

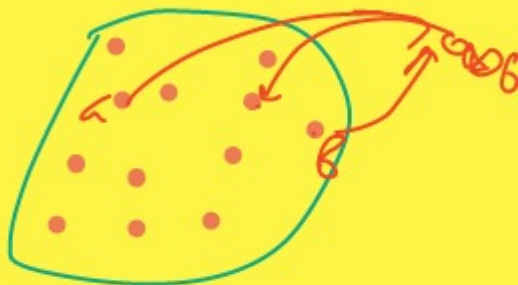
$$M = \{a, b, c, \dots\}$$

$$M_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

(X)

$$\forall a \in M$$

$$\forall b \in M$$



(X) $\forall b \in M$

A.1

Асоціативність бінарної операції "*" :
 $a*(b*c) = (a*b)*c$

A.2

Наявність нейтрального
елементу: η
 $a*\eta = \eta*a = a$

A.3

Наявність симетричного
елементу: a'
 $a*a' = a'*a = \eta$

}
Г
Р
У
17
9

$$M = \underline{\mathbb{R}}$$

$$a + b \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot b \in \mathbb{R}$$

$\langle M; \oplus \rangle$ - група

$\langle \mathbb{R}; + \rangle$

Адитивна група (додавання)
раціональних чисел

$\langle \mathbb{R}; \cdot \rangle$ $n = b$

Мультиплікативна група (множення)
раціональних чисел

$$\langle N; + \rangle \quad \eta = +1$$

$$\langle R; + \rangle \quad \eta = 0$$
$$a' = (-a)$$

$$\langle R; \circ \rangle \quad \eta = -1$$

$$a' = \frac{1}{a} = a^{-1}$$

Изоморфізм груп

$$\langle G, * \rangle \cong \langle \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \cdot \rangle$$

$$\langle G, \circ \rangle \cong \langle \{b_1, b_2, \dots, b_n\}, \cdot \rangle$$

$$a_1 \leftrightarrow b_1$$

$$a_2 \leftrightarrow b_2$$

$$* \leftrightarrow \circ$$

$$a_1 * a_2 \leftrightarrow b_1 \circ b_2$$

$$b_1 \leftrightarrow b_0$$

$$a_1' \leftrightarrow b_1'$$

$$\ln n \in \mathbb{R}_+$$

$$n \in \mathbb{R}$$

$$\ln a + \ln b = \ln a \cdot b$$

$$\langle \ln a; + \rangle$$

$$\langle a; \cdot \rangle$$

$$a \leftrightarrow \ln a$$

$$\cdot \leftrightarrow +$$

$$a \cdot b \leftrightarrow \ln a + \ln b$$

$$\ln a \cdot b =$$

$$= \ln a + \ln b$$

Операція є комутативною

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a + b = b + a$$

Множення матриць не є некомутативною групою

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

(матриці)

О СЛОЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ГРУППАХ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Математический институт имени Л.В. Канторовича

THE COMPUTATION COMPLEXITY
IN GROUPS

A. Yu. OLSHANSKIY

Any group G can be described in terms of generators and relations. The key question is whether given two words in generators represent the same element of G or not. Examples, the setting of the algorithmic problem and formulations of some recent results on the complexity of the word problem for groups are given.

Любая группа G может быть задана с помощью порождающих элементов и соотношений между ними. При этом основным становится вопрос о существовании алгоритма для распознавания, представляют ли два слова из порождающих для G тот же элемент в G или нет. В статье приведены примеры, формулировки проблемы и основные недавние результаты исследования сложности проблемы слова для групп.

www.iisgpr.msu.ru

Группы возникают в математических задачах с очевидностью и естественностью. Для их изучения в советское время в основном повсюду существовало общество любителей и "Саратовское Образовательное Журналистское" общество [1, 2]. Известно, что группа Гильберта оказалась неуправляемой, однако в последние годы появились работы [3, 4] о том, что в S_N группа Брайера имеет свойства, аналогичные свойствам n и N , причем последние являются самыми известными: доказано $n \in O$ G , такой, что $ab = ba = a$ для любого $a \in G$ и наоборот (только $a \in O$. Последнее утверждение $b = a^{-1}a \in O$, так, что $ab = ba = a$). Но также не исключено, что для некоторых n и N , некоторые другие свойства группы G являются неопределимыми [5].

Для эффективного вычисления производных в группе G важно быть способным с помощью операции свертки от элементов. Во многих случаях так называют группы. Эти свойства связаны с понятием языка теории групп (в частности, с понятием теории групп). Для этого требуется доказать, что элементы группы G являются группами. Эти вопросы являются частью теории групп и связаны с понятием групповой теории групп.

Но если в группе G можно доказать, что группа G является группой, то в группе G можно доказать, что группа G является группой. Но если G является группой, то в группе G можно доказать, что группа G является группой. Мы ищем именно такую группу, которая не является группой. — Проблема распознавания равенства слов в группах.

ПРЕЖДЕВРЕМЕННО

Начало с примеров.

1. Выберем произвольный набор элементов F и G , где F и G — это некие элементы. Пусть F, G — это все возможные комбинации элементов F и G . Тогда F, G — это все возможные комбинации элементов F и G . Тогда F, G — это все возможные комбинации элементов F и G .

GROUP CALCULUS

A. Yu. OLSHANSKIĀ

An axiomatic approach to the group definition, one of the most important in mathematics, is given. The definitions are accompanied by clear examples and exercises that are useful for optional classes of high school. A new proof of the Cauchy theorem is found not to be beyond the scope of the high-school mathematical program.

Представлен аксиоматический подход к понятию группы — одному из важнейших в математике. Приводятся определения сопровождаются простыми примерами и упражнениями, полезными для факультативных занятий в школе. Чтобы сделать материал не выходящим за рамки школьной программы, дано новое доказательство теоремы Коши методом элементарного доказательства.

ГРУППОВЫЕ ИСЧИСЛЕНИЯ

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

1. ВВЕДЕНИЕ

Возникает ли математика изобретением определений и доказательств в виде аксиоматического действия с частями. В статье [1] мы обратили внимание на важную роль вычисления в геометрии геометрических фигур или множествах от вычисления длиноты. Такая роль вычисления естественно играть в математике групп преобразований. Теперь мы вернемся к обычной геометрии группы, который мыслится сейчас на абстрактном и аксиоматическом уровне. Не все различные случаи доказаны на аксиоматическом уровне в эту возможность. Не хватает примеров, мы вернемся к ним позже в разделе 2. Стоит спросить себя, можно ли читать или заниматься с настоящим учебным материалом от преподавателей. На практике не представляется возможным изучать материал в полной программе.

2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ СИММЕТРИЙ

Известно с примеров. Существует ли такое пространство, симметрично кубу или 12 к своим ребрам? Перемены в пространстве симметрии. Во-первых, мы хотим рассмотреть элементарные преобразования, или как они называются сейчас на своем месте. Во-вторых, проведем ось AB через середину противоположных ребер, проведем три различных перпендикулярных плоскости этой оси из точек 90° , 180° и 270° (У куба три такие оси). В-третьих, около диагонали $1-7$ куба можно поворачивать на 120° и 240° . Наконец, около оси CD , проведенной через середины противоположных ребер, куб можно повернуть на



Рис. 1.

WHAT A SEMIGROUP IS

L. I. SHEVCH

The paper presents the concept of semigroup and presents examples of semigroups. Isomorphism between semigroups are considered and, in particular, a well-known fundamental fact is proved that each semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations.

Статья знакомит с понятием полугруппы и приводит примеры полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается классический факт, что каждая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

ЧТО ТАКОЕ ПОЛУГРУППА

В. Н. ШЕВРИН

Математический факультет Саратовского государственного университета

— В статье вводится понятие полугруппы и приводятся примеры полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается классический факт, что каждая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

Шевр В.Н.

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение, закрепление и развитие понятия изоморфизма полугруппы в математике и теории полугрупп началось еще в фундаментальной монографии «Фундаментальный анализ полугрупп»¹⁾. Развитие понятия и изучение свойств теории полугрупп это название обрела развитие идеи полугруппы на многих направлениях математики, в частности в функциональном анализе. Стремление к более глубокому изучению теории полугрупп началось в 40-е годы. В первую очередь это началось в области теории полугрупп, как предельного случая полугруппы по отношению к другим классам теории полугрупп (как, например, теория полугруппы с обратными элементами)²⁾. Однако это направление теории фундаментального анализа. Вообще же понятие полугруппы — часть алгебраической теории, связанной с понятием группы. Однако область исследования и методы других областей математики (в частности в геометрии).

Несомненно, что для изучения полугруппы необходимо изучать группу и, наоборот, изучая группу, необходимо изучать полугруппу. Таким образом, можно сказать, что в функциональном анализе, наряду с группой, роль полугруппы весьма велика. Это связано с тем, что полугруппы являются естественным обобщением группы на неабелевы группы. Поэтому в последние годы изучение полугрупп является весьма интересным направлением математики, как в алгебраической теории, так и в геометрии.

Объекты, что являются предметом исследования полугрупп (как правило, конечно или бесконечно) называются полугруппами [1]. В дальнейшем предполагается

¹⁾Полугруппы и изоморфизмы полугруппы рассмотрены в монографии «Фундаментальный анализ полугрупп» (И. П. Шейнберг, М.: Наука, 1978).
²⁾Для изучения полугруппы с обратными элементами (полугруппы с обратными элементами) см. монографию «Полугруппы с обратными элементами» (И. П. Шейнберг, М.: Наука, 1978).

GROUPS AROUND US

Pavel Etingof

Introduction

This is a review of a mini-course of group theory for high school students that I gave in the Summer of 2009. This mini-course covers the most basic parts of group theory with many examples and applications, such as the “Fifteen” puzzle, the game “SET”, the Rubik cube, solving problems in the plane. The author contains many exercises, which are necessary for mastering the basic part. A more detailed treatment of group theory in a suitable style can be found in M. Artin’s wonderful book “Algebra”.

Acknowledgments. I am very grateful to my students Valerian Sorjag, Esther Baggett, Konstantin Chiriac, Ion Grilloa, Elisă Străduț, and Mircea Păulea for curiosity and motivation, which made it exciting for me to teach this course.

Lecture 1

1. GROUPS OF TRANSFORMATIONS

1.1. The definition of a group of transformations. The notion of a group is one of the most important, and ubiquitous, notions in the whole field of mathematics. One of its primary functions is to describe symmetry. For this reason, one of the first concrete ways in which groups arise in nature is as groups of transformations, or symmetries, of various mathematical objects.

Definition 1.1. Let X be a set, and let G be a subset of the set of all invertible transformations (i.e., bijections) $f: X \rightarrow X$. One says that G is a group if

- 1) G is closed under composition, i.e., $f \circ g \in G$ if $f, g \in G$;
- 2) $1 \in G$; and
- 3) if $g \in G$ then $g^{-1} \in G$.

Definition 1.2. If G is a finite group, then the order $|G|$ of G is the the number of elements in G .

1.2. The symmetric and alternating groups. The most obvious example of a group of transformations is the group $\text{Perm}(X)$ of all transformations (or permutations) of X . This group is especially interesting if X is a finite set: $X = \{1, \dots, n\}$. In this case the group $\text{Perm}(X)$ is called the symmetric group, and is denoted by S_n . The order of this group is $n!$.

The simple $(n, 2)$ -cycle (or $(n, 2)$ -permutation) which is not the identity is a transposition (ij) , $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$. This permutation switches i and j and leaves all other elements fixed. In particular, if $j = i + 1$, then (ij) is called a transposition of neighbors. It is clear that any permutation is a composition of transpositions of neighbors.

For every permutation $\sigma \in S_n$ we have a notion of the sign of σ . Namely let $\text{inv}(\sigma)$ be the number of inversions of σ , i.e., the number of pairs $i < j$ such that $\sigma(i) > \sigma(j)$. Then σ is said to be even (respectively, odd) if $\text{inv}(\sigma)$ is even (respectively, odd), and one defines $\text{sign}(\sigma)$ to be $(-1)^{\text{inv}(\sigma)}$.

Proposition 1.3. For any representation of σ as a composition of N transpositions of neighbors, $\text{sign}(\sigma) = (-1)^N$.