями, полезными для факультативных занятий в школе. Чтобы сделать материал не выходящим за рамки школьной программы, для теоремы Коши найдено элементарное доказательство.

ГРУППОВЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

1. ВВЕДЕНИЕ

Используемые в математике алгебраические операции разнообразны и часто непохожи на арифметические действия с числами. В статье [1] мы обратили внимание на важную роль умножения симметрий геометрических фигур или многочленов от нескольких переменных. Такого рода произведения естественно изучать в контексте групп преобразований. Теперь мы переходим к общему понятию группы, которое оказалось одним из центральных в современной математике. На этот раз основной акцент делается на аксиоматическом подходе и его возможностях. Не забывая о примерах, мы коротко напоминаем в разделе 2 некоторые определения, чтобы читатель мог знакомиться с настоящей статьей независимо от предыдущей. По-прежнему не предполагаем никаких знаний вне рамок школьной программы.

2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Начнем с примера. Сколько существует различных поворотов в трехмерном пространстве, совмещающих куб (рис. 1) с самим собой? Перечислим типы таких поворотов. Во-первых, мы всегда учитываем *тождественное преобразование*, при котором каждая точка остается на своем месте. Во-вторых, проводя ось AB через середины противоположных граней, находим три различных нетождественных поворота около этой оси на углы 90°, 180° и 270°. (У куба три такие оси.) В-третьих, около диагонали *1–7* куб можно поворачивать на 120° и 240°. (Имеются еще три такие диагонали: *2–8*, *3–5* и *4–6*.) Наконец, около оси CD, проходящей через середины противоположных ребер, куб можно повернуть на

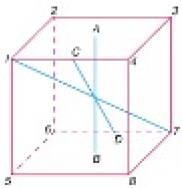


Рис. 1.

BOOLEAN ALGEBRAS AND BOOLEAN-VALUED MODELS

A. G. KUSRAEV

The subject of this paper is classical algebraic structure – Boolean algebra and its importance in contemporary mathematical science. Boolean algebra can be considered as a real bridge between different mathematical disciplines. Boolean-valued models have proven to be a powerfull machinery for independance proofs in the sets theories and simultaneously as a basis for development of a new mathematical theory, so-called Boolean-valued analysis.

Обсуждается классическая алгебраическая структура – булева алгебра и ее значение для современной математической науки. Показано, что булевы алгебры можно рассматривать как мост между различными математическими дисциплинами. Булевозначные модели оказались удачным инструментом для доказательства независимости в теории множеств и одновременно основой для развития новой математической теории – булевозначного анализа.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ И БУЛЕВОЗНАЧНЫЕ МОДЕЛИ

А. Г. КУСРАЕВ

Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова, Владикавказ

ВВЕДЕНИЕ

Теория *булевых алгебр* берет свое начало от классического сочинения Джорджа Буля "Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и теории вероятностей", изданного в 1854 году. Цель и задачи этой книги автор сформулировал так: "В предлагаемом вниманию читателей трактате мы намереваемся исследовать фундаментальные законы тех операций, которые совершает разум в процессе рассуждений, дабы выразить их в символическом языке исчисления и на этой основе построить науку логики и ее метод". Следуя такой установке, Дж. Буль провел по существу алгебраизацию той логической системы, которая лежит в основе классических математических рассуждений. Таким образом возникла алгебраическая структура, именуемая ныне *алгеброй Буля* или *булевой алгеброй*.

Булевы алгебры имеют многочисленные связи с многими важнейшими направлениями математической науки. Общетеоретическое и прикладное значение булевых алгебр определяется той существенной ролью, которую они играют в математической логике, теории вероятностей и кибернетике. Живо и увлекательно о булевых алгебрах рассказано в книге [1] (см. также цитированную там литературу). Для первоначального знакомства с теорией множеств, булевыми алгебрами и математической логикой может послужить книга [2]. Основательное изложение теории булевых алгебр имеется в монографиях [3, 4]. Здесь мы коротко остановимся на внутриматематических применениях булевых алгебр, затронув также новый способ булевозначного моделирования, который привел к значительному прогрессу в исследованиях по логическим основаниям самой математики.

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

Множество X называют *(частично) упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов x и y определено отношение порядка $\leq$ так, что выполнены условия: 1) $x \leq x$ *(рефлексивность)*; 2) если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$ *(транзитивность)*; 3) если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ *(антисимметричность)*, каковы бы ни были элементы x, y, z из X. Запись $y \geq x$ означает, что $x \leq y$.

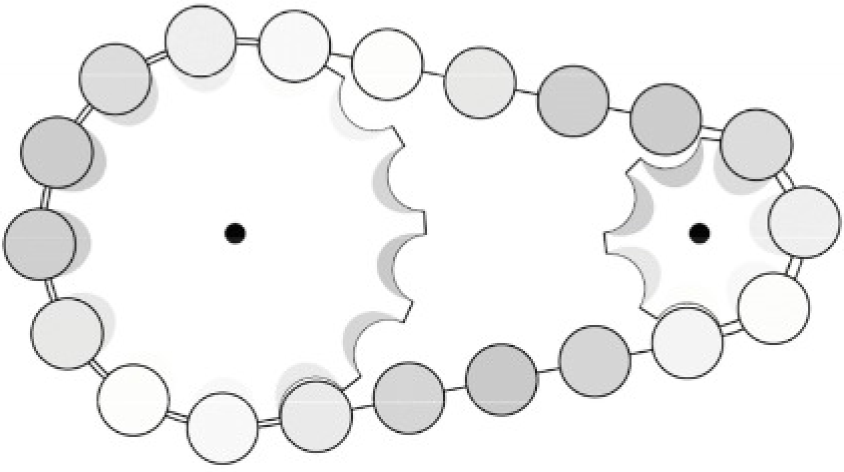
Пусть A является частью X. Элемент x называют *нижней (верхней) границей* множества A, если $x \leq y$

ISSN 2524-2407 (online), ISSN 1029-4171 (print)

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У світі математики

2018 р., т. 2(24)



МОЦНТТУМ

Миколаївське т/в МАН України

12.11.2021

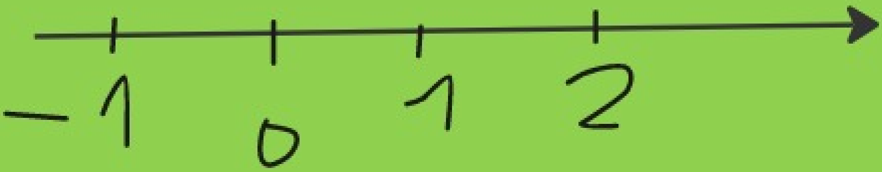
Математичний гурток. Заняття №1

Матриці 2х2

та їх застосування

Керівник Воробйова А.І.

завідувач відділенім математики Миколаївського тв МАН кандидат фіз-мат наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем, секція прикладної та вищої математики, ЧНУ ім Петра могили



$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3; -2; -1; 0, 1, 2 \ldots\}$

$\mathbb{R} \begin{cases} \mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} ; b \neq 0 ; a \in \mathbb{Z} \\ \mathbb{I} = \{ \pi ; e , \ldots \sqrt{3} ; \sqrt{11} \} \end{cases}$

π

$= 2\pi R$

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d}}$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

О НЕРАЗРЕШИМОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ И ТЕОРИИ ГРУПП

В. Г. ЗВЯГИН

Воронежский государственный университет

ON NONSOLVABILITY OF ALGEBRAIC EQUATIONS IN RADICALS AND THE GROUP THEORY

V. G. ZVYAGIN

Some ideas and results of group theory are explained and the way to reduce the problem of solvability in radicals of algebraic equation of n-th degree by one variable to some results of the group theory is shown. An example of how such equation can be solved using them is presented.

Даны некоторые понятия и результаты теории групп и показано, каким образом проблема разрешимости в радикалах алгебраического уравнения n-й степени связана с теорией групп и решается с ее помощью.

www.issep.rssi.ru

В курсе средней школы подробно изучают алгебраические уравнения с одним неизвестным 1-й и 2-й степеней. При этом оказывается, что для решения таких уравнений существуют общие формулы, выражающие корни уравнения через его коэффициенты с помощью арифметических операций и радикалов (для уравнений 2-й степени). Подобного типа формулы были установлены еще в XVI веке и для уравнений 3-й (Дж. Кардано) и 4-й (Л. Феррари) степеней. Долгое время математики пытались найти метод решения в радикалах общего уравнения 5-й степени. Однако в 1824 году норвежский математик Нильс Генрик Абель доказал следующую теорему: *Общее алгебраическое уравнение с одним неизвестным степени выше 4-й неразрешимо в радикалах, то есть не существует формулы, выражающей корни общего уравнения степени выше 4-й через коэффициенты с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечения корней натуральной степени.*

Цель статьи – познакомить читателя с рядом понятий и результатов теории групп и показать, каким образом проблема разрешимости в радикалах алгебраического уравнения n-й степени от одного неизвестного сводится к некоторой проблеме в теории групп и каким образом она там решается.

ГРУППА

Определение 1. *Группой* называется множество G элементов произвольной природы, в котором любой упорядоченной паре (a, b) элементов этого множества поставлен в соответствие третий элемент, который мы будем обозначать символом $a \cdot b$, и при этом предполагаются выполненными следующие условия:

1) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ для любых $a, b, c \in G$;

2) в G существует такой элемент e, называемый единицей группы G, для которого $a \cdot e = e \cdot a = a$ для любого элемента $a \in G$;

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ГРУППАХ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

THE COMPUTATION COMPLEXITY IN GROUPS

A. Yu. OL'SHANSKII

Any group G can be described in terms of generators and relations. The key question is whether given two words in generators represent the same element of G or not. Examples, the setting of the algorithmic problem and formulations of some recent results on the complexity of the word problem for groups are given.

Любая группа G может быть задана с помощью порождающих элементов и соотношений между ними. При этом основным оказывается вопрос о существовании алгоритма для распознавания, представляют ли два слова от порождающих один и тот же элемент в G или нет. В статье приведены примеры, сформулирована проблема и описаны недавние результаты исследований сложности проблемы слов для групп.

www.issep.rssi.ru

Группы появляются в математике вместе с симметриями и преобразованиями. Для знакомства с примерами и основными понятиями рекомендуем опубликованные в "Соросовском Образовательном Журнале" статьи [1, 2]. Напомним только, что всякая группа G является множеством, наделенным ассоциативной операцией $a \cdot b$ для $a, b \in G$ (элемент $c = a \cdot b$ группы G называют обычно произведением элементов a и b), причем выполнены аксиомы единицы (существует элемент $e \in G$, такой, что $ae = ea = a$ для любого $a \in G$) и обратного (для любого $a \in G$ существует элемент $b = a^{-1} \in G$, такой, что $ab = ba = e$). Из аксиом непосредственно следует единственность единицы и единственность обратного для всякого $a \in G$. Некоторые другие особенности групповых исчислений обсуждаются в [2].

Для эффективного вычисления произведений в группе G должен быть какой-то единообразный способ описания ее элементов. Во многих группах (так называемых группах Ли) эта задача решается с помощью задания локальной (а иногда глобальной) системы координат. Характерным примером является группа всех движений трехмерного евклидова пространства, где каждое движение задается шестью параметрами в соответствии с нашим представлением о шести степенях свободы твердого тела в пространстве.

Но есть и другие группы, устроенные дискретно в том смысле, что в малой окрестности элемента группы других элементов вообще нет (см. примеры ниже). В статье речь пойдет об универсальном способе задания элементов любой группы в виде слов от порождающих. Мы затронем основной вопрос, возникающий в исчислении слов, – проблему распознавания равенства слов в группе.

ПОРОЖДАЮЩИЕ

Начнем с примеров.

1. Вообразим неограниченный лист клетчатой бумаги, клетки которого – единичные квадраты и который покрывает всю евклидову плоскость. Пусть G_1 – группа всех параллельных переносов плоскости в себя (или сдвигов), сохраняющих данную клетчатую

WHAT A SEMIGROUP IS

L. N. SHEVRIN

The paper presents the concept of semigroup and numerous examples of semigroups. Isomorphisms between semigroups are considered and, in particular, a well-known fundamental fact is proved that each semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations.

Статья знакомит с понятием полугруппы и многочисленными примерами полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается хрестоматийный факт, что всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУГРУППА

Л. Н. ШЕВРИН

Уральский государственный университет, Екатеринбург

> ... Я приветствую полугруппу, где бы я ее ни встретил, а встречается она повсюду. Впрочем, от друзей я слышал, что в математике попадаются объекты, отличные от полугрупп.
>
> *Эйнар Хилле*

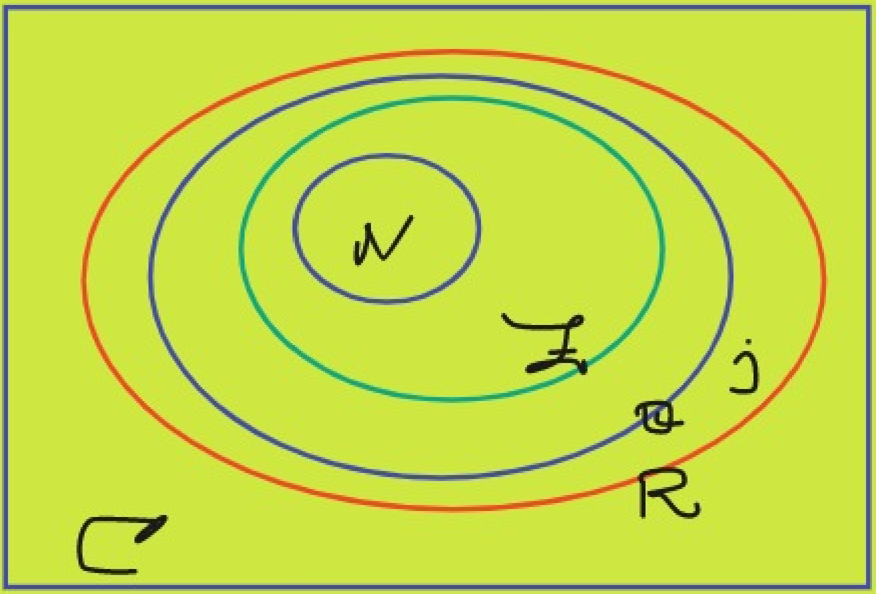
ВВЕДЕНИЕ

Высказывание, воспроизведенное в эпиграфе, принадлежит известному американскому математику Э. Хилле и содержится в предисловии к первому изданию его фундаментальной монографии "Функциональный анализ и полугруппы"[1]. Рассматриваемые в указанной монографии полугруппы – это главным образом разного рода полугруппы линейных операторов пространств, изучаемых в функциональном анализе. Соответствующая теория – аналитическая теория полугрупп возникла в 40-х годах. В ту пору, как писал Хилле в упомянутом предисловии, она представляла собой "недавнее пополнение все время растущей семьи математических дисциплин"; теперь это одна из важнейших частей функционального анализа. Вообще же понятие полугруппы – чисто алгебраическое понятие, ставшее основой развития большой области современной алгебры и участвующее в разнообразных приложениях алгебры, в том числе в приложениях в теории автоматов, теории кодов, математической лингвистике и многих других областях, включая даже биологию и социологию.

Исходные понятия теории полугрупп и простейшие свойства полугрупп достаточно элементарны и вполне доступны школьникам старших классов. Более того, можно сказать, что с полугруппами встречается, не подозревая этого, уже первоклассник, и затем они сопровождают учащихся на протяжении всех лет обучения в школе. Полугруппы поистине вездесущи, и то, что, говоря словами Хилле, они встречаются повсюду, очень легко продемонстрировать, что мы и сделаем в настоящей статье.

Отметим, что некоторые примеры и свойства полугрупп (под углом зрения тождеств) приводились в статье автора [2]. В задуманном продолжении

[1] Переработанное и значительно расширенное второе ее издание подготовлено совместно с Р. Филлипсом [1]. Для любознательного читателя отметим во избежание недоразумения, что в русском переводе первого издания, вышедшего в 1951 году, фамилия автора *Hille* не вполне точно транскрибировалась как Хилл.



$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \{1^{\infty}\}$$

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = x_n < 3$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2{,}25$$

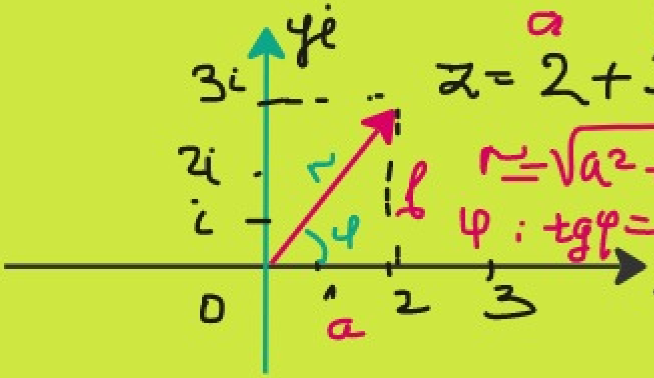
$$x_{10} = \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}59$$

$$x_{100} \approx 2{,}7048$$

$$x_{1000} \simeq 2{,}7169$$

df $\boxed{z = a + bi}$ а л.ф.

$i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$ imaginar.



$z = \overset{a}{2} + \overset{b}{3}i$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi : tg\varphi = b/a$

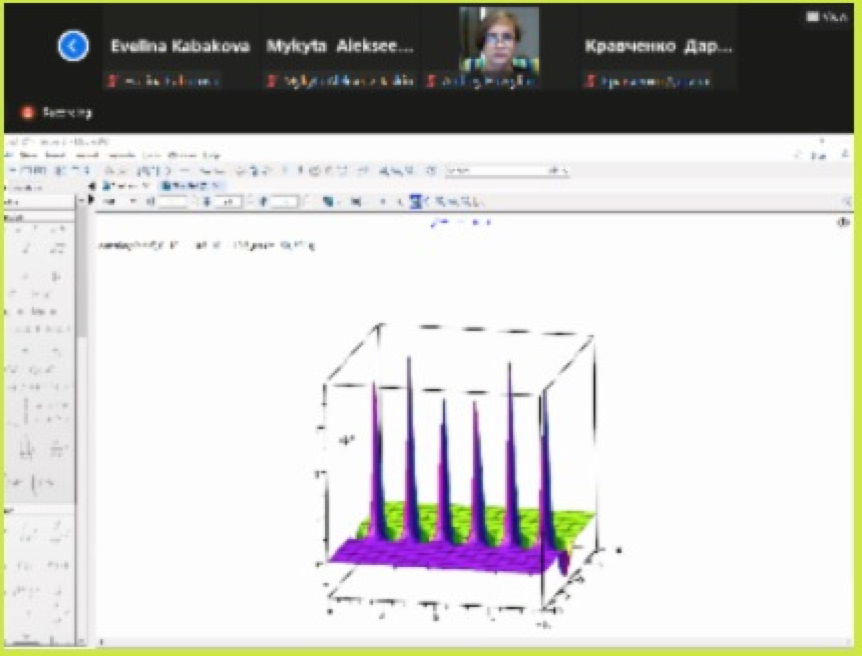
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

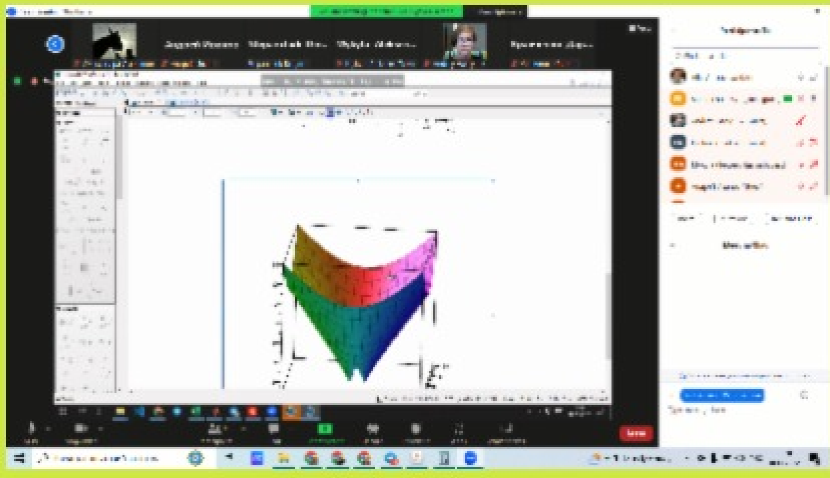
$f(x)$

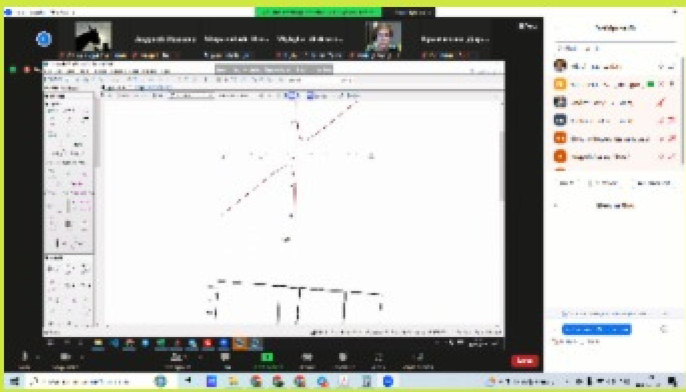
$$\Gamma = \{(x,y) \mid y = f(x)\} - R^2$$

$$w(z) = \underbrace{u(x,y)}_{Re\,w} + i\,\underbrace{v(x,y)}_{Im\,w}$$

$$\Gamma = \{(x,y,z)\} \in R^3$$

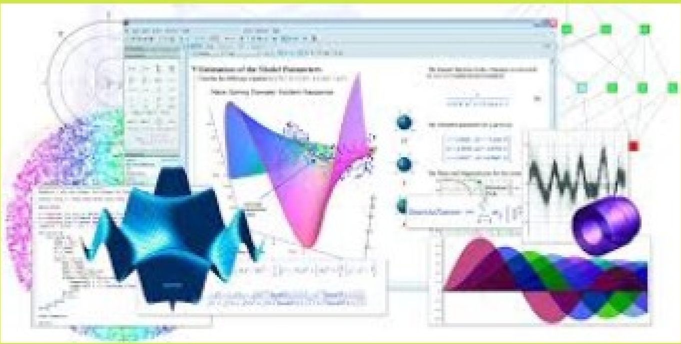

Evelina Kabakova
Mykyta Aleksee...
Кравченко Дар...

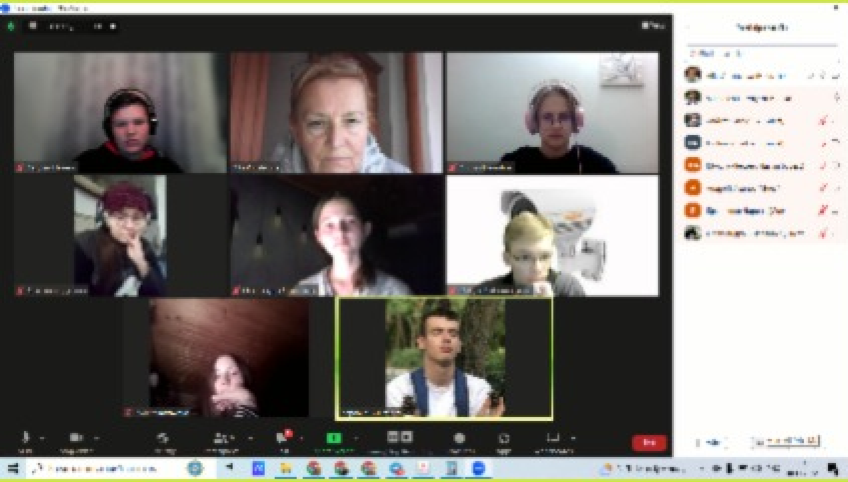


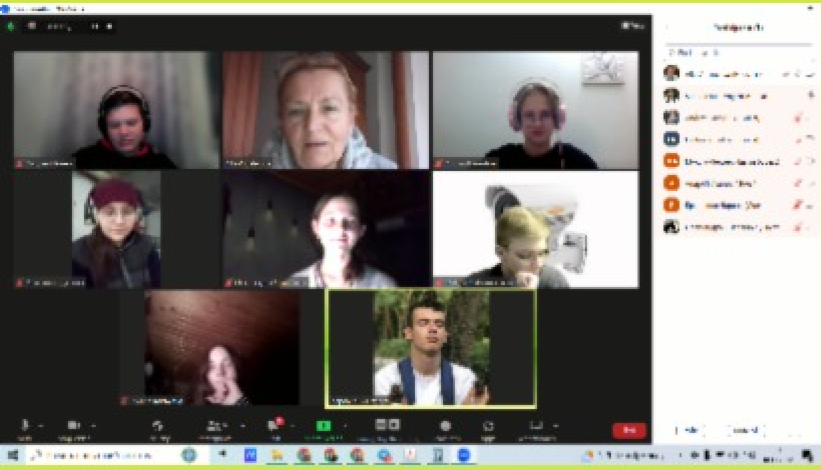


$$f(x,y,z) \to a\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}$$

$$\sin(2)$$

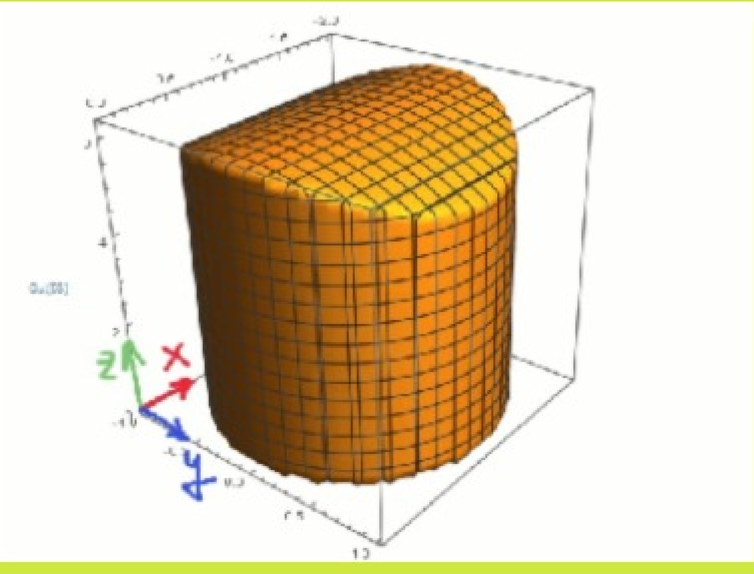


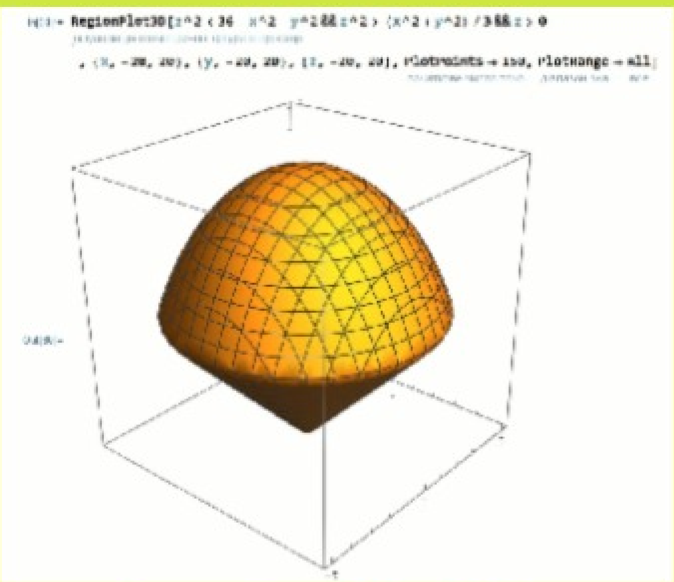




0. $x^2 + y^2 + 2x = 0,$

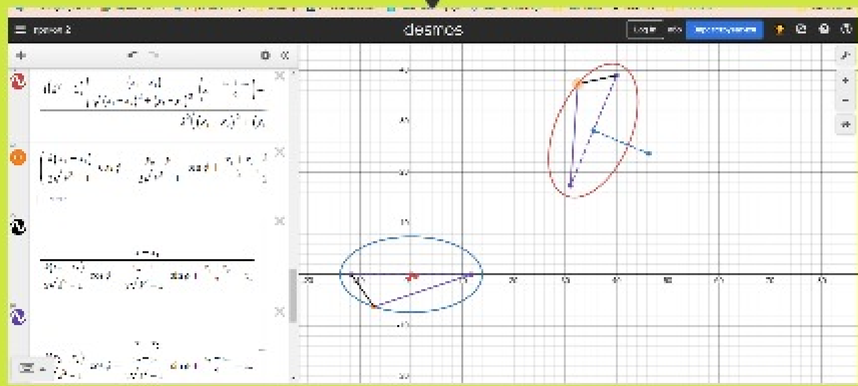
$z = 25/4 - y^2, \; z = 0.$

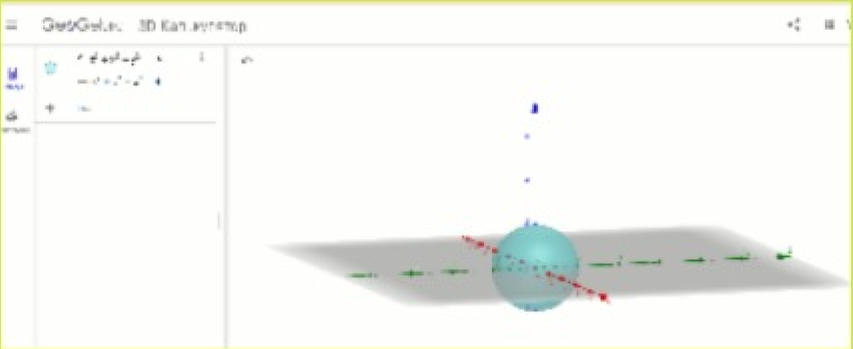


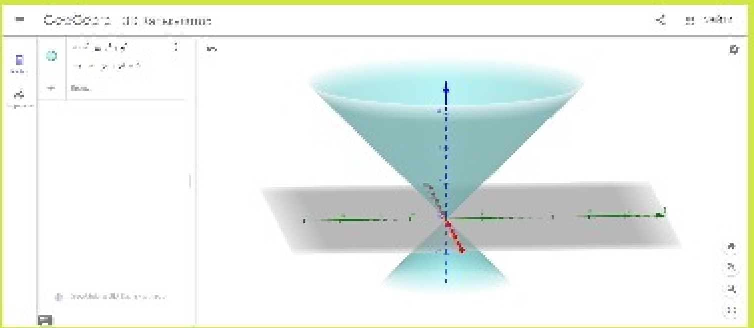


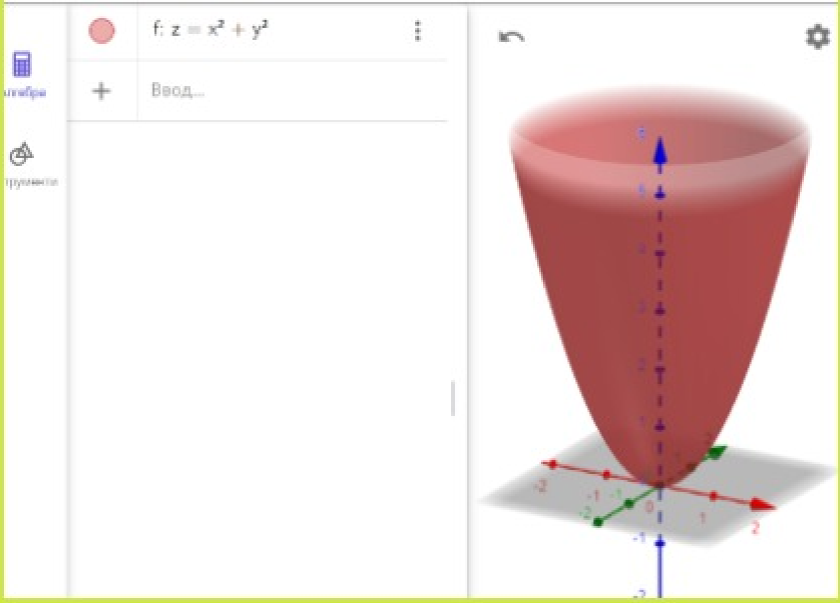
$$z^2 < 36 - x^2 - y^2$$

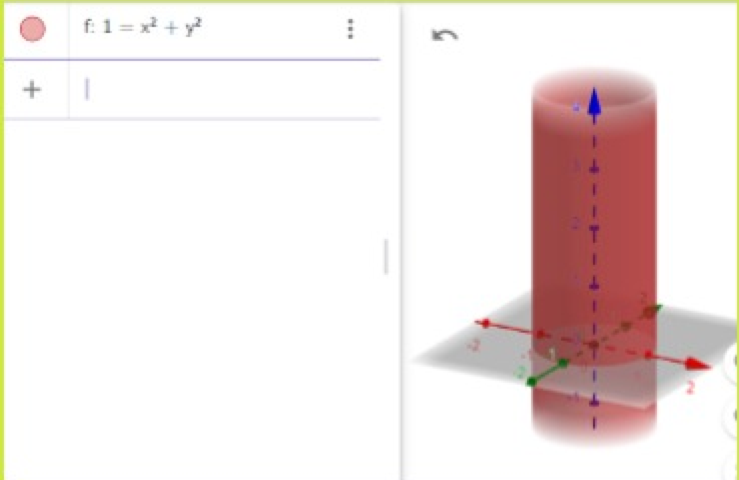
$$z^2 > \frac{x^2 + y^2}{3}$$








f: z = x² + y²
Ввод...


f: 1 = x² + y²