$M = \{a, b, c, \ldots\}$

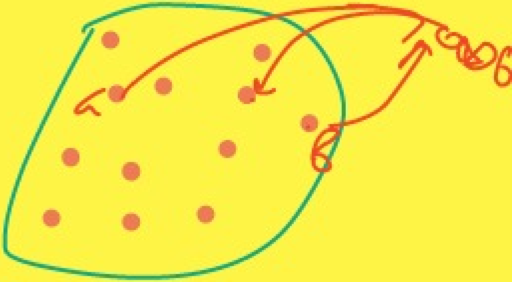
$\infty$

$M_n = \{a_1; a_2; \ldots a_n\}$

$\otimes$

$\forall a \in M$

$\forall b \in M$



$a \otimes b \in M$

A.1 Асоціативність бінарної операції "*":
a*(b*c)=(a*b)*c

A.2 Наявність нейтрального
елементу: η
a*η=η*a=a

A.3 Наявність симетричного
елементу: a'
a*a'=a'*a=η

Група

$M = \underline{R}$

$a + b \in R$

$a \cdot b \in R$

$\langle M; \oplus \rangle$ – група

$\langle R; + \rangle$

Адитивна группа (додавання) раціональних чисел

$\langle R; \cdot \rangle$ н-в

Мультпликативна група (множення) раціональних чисел

$\langle N; + \rangle$ нет

$\langle R; + \rangle \quad e = 0$

$a' = (-a)$

$\langle R; \cdot \rangle \quad e = 1$

$a' = \frac{1}{a} = a^{-1}$

# Изоморфізм груп

$\langle G; * \rangle \quad \langle a_1, a_2 \ldots a_i \rangle$

$\langle g; \circ \rangle \quad b_1 \; b_2 \ldots b_i$

$a_1 \longleftrightarrow b_1$

$a_2 \longleftrightarrow b_2$

$* \longleftrightarrow \circ$

$a_1 * a_2 \longleftrightarrow b_1 \circ b_2$

$e_{*} \longleftrightarrow e_{\circ}$

$a' \longleftrightarrow b'$

$\ln n \in R_+$

$n \in R$

$\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$

$\langle \ln a; + \rangle$

$\langle a; \cdot \rangle$

$a \leftrightarrow \ln a$

$\cdot \leftrightarrow +$

$a \cdot b \leftrightarrow \ln a +$

$\ln b =$

$= \ln ab$

Операція є комутативною

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

Множення матриць не є некомутативною групою

$A \cdot B \neq B \cdot A$

(матриці)

# О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ГРУППАХ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ
*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

**THE COMPUTATION COMPLEXITY IN GROUPS**

A. Yu. OL'SHANSKII

*Any group G can be described in terms of generators and relations. The key question is whether given two words in generators represent the same element of G or not. Examples, the setting of the algorithmic problem and formulations of some recent results on the complexity of the word problem for groups are given.*

*Любая группа G может быть задана с помощью порождающих элементов и соотношений между ними. При этом основным оказывается вопрос о существовании алгоритма для распознавания, представляют ли два слова от порождающих один и тот же элемент в G или нет. В статье приведены примеры, сформулированы проблемы и описаны недавние результаты исследований сложности проблемы слов для групп.*

www.issep.rssi.ru



[illegible]

## ПОРОЖДАЮЩИЕ

Начнем с примеров.

1. [illegible]

**GROUP CALCULUS**

A. Yu. OL'SHANSKII

*An axiomatic approach to the group definition, one of the most important in mathematics, is given. The definitions are accompanied by clear examples and exercises that are useful for optional classes at high school. A new proof of the Cauchy theorem is found not to be beyond the scope of the high-school mathematical program.*

*Представлен аксиоматический подход к понятию группы – одному из важнейших в математике. Приводимые определения сопровождаются простыми примерами и упражнениями, полезными для факультативных занятий в школе. Чтобы сделать материал не выходящим за рамки школьной программы, для теоремы Коши найдено элементарное доказательство.*



# ГРУППОВЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

[illegible]

## 2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИММЕТРИЙ

[illegible]

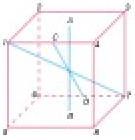


Рис. 1.

# WHAT A SEMIGROUP IS

L. N. SHEVRIN

*The paper presents the concept of semigroup and numerous examples of semigroups. Isomorphisms between semigroups are considered and, in particular, a well-known fundamental fact is proved that each semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations.*

*Статья знакомит с понятием полугруппы и многочисленными примерами полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается хрестоматийный факт, что всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.*



# ЧТО ТАКОЕ ПОЛУГРУППА

Л. Н. ШЕВРИН

*Уральский государственный университет, Екатеринбург*

[illegible]

## ВВЕДЕНИЕ

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

# GROUPS AROUND US

Pavel Etingof

## Introduction

These are notes of a mini-course of group theory for high school students that I gave in the Summer of 2009. This mini-course covers the most basic parts of group theory with many examples and applications, such as the "Fifteen" puzzle, the game "SET", the Rubik cube, wallpaper patterns in the plane. The notes contain many exercises, which are necessary for understanding the main text. A more detailed treatment of group theory in a similar style can be found in M. Artin's wonderful book "Algebra".

**Acknowledgments.** I am very grateful to my students Vladimir Bychkov, Esther Bagotsky, Konstantin Chirin, Ivan Kirillov, Elina Isbitskaia, and Michael Pevzner for curiosity and motivation, which made it exciting for me to teach this course.

## Lecture 1

### 1. Groups of transformations

**1.1. The definition of a group of transformations.** The notion of a group is one of the most important and ubiquitous notions in the entire field of mathematics. One of its primary functions is to describe symmetry. For this reason, one of the most common ways in which groups arise in nature is as groups of transformations, or symmetries, of various mathematical objects.

**Definition 1.1.** Let $X$ be a set, and let $G$ be a subset of the set of all invertible transformations (i.e., bijections) $f : X \to X$. One says that $G$ is a **group** if

1) $G$ is closed under composition, i.e., $f \circ g \in G$ if $f, g \in G$;
2) $\mathrm{Id} \in G$; and
3) If $g \in G$ then $g^{-1} \in G$.

**Definition 1.2.** If $G$ is a finite group, then the **order** $|G|$ of $G$ is the the number of elements in $G$.

**1.2. The symmetric and alternating groups.** The most obvious example of a group of transformations is the group $\mathrm{Perm}(X)$ of all transformations (or permutations) of $X$. This group is especially interesting if $X$ is a finite set: $X = \{1, \dots, n\}$. In this case the group $\mathrm{Perm}(X)$ is called **the symmetric group**, and is denoted by $S_n$. The order of this group is $n!$.

The simplest example of a permutation which is not the identity is a transposition $(ij)$, $1 \le i < j \le n$. This permutation switches $i$ and $j$ and leaves all other elements fixed. In particular, if $j = i + 1$, then $(ij)$ is called a **transposition of neighbors**. It is clear that any permutation is a composition of transpositions of neighbors.

For every permutation $s \in S_n$, we have a notion of the sign of $s$. Namely, let $\mathrm{Inv}(s)$ be the number of inversions of $s$, i.e., the number of pairs $i < j$ such that $s(i) > s(j)$. Then $s$ is said to be even (respectively, odd) if $\mathrm{Inv}(s)$ is even (respectively, odd), and one defines $\mathrm{sign}(s)$ to be $(-1)^{\mathrm{Inv}(s)}$.

**Proposition 1.3.** For any representation of $s$ as a composition of $N$ transpositions of neighbors, $\mathrm{sign}(s) = (-1)^N$.