Управління освіти і науки Миколаївської облдержадміністрації
Управління освіти і науки Южноукраїнської міської ради
Миколаївське територіальне відділення МАН України

Відділення: математики
Секція: математика

Розв'язання рівнянь, нерівностей та їх систем з параметром графічним способом

Роботу виконала:
Гагаро Тетяна Михайлівна,
учениця 11 класу Южноукраїнської загальноосвітньої школи I-III ступенів №3 Южноукраїнської міської ради

Керівник:
Благодатських Ірина Олексіївна,
вчитель вищої категорії,
старший вчитель
Наукові консультанти:
Лейфура В.М., заслужений учитель України, професор Миколаївського державного університету ім.. Петра Могили; Воробйова А.І.,
доцент МДУ ім.. Петра Могили

Миколаїв – 2010

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Задачі з параметрами традиційно входять до завдань вступних іспитів з математики до вищих навчальних закладів, у тому числі й при складанні Зовнішнього незалежного оцінювання, і мають за мету перевірку логічного мислення абітурієнтів. У більшості школярів та абітурієнтів розв’язання таких задач викликає вагання, бо у школі мало уваги приділяється завданням, які у своєму розв’язанні вимагають мислення розгалуження, вміння чітко і лаконічно записувати математичні твердження, а задачі з параметрами, як правило, взагалі опускаються.

Тому актуальність даної теми дослідження визначається розширенням, удосконаленням своїх знань в області з параметрами, необхідністю уміти вирішувати рівняння, нерівності та їх системи з параметром при складанні Зовнішнього незалежного оцінювання.

Головною метою дослідницької роботи є доказ того, що графічний метод розв’язання рівнянь, нерівностей та їх систем з параметром є найбільш оптимальним, швидким, зручним та наочним, порівняно з іншими. У зв’язку з цим необхідним є вирішення поставлених завдань:

– розгляд теоретичних питань, що стосуються загальної проблеми дослідження;

– дати визначення поняттям рівняння з параметрами;

– показати принцип вирішення рівнянь, нерівностей, систем з параметром графічним методом.

Об’єктом дослідження є завдання з параметром, що розв’язуються графічним методом.

Предметом дослідження є окремий вид рівнянь, нерівностей, систем з параметром: лінійні, раціональні, ірраціональні, логарифмічні, тригонометричні, квадратичні, що містять модуль.

Дослідницька робота базується на основних методах: абстрагуванні, аналізі та синтезі, індукції та дедукції, переході від приватного до загального.

Інформаційною базою дослідження послужили наукові публікації, роботи, власні матеріали дослідження.

Структура роботи зумовлена метою та завданнями дослідження. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дослідження – 31 сторінка. У списку використаної літератури – 5 позицій.

РОЗДІЛ 1
РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

1.1.Теоретична частина

Що таке параметр? Як розв’язувати рівняння з параметром? Як розв’язувати нерівності з параметром? Як розв’язувати рівняння і нерівності з параметром графічним способом? Та чи дійсно графічний метод розв’язання завдань з параметром є більш зручним, швидким, оптимальним?
Це головні питання, які зацікавили мене при виборі теми. Адже немає нічого більш загадковішого ніж параметр. Чи неправда? Адже коли ти розв’язуєш завдання з параметром, ти не знаєш якою буде відповідь, ти не знаєш окремої схеми для їх розв’язання. Так, звісно, є певні алгоритми розв’язання рівнянь, нерівностей і систем рівнянь та нерівностей з параметром. Але ж не завжди розв’язання рівняння або нерівності з параметром потребує простого, основного підходу. Більшість з них потребують саме нетрадиційного.

Кожне з завдань з параметром є індивідуальним, винятковим, і розв’язання цього завдання є ще більш загадковішим, ніж його умова.
Та це ще не все! Знаєте, як цікаво спостерігати за змінами, що відбуваються в тебе на аркуші зошита за допомогою олівця й лінійки. Ви навіть не уявляєте! Що може бути ще більш загадковішим за параметр, ніж його письмове розв’язання? А з яким захопленням ти спостерігаєш, як все це перетворюється, не побоюся навіть сказати, на шедевр графіки! Ти з захопленням спостерігаєш за всіма прямими, кривими, квадратами, колами, параболами... І тобі здається, що немає нічого більш цікавішого та більш важливішого на той момент, ніж параметр.

До задач з параметрами, які розглядаються в шкільному курсі, можна віднести, наприклад, пошук розв’язків лінійних і квадратних рівнянь у загальному вигляді, дослідження кількості їх коренів в залежності від значень параметрів.

Природно, такий невеликий клас задач багатьом не дозволяє засвоїти головне: параметр, будучи фіксованим, але невідомим числом, має начебто подвійну природу. По-перше, припущена відомість дозволяє «спілкуватись» з параметром як з числом, а по-друге, ступінь свободи спілкування обмежується його невідомістю. Так, ділення на вираз, що містить параметр, знаходження кореня парного степеня з подібних виразів потребують попередніх досліджень. Як правило, результати цих досліджень впливають і на розв'язування, і на відповідь.

Головне, що треба засвоїти під час першого знайомства з параметром, – це необхідність обережного, навіть, делікатного поводження з фіксованим, але невідомим числом.

Необхідність акуратного поводження з параметром добре видно на тих прикладах, де заміна параметра числом робить задачу банальною. До таких задач, наприклад, належать: порівняти два числа, розв'язати лінійне або квадратне рівняння, нерівність тощо.

Також хочу звернути увагу на те, що розв'язати завдання з параметром означає, що потрібно навести у відповіді сімейство розв'язків відносно невідомої величини (невідомих величин) для всіх можливих розглядів сталих величин (параметрів). Тим паче, що параметр у відповіді повинен «пробігти» всю числову вісь, або всі значення, що обумовлені умовою задачі.

При графічному розв'язанні рівнянь з параметром необхідно:

1. Знайти область визначення рівняння, тобто область допустимих значень невідомого і параметра, при яких рівняння може мати рішення.
2. Виразити параметр a як функцію від x: $a=f(x)$.
3. У системі координат xOa побудувати графік функції $a=f(x)$ для тих значень x, які входять до області визначення рівняння.
4. Визначити точки перетину прямої $a=c$ $(-\infty<c<+\infty)$ з графіком функції $a=f(x)$. Можливі ситуації:

а) пряма $a=c$ не перетинає графік $a=f(x)$. При зазначенні $a=c$ вихідне рівняння рішень немає;

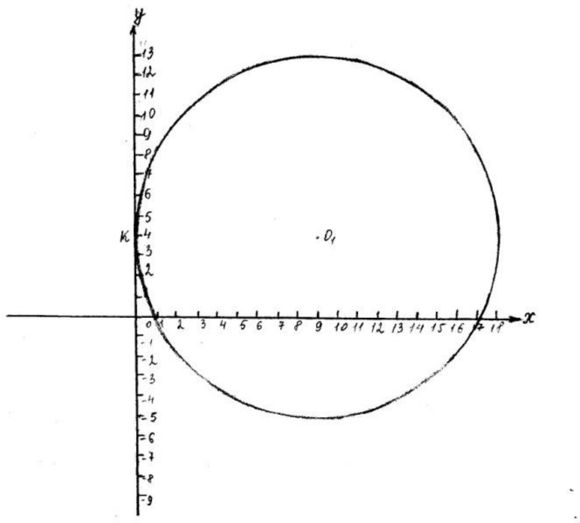
б) пряма $a=c$ перетинає графік $a=f(x)$ в одній або декількох точках. Визначаємо абсциси точок перетину, розв'язуючи рівняння $a=f(x)$ відносно x.

Окремо необхідно виділити рівняння з модулем, що містять параметр, розв'язання яких спирається на: властивості модуля та способи розв'язань завдань з модулем, способи розв'язання алгебраїчних рівнянь та нерівностей з параметром, властивості квадратичної функції, графічні побудови та перетворення ГМТ на координатній площині.

1.2. Практична частина

1.Знайдіть значення параметру *a*, при якому коло $(x-9)^2+(y-4)^2=a$ дотикається до осі ординат.

Розв'язання. Так як O_1 – центр кола ($O_1(9;4)$), то відстань від O_1 до осі ординат буде абсцисою O_1. $O_1K=9$, отже $R=9$, а $a=R^2=81$.



Відповідь: 81.

2. Визначити кількість розв'язків в залежності від значення параметру *a*

$$\sqrt{4+x(4+x)}+\sqrt{4+x(x-4)}=a.$$

Розв'язок.

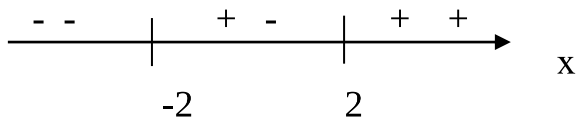
$$\sqrt{4+x(4+x)}+\sqrt{4+x(x-4)}=a$$

$$\sqrt{4+4x+x^2}+\sqrt{4+x^2-4x}=a$$

$$\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-2)^2}=a$$

$|x+2|+|x-2|=a$

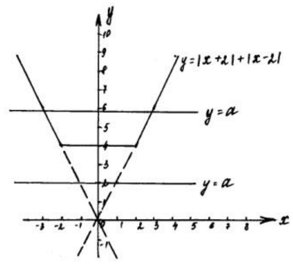
$y=|x+2|+|x-2|$ и y = a



$$1)\begin{cases} x<-2, \\ y=-x-2-x+2; \end{cases} \begin{cases} x<-2 \\ y=-2x \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -2<x<2, \\ y=x+2-x+2; \end{cases} \begin{cases} -2<x<2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x\geq 2, \\ y=x+2+x-2; \end{cases} \begin{cases} x\geq 2, \\ y=2x. \end{cases}$$



При a<4 – розв’язків нема; при a=4 – безкінечна множина розв’язків; при a>4 – 2 кореня.

Відповідь: при a<4 – 0 розв’язків:

При a=4 – б. м. р.;

При a>4 – 2 розв’язки.

3.Вказати всі пари чисел *(m;x)*, які задовольняють рівняння $|x-1|+|x+1|=mx.$

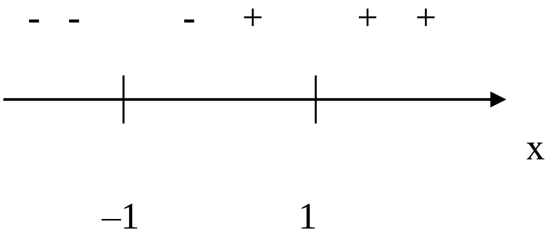
Розв’язок.

Необхідно побудувати графік функцій $y=|x-1|+|x+1|$ и $y=mx.$

Розглянемо докладніше:

I. $y = |x-1| + |x+1|$

$x = 1,\ x = -1$



$$1)\begin{cases} x < -1, \\ y = -x+1-x-1; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ y = -2x. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -1 < x < 1, \\ y = -x+1+x+1; \end{cases} \begin{cases} -1 < \mathrm{x} < 1, \\ \mathrm{y} = 2. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x \geq 1, \\ y = x-1+x+1; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1, \\ y = 2x. \end{cases}$$

1) Побудуємо графік функції *y=-2x*

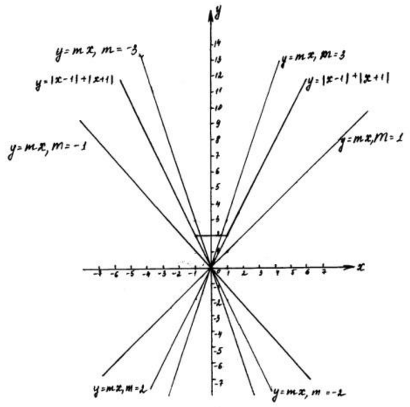
x	0	1	-1
y	0	-2	2

2) Побудуємо графік функції *y=2.*

3) Побудуємо графік функції *y=2x*

x	0	1	-1
y	0	2	-2

II. Графік функції *y=mx* – пряма, яка обертається навколо точки (0;0).



Розв'язки рівняння $|x-1|+|x+1|=mx$ відповідають точкам перетину графіка функції *y=f(x)* і *y=mx*.

Можливі наступні випадки:

1) при $m=2$ $x\in[1;=\infty)$;

при $m=-2$ $x\in(-\infty;-1]$;

2) при $m\in(-2;2)$ $x\in\varnothing$;

3) при $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$ $mx=2\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{m}$

Відповідь: $(m;\dfrac{2}{m}),\, де\ m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty);$

$(2;x),\, де\ \ m\in[1;+\infty);$

$(-2;x),\, де\ \ m\in(-\infty;-1].$

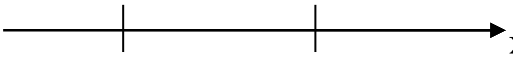
4.Знайдіть найменше значення параметра *a*, при якому рівняння $\sin x+a=|x+3|-|x-3|$ має безліч розв'язків.

Розв'язок.

Побудуємо графіки функцій $y=\sin x+a$ і $y=|x+3|-|x-3.|$

I. $y=|x+3|-|x-3|$

- \+ \+ - \+ \+



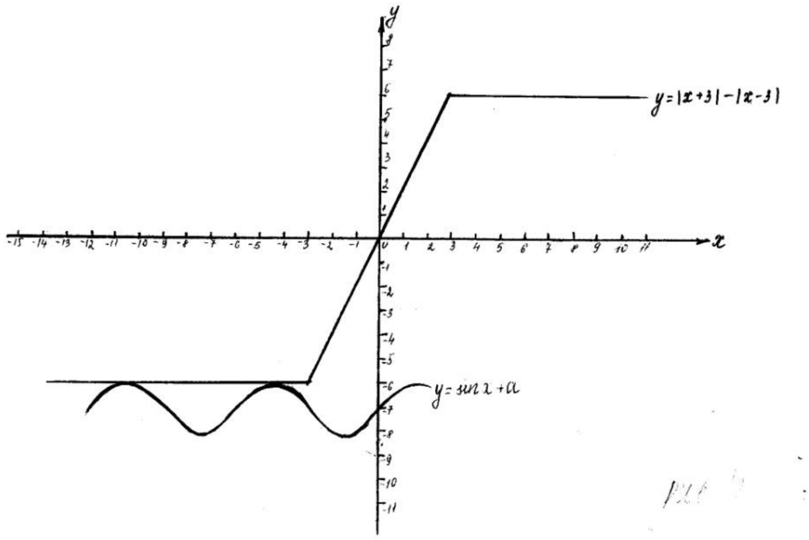
-3 3

1) $\begin{cases} x < -3, \\ y = -x - 3 + x - 3; \end{cases} \begin{cases} x < -3 \\ y = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ y = x + 3 + x - 3; \end{cases} \begin{cases} -3 < x < 3 \\ y = 2x \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geq 3, \\ y = x + 3 - x + 3; \end{cases} \begin{cases} x \geq 3 \\ y = 6 \end{cases}$

II. Графіком функції $y = \sin x + a$ є синусоїда, яка пересувається вздовж вісі ординат.



При *a*=*-7* синусоїда буде дотинатися графіка функції $y = |x+3| - |x-3|$ безліч разів.

Відповідь: *a*=*-7*.

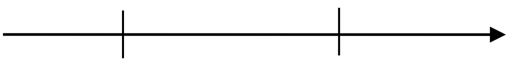
5. Розв'язати рівняння відносно $|x| - |x-2| = a$.

Розв'язок.

Розглянемо функцію $y = |x| - |x-2|$.

x=0, *x=2*

- - + - + +



x

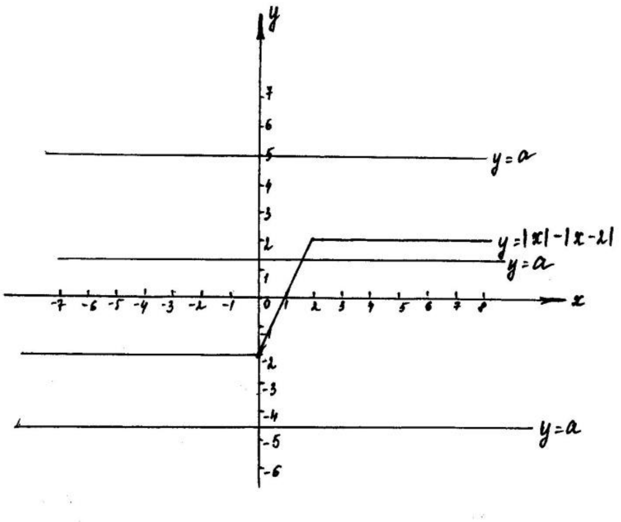
0 2

1) $\begin{cases} x < 0, \\ y = -x + x - 2; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ y = -2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0 < x < 2, \\ y = x + x - 2; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 2, \\ y = 2x - 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geq 2, \\ y = x - x + 2; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ y = 2. \end{cases}$

Графік функції $y=a$ – це пряма, паралельна вісі Ox і проходяща через точку $(0;a)$.



Якщо $a<-2$ і $a>2$, то розв’язків нема;

якщо $a=\pm 2$ - безліч розв’язків $\begin{cases} \text{при } a = -2\ x \leq 0; \\ \text{при } a = 2,\ x \geq 2; \end{cases}$

якщо $a \in (-2;2)$ - 1 розв’язок - $x = \dfrac{a+2}{2}$, тобто $x+x-2=a$ $(2x-2=a,\ x = \dfrac{a+2}{2})$.

Відповідь: при $a=-2$ $x\leq 0;$

при $a=2$ $x\geq 2;$

при $a \in (-2;2)$ $x = \dfrac{a+2}{2};$

при $a \notin [-2;2]$ $x \in \varnothing$.

6. При якому значенні параметра *a* рівняння $|x^2 - 2x - 3| = a$ має три кореня?

Розв'язок.

Функція $y=x^2-2x-3$ – парабола, гілки якої спрямовані вгору, вершина опущена на 3 одиниці вниз по вісі *Oy,* має точки перетину с віссю *Ox:*

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 3, \\ x_2 = -1, \end{array}\right.$$

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$y = 1 - 2 - 3 = -4$$
$$A(1;-4).$$

Відобразимо симетрично вісі *Ox*

ту частину графіка $y = x^2 - 2x - 3$,

яка знаходиться нижче вісі *Ox,* і

отримаємо графік функції $y = |x^2 - 2x - 3|$.

Графіком правої частини буде

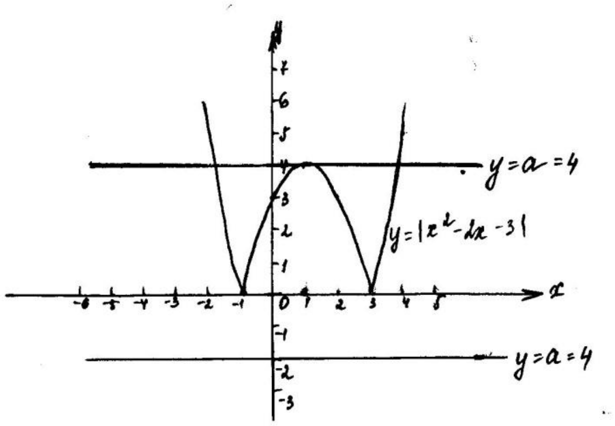
пряма $y=a$, паралельна вісі абсцис

і перетинаюча вісь *Oy* в точках $(0;a)$, $a \in R$.

З графіку бачимо, що рівняння $|x^2 - 2x - 3| = a$

має три розв'язки при $a=4$.

Відповідь: $a=4$.



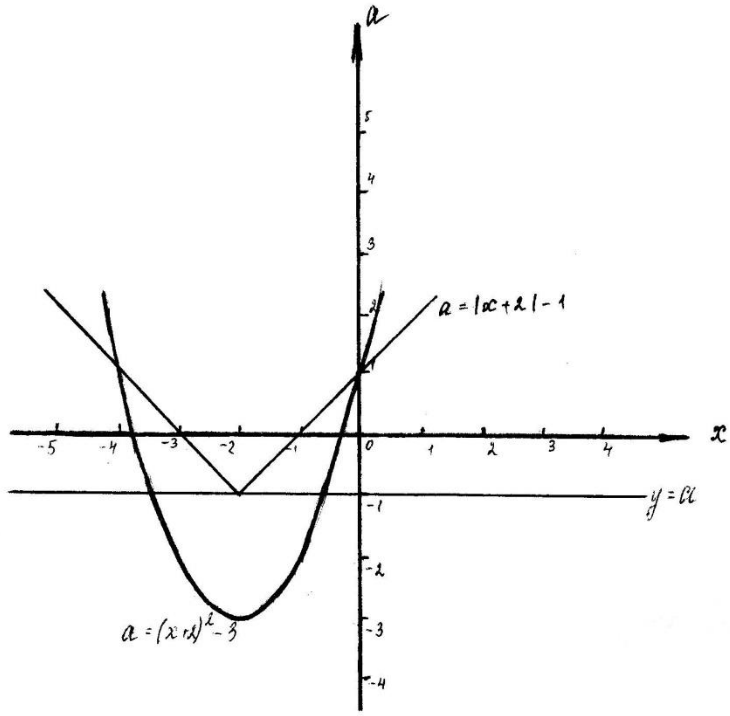
7. Знайти всі значення a, при яких рівняння $(a+1-|x+2|)(x^2+4x+1-a)=0$ має рівно три кореня.

Розв'язок.

Дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь :

$$\left[\begin{array}{l} a+1-|x+2|=0, \\ x^2+4x+1-a=0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a=|x+2|-1, \\ a=x^2+4x+1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} a=|x+2|-1, \\ a=(x+2)^2-3. \end{array}\right.$$

Введемо систему координат, в якій віссю абсцис буде вісь Ox, а віссю ординат – вісь Oa, і побудуємо графіки функцій, заданих попередніми формулами.



Пряма *y=a* перетинає об’єднання двох графіків у трьох точках(кожна з цих трьох точок належить прямій *y=a* і хоча б одному з побудованих графіків). Цією властивістю володіє лише пряма *a=-1*, котра має одну спільну точку з графіком функції $a=|x+2|-1$ і дві спільні точки з графіком функції

$a=(x+2)^2-3$.

Відповідь: *a=-1*.

8. В залежності від значень параметра *a* розв’язати рівняння

$\log_3\left(31-\left|x^2-6x+51\right|\right)=a$.

Розв’язок.

1. ОДЗ: $x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right)$, тобто

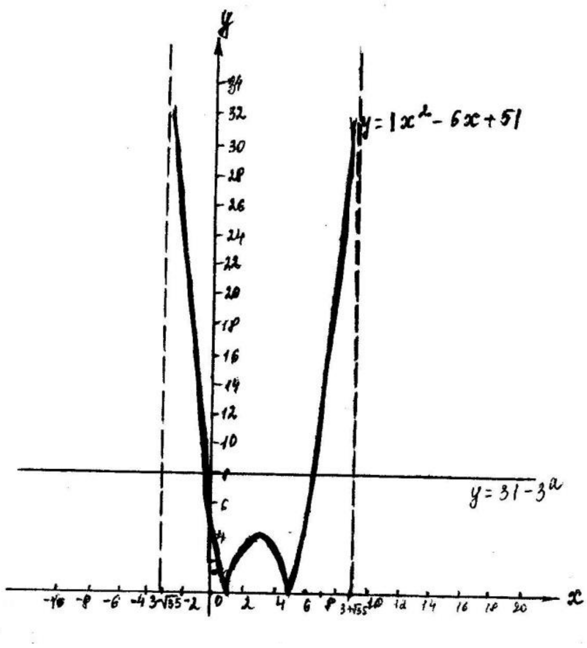
$$31-\left|x^2-6x+5\right|>0\Rightarrow\left|x^2-6x+5\right|<31\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+5<31,\\x^2-6x+5>-31.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x-26<0,\\x^2-6x+36>0;\end{cases}$$

$$\frac{D}{4}=9+26=35=\left(\sqrt{35}\right)^2,\ x_1=3-\sqrt{35},\ \ x_2=3+\sqrt{35},\ x\in\left(3-\sqrt{35};3+\sqrt{35}\right).$$

2. $31-\left|x^2-6x+5\right|=3^a$

$\left|x^2-6x+5\right|=31-3^a$

3. Будуємо 1) $y=\left|x^2-6x+5\right|$ ($x_в=\dfrac{6}{2}=3, y_в=\left|-4\right|=4$), 2) $y=31-3^a$ – пряма, паралельна вісі *0x*.



1) $4<31-3^a<31$ - 2 кореня:

$$x^2-6x+5=31-3^a$$
$$x^2-6x-26+3^a=0$$
$$x^2-6x+(3^a-26)=0$$

$$\frac{D}{4}=9-\left(3^a-26\right)=35-3^a$$
$$x_1=3+\sqrt{35-3^a},$$
$$x_2=3-\sqrt{35-3^a}.$$

2) $31-3^a=4$ – 3 кореня:

$27=3^a \Rightarrow a=3$, тобто при *a=3* – 3 кореня ($x_3=3$).

3) $0<31-3^a<4$ – 4 кореня:

$$\begin{cases}31-3^a<4,\\31-3^a>0;\end{cases}\begin{cases}3^a>27,\\3^a<31;\end{cases}\begin{cases}a>3,\\a<\log_3 31\end{cases}\Rightarrow a\in\left(3;\log_3 31\right).$$

$-x^2+6x-5=31-3^a$

$-x^2+6x-36+3^a=0$

$x^2-6x+36-3^a=0$

$\frac{D}{4}=9-(36-3^a)=-27+3^a=3^a-27.$

$x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{3^a-27}$ при $a\in(3;\log_3 31)$.

4) $31-3^a<0$, тобто $3^a>31$, тобто $a>\log_3 31$, то коренів нема.

5) $31-3^a=0$, тобто $a=\log_3 31$, то 2 кореня: $x_1=1$, $x_2=5$.

Відповідь: якщо $a<3$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$,

якщо $a=3$, то $x_1=3-2\sqrt{2}, x_2=3, x_3=3+2\sqrt{2};$

якщо $3<a<\log_3 31$, то $x_{1,2}=3\pm\sqrt{35-3^a}$, $x_{3,4}=3\pm\sqrt{3^a-27}$;

якщо $a=\log_3 31$, то $x_1=1$, $x_2=5$;

якщо $a>\log_3 31$, то розв’язків нема.

РОЗДІЛ 2

РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

1. При яких значеннях параметра a нерівність $\left|tgx-\frac{1}{2}\right|\geq a$ виконується для всіх $x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язок.

Побудуємо графіки функцій:

1) $y=\left|tgx-\frac{1}{2}\right|$.

2) $y=a$.

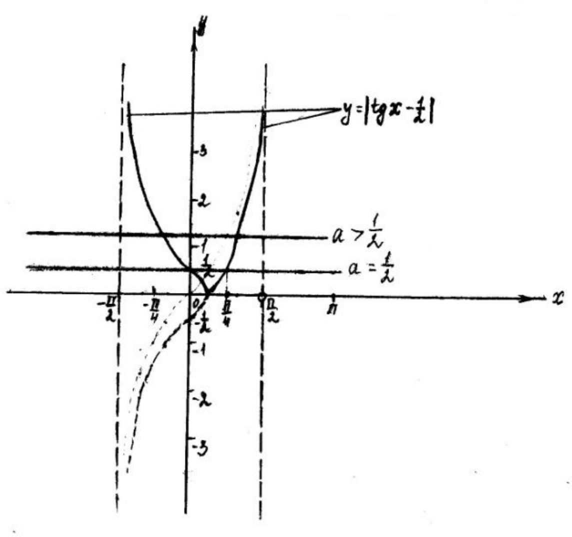
Перший графік отримаємо за планом:

1) $y=tgx$

2) $y=tgx-\frac{1}{2}$

3) $y=\left|tgx-\frac{1}{2}\right|$.

Другий графік – це пряма, паралельна вісі Ox і проходить через точки $(0;a)$.



Маємо, що всі прямі $y = a$ при $a \geq \frac{1}{2}$ задовольняють умові задачі.

Відповідь: $a \geq \frac{1}{2}$.

2. Знайдіть всі значення параметра *a*, для яких нерівність $\left\| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3} \right| \leq a$

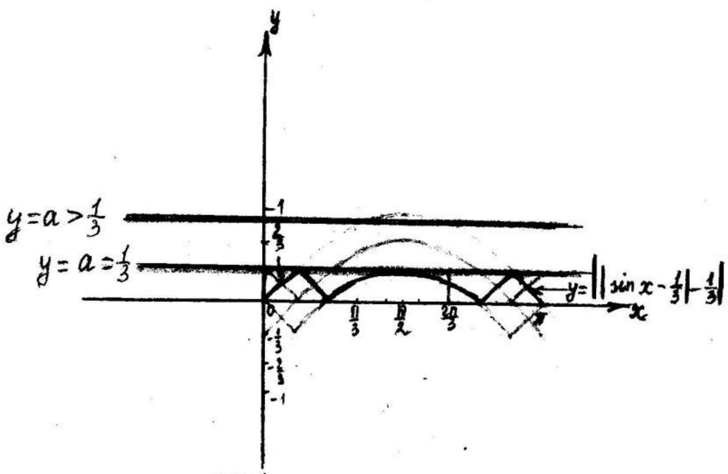
виконується для всіх $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

Розв’язок.

Побудуємо графік функції $y = \left\| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3} \right|$ на інтервалі $[0; \pi]$ за планом:

1) $y = \sin x$; 2) $y = \sin x - \frac{1}{3}$; 3) $y = \left| \sin x - \frac{1}{3} \right|$; 4) $y = \left| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3}$; 5) $y = \left\| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3} \right|$

і побудуємо графік функції $y = a$ (пряма, що паралельна вісі *Ox*).



мал. 1

З малюнку 1 ми бачимо, що дана нерівність($\left\| \sin x - \frac{1}{3} \right| - \frac{1}{3} \right| \leq a$) виконується для

всіх $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$, якщо $a \geq \frac{1}{3}$.

Відповідь: $a \geq \frac{1}{3}$.

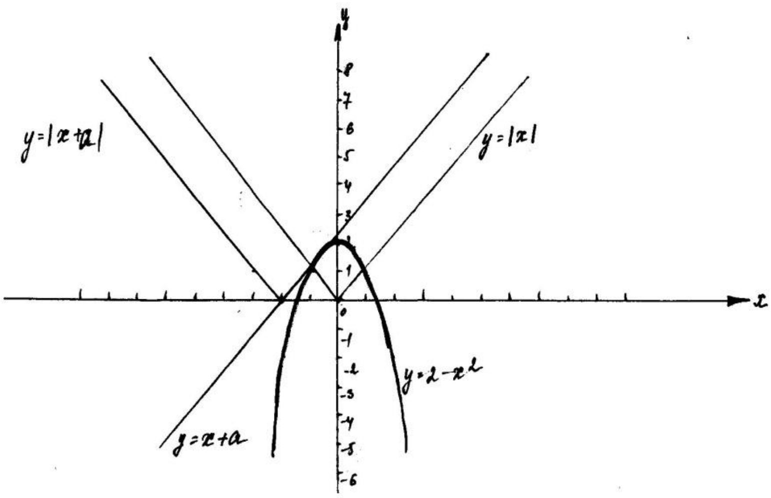
3. Знайдіть всі значення a, при кожному з яких нерівність $2 > |x+a| + x^2$ має хоча б один додатний розв’язок.

Розв'язок.

$2 > |x+a| + x^2$

$2 - x^2 > |x+a|$

Побудуємо графіки функцій $y = 2 - x^2$ і $y = |x+a|$. Графік функції $y = 2 - x^2$ - це парабола, гілки якої направлені донизу, і вершина зрушена на 2 одиниці вгору по вісі Oy. Графік функції $y = |x+a|$ ми отримаємо зрушенням графіка $y = |x|$ на $|a|$ праворуч, якщо $a<0$; на $|a|$ ліворуч, якщо $a>0$.



Додатні розв’язки отримаємо при розташуванні графіка $y = |x+a|$ праворуч від позиції, коли його права полупряма(яка належить прямій $y=x+a$) проходить через точку $(0;2)$, тобто коли $-a>-2 \Leftrightarrow a<2$.

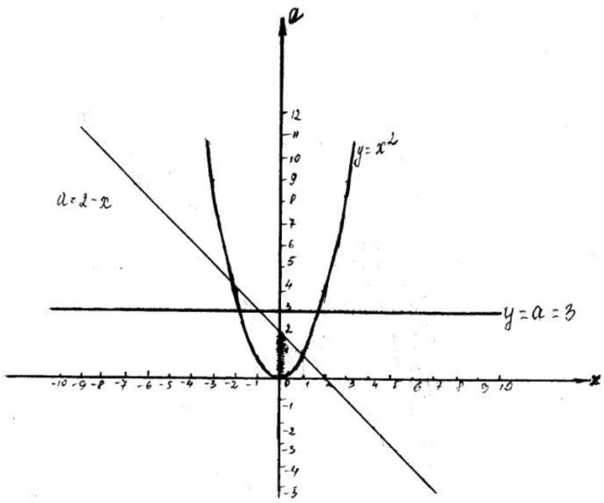
Відповідь: $a<2$

4. Знайдіть всі значення параметра *a*, при яких нерівність $(a-x^2)(2-x-a)>0$ не має розв'язків, які задовольняли б умові $|x|\le 1$.

Розв'язок.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x^2>0,\\2-x-a>0;\end{cases}\\\begin{cases}a-x^2<0,\\2-x-a<0;\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>x^2,\\2-x>a;\end{cases}\\\begin{cases}a<x^2,\\2-x<a.\end{cases}\end{array}\right.$$

Необхідно побудувати графік функції *y=a* і *y=x*^{2}.



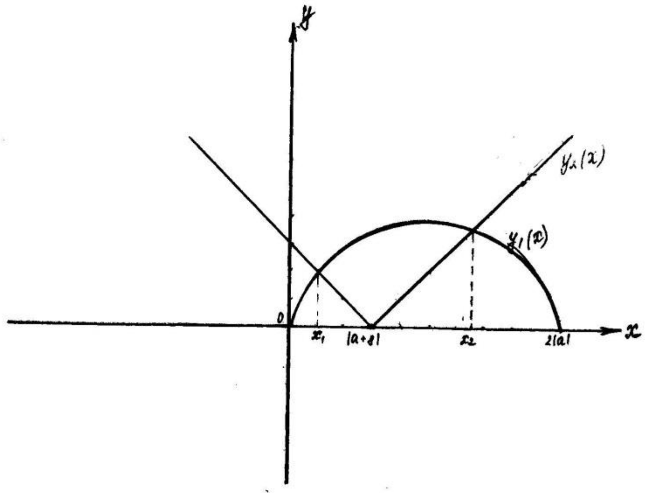
Розв'язки в залежності від значень параметра *a* отримаємо проектуванням на вісь *Ox* перетину отриманого ГМТ з прямим, паралельними *Ox*. Тоді $|x|\le 1 \Leftrightarrow x\in[-1;1]$ буде розв'язком даного рівняння при $a\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

Відповідь: $a\in(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$.

5. В залежності від значень параметра *a* розв'язати нерівність $\sqrt{2ax-x^2}<|x-a-8|$.

Розв'язок.

Початкову нерівність перепишемо у вигляді $\sqrt{a^2-(x-a)^2}<|x-a-8|$ і розглянемо графіки функцій $y_1(x)=\sqrt{a^2-(x-a)^2}$, $y_2(x)=|x-a-8|$.



Для знаходження абсцис точок перетину (якщо такі існують) обох графіків розв'яжемо рівняння $\sqrt{2ax - x^2} = |x - a - 8|$.

А тоді знаходимо, що $x_1 = a + 4 - \sqrt{\dfrac{a^2 - 32}{2}}$, $x_2 = a + 4 + \sqrt{\dfrac{a^2 - 32}{2}}$.

Очевидно також, що графіки будуть дотинатися одне до одного, якщо $a^2 - 32 = 0$, тобто якщо $a = \pm 4\sqrt{2}$.

Припустимо, що $a \ge 0$, і проаналізуємо при таких *a* можливі випадки розташування графіків.

Отже, якщо $a = 4\sqrt{2}$, то графіки дотинаються, і тоді $0 \le x < a + 4, a + 4 < x \le 2a$.

У випадку $2a = a + 8$, тобто при $a = 8$, «вершина» графіка функції $y_2(x)$ лежить на вісі абсцис з координатою *2a*, і значить розв'язком будуть всі *x* такі, що $0 \le x < 8$.

При $4\sqrt{2} \le a < 8$ графіки перетинаються в двох точка, причому «вершина» графіка функції $y_2(x)$ лежить на вісі абсцис праворуч точки *2a*.

В даному випадку розв'язки такі:

$$0 \le x < a + 4 - \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}}, \quad a + 4 + \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}} < x \le 2a.$$

Якщо $0 \le a < 4\sqrt{2}$, то графіки не перетинаються і розв'язками будуть всі x, що задовольняють нерівностям $0 \le x \le 2a$.

При $a > 8$ «вершина» графіка функції $y_2(x)$ лежить на вісі абсцис між *0* і $2a$.

Розв'язки у цьому випадку такі:

$$0 \le x < a + 4 - \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}}, \quad a + 4 + \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}} < x \le 2a.$$

Аналогічним чином проводяться дослідження й для від'ємних значень параметра a.

Відповідь: якщо $a < -8$, то $2a \le x < x_1$, $x_2 < x \le 0$;

якщо $a = -8$, то $-16 \le x < -8$;

якщо $-8 < a \le -4\sqrt{2}$, то $2a \le x < x_1$, $x_2 < x \le 0$;

якщо $-4\sqrt{2} < a < 0$, то $2a \le x \le 0$;

якщо $0 \le a < 4\sqrt{2}$, то $0 \le x \le 2a$;

якщо $4\sqrt{2} \le a < 8$, то $0 \le x < x_1$, $x_2 < x \le 2a$;

якщо $a = 8$, то $0 \le x < 8$;

якщо $a > 8$, то $0 \le x < x_1$, $x_2 < x \le 2a$, де $x_1 = a + 4 - \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}}$,

$x_2 = a + 4 + \sqrt{\frac{a^2 - 32}{2}}$.

РОЗДІЛ 3
РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРОМ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

Систему лінійних рівнянь з двома невідомими *x* та *y* в загальному випадку можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$$

З геометричної інтерпретації витікають наступні висновки для системи лінійних рівнянь, записаних в загальному вигляді:

а) якщо коефіцієнти рівнянь пропорційні, тобто

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

то система має безліч розвязків;

б) якщо

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2},$$

то система не має розвязків;

в) якщо

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

то система має один єдиний розв’язок.

При розв’язанні систем рівнянь з одним параметром існує два підходи.

1. Виражаємо з системи параметр *a* як функцію однієї змінної, наприклад, *x* і далі розв’язуємо це рівняння графічно у системі координат *Oxa*. Якщо відома одна змінна при різноманітних значеннях *a*, то з рівнянь системи заходжуються інші змінні.

2. Якщо розглядається система двох рівнянь відносно змінної x та y, що містить один параметр a, то можна працювати у системі координат xOy. Будуються графіки функцій, заданих рівняннями, і досліджуються перетини цих графіків в залежності від значень a.

Що стосується системи рівнянь з двома параметрами, то в цьому випадку в системі координат xOy будуються графіки функцій, заданих рівняннями, і досліджується перетин цих графіків в залежності від співвідношення значень параметра a і b.

1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x^2 - y = a \end{cases}$.

Розв'язок.

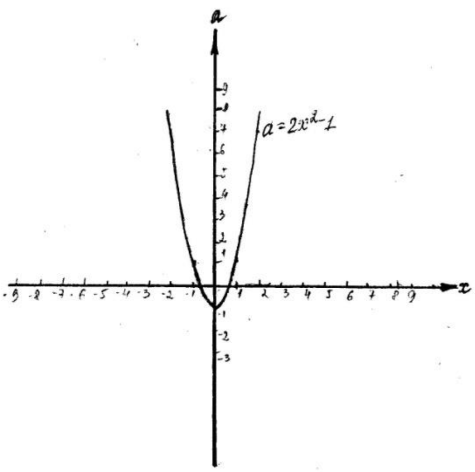
І спосіб.

$$+\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x^2 - y = a \end{cases}$$

$$2x^2 = a + 1$$
$$a = 2x^2 - 1$$

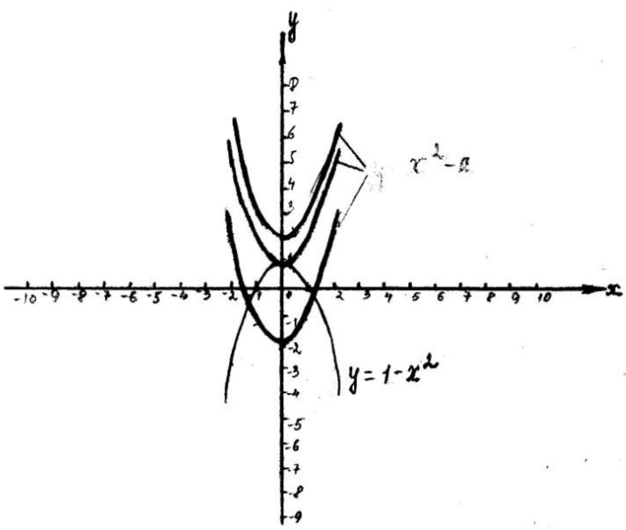
Будуємо графік цієї функції в системі координат Oxa.

x	0	1	-1	2	-2
a	-1	1	1	7	7



Якщо $a < -1$, то розв'язків нема; якщо $a = -1$, то $x = 0$, тоді $y = 1$; якщо $a > -1$, то $x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{a+1}{2}}$, тоді $y = \dfrac{1-a}{2}$, тому що $y = 1 - x^2$ з $\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ x^2 - y = a \end{cases}$.

II спосіб. В системі координат *x0y* будуємо параболу $y=1-x^2$, задану першим рівнянням. Для параболи $y=x^2-a$ (друге рівняння) можливі три розташування відносно параболі $y=1-x^2$ в залежності від значень параметра a.



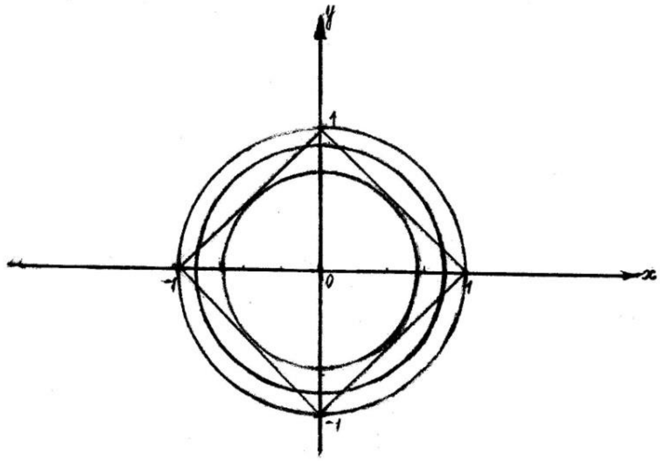
При $a<-1$ параболи не перетинаються, тобто розв'язків нема. Якщо $a=-1$, то $x=0$, $y=1$. При $a>-1$ параболи перетинаються в двох точках $\left(-\sqrt{\dfrac{a+1}{2}}; \dfrac{1-a}{2}\right)$ і $\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{2}}; \dfrac{1-a}{2}\right)$.

Відповідь: $\varnothing$ при $a < -1$; $(0;1)$ при $a = -1$; $\left(\pm\sqrt{\dfrac{a+1}{2}}; \dfrac{1-a}{2}\right)$ при $a > -1$.

2. В залежності від значень параметра *a* визначити кількість розв'язків системи $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a. \end{cases}$

Розв'язок. З геометричної точки зору кількість розвязків даної системи – це кількість точок перетину при кожному фіксованому значенні параметра a кривих, заданих рівняннями системи.

Перше рівняння задає квадрат, а друге – сімейство кіл радіуса $\sqrt{a},\ (a>0)$, з центром на початку координат (при $a=0$ коло перетворюється в точку).



А тоді очевидно, що при $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто при $a=\frac{1}{2}$, квадрат має з колом чотири спільні точки. При $\sqrt{a}=1$, тобто при $a=1$, квадрат також має з одиничним колом чотири спільні точки. При $\frac{1}{2}<a<1$ спільних точок 8. При $a<\frac{1}{2}$ і $a>1$ розв’язків нема.

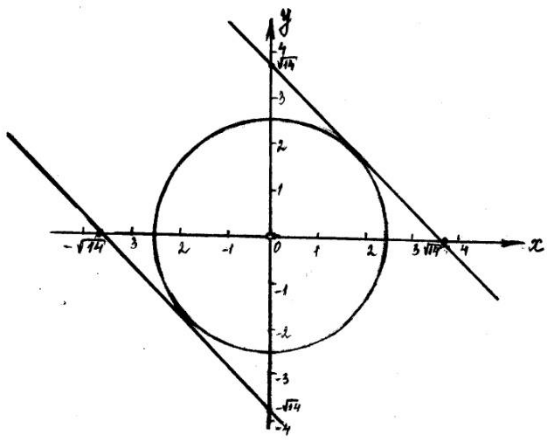
Відповідь: якщо $a<\frac{1}{2}$ і $a>1$, то розв’язків нема;

якщо $a=\frac{1}{2}$ і $a=1$, то чотири розв’язки;

якщо $\frac{1}{2}<a<1$, то вісім розв’язків.

3. При яких значеннях параметра *a* система $\begin{cases} x^2+y^2=2(a+1), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ має рівно два розв’язки?

Розв'язок. Перепишемо дану систему у вигляді $\begin{cases} x^2+y^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2, \\ |x+y|=\sqrt{14}, \end{cases}$ де по необхідності $(a+1)\ge 0$.



Перше рівняння цієї системи задає сімейство концентричних кіл з центром на початку координат, а друге – дві прямі $y=-x+\sqrt{14}$ і $y=-x-\sqrt{14}$.

Тоді існування у системі $\begin{cases} x^2+y^2=2(a+1), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ рівно двох розв'язків означає існування значення параметра *a*, при якому вказані прямі дотинались б одним із кіл сімейства

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{2(a+1)}\right)^2.$$

Вочевидь, що це буде мати місце тільки у випадку, коли

$$\sqrt{2(a+1)}=\sqrt{14}\,\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ тобто коли } a=\frac{5}{2}.$$

Відповідь: $a=\frac{5}{2}$.

ВИСНОВОК

Готуючи цю роботу, я ставила мету глибшого вивчення цієї теми, виявлення найбільш раціонального рішення, що швидко призводить до відповіді. І, здається, знайшла. На мій погляд графічний метод є найбільш зручним і швидким способом розв’язання рівнянь і нерівностей з параметром.

Моя робота просунула мене в моїх знаннях з математики, дала мені навчальну базу для розв’язання завдань з параметром графічним способом. Вона викликала бажання не кидати роботу на першому етапі, а продовжити її вивчення на більш вищому рівні.

Я думаю, що мою роботу можна використовувати як певний навчальний посібник. Вчителі загальноосвітніх шкіл можуть дати декілька уроків у старших класах, які будуть дуже корисними для учнів при вступі до ВНЗ, при здачі ЗНО. Можливо серед них знайдуться такі, котрі дуже зацікавляться завданнями подібного роду. І вони проведуть свою дослідницьку роботу, знайдуть багато нового й цікавого, а можливо, навіть у недалекому майбутньому, зможуть запропонувати який-небудь свій метод графічного розв’язування рівнянь й нерівностей, що містять параметр.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Назаренко О.М., Назаренко Л.Д. Тисяча і один приклад. Рівності і нерівності. Посібник для абітурієнта. Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1994.-272с.

2. Апостолова Галина, Ясінський Василь. Перші зустрічі з параметром. – К.: Факт, 2004. – 316 с.: іл..

3. Апостолова Галина. Хитромудрий модуль / Передм. В. Ясінського. - К.: Поліграфсервіс, 2001. – 256 с.: іл..

4. И. Кушнир. Шедевры школьной математики. Книга 1. Задачи с решениями. – К.: Астарта, 1995. – 576 с.: ил.

5. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ. пособие по математике. – Мн.: «Асар», 1996. – 464 с.: ил.