

NUMBERS  
AS OPERATORS

V. A. BRUSILIN

An approach to numbers as to operators over corresponding vectors is presented. Real and complex numbers are interpreted in a crafted fashion with the usage and losing its physical sense. The exponential functions, that are introduced as solutions of the simplest linear differential equations, are used.

Комплексная поправка к числу как к оператору над соответствующими векторами. С этой поправкой как действительными, так и комплексными числами получают однообразную трактовку. При этом с помощью формулы становится математический смысл. Иллюстрируется использование экспоненциальных функций, которые вводятся как решения простейших дифференциальных уравнений.

## ЧИСЛА КАК ОПЕРАТОРЫ

В. А. БРУСИЛИН

Интерпретация чисел как операторов над соответствующими векторами

## Введение

Натуральные числа являются одним из первых объектов, с которыми абстрактно мыслящий человек сталкивается при изучении математики. Однако понятие натурального числа, такое как оно встречается в повседневной жизни, является весьма сложным. Однако с этой целью для комплексной интерпретации чисел вводится понятие  $\frac{1}{2}$ -числа, то есть числа  $n + \frac{1}{2}$ , где  $n$  — целое и  $n \geq 0$ . Для нас это понятие имеет следующее значение.

Матрица  $\frac{1}{2}$ -числа имеет вид ортогональной матрицы вращения. Векторы  $\frac{1}{2}$ -числа можно считать соответствующими проекциям комплексной плоскости — проекции на единичный круг. Таким образом,  $\frac{1}{2}$ -числа являются комплексными.

Обычные действительные числа являются действительными числами, а  $\frac{1}{2}$ -числа являются комплексными. Полюсы экспоненты для  $\frac{1}{2}$ -числа имеют вид  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ , а действительная часть экспоненты имеет вид  $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ . Таким образом, экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с комплексными значениями. Этого можно достигнуть, если использовать комплексную экспоненту с действительными значениями.

Существенным является то, что экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями. Таким образом, экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями.

Натуральные числа являются комплексными числами, а  $\frac{1}{2}$ -числа являются действительными числами. Таким образом, экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями. Таким образом, экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями.

Существенным является то, что экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями. Таким образом, экспоненциальная функция  $\frac{1}{2}$ -числа является экспонентой с действительными значениями.

## NUMBER SYSTEMS

V. V. SILVESTROV

The paper deals with procedures and principles of constructing of number systems generalizing real numbers. The examples are: complex, double and dual numbers, quaternions, octaves, Pauli's numbers. The matrix representation of certain numbers is considered.

Рассмотрены способы и принципы построения систем чисел, обобщающих действительные числа. Приводятся примеры: комплексные, двойные и дуальные числа, кватернионы, октавы, числа Паули. Рассмотрены матричные формы представления некоторых чисел.

## СИСТЕМЫ ЧИСЕЛ

В. В. СИЛЬВЕСТРОВ

рассмотрены процедуры построения систем чисел, обобщающих действительные

## введение

Проблема нахождения способов и принципов построения систем чисел, обобщающих действительные числа, имеет давнюю историю. В XVII веке (примерно в 1643 г.) французский математик Блеза Паскаль ввел в употребление комплексные числа, которые, однако, долгое время считались вымышленными. В XVIII веке (примерно в 1749 г.) немецкий математик Леонард Эйлер ввел в употребление двойные комплексные числа, обобщающие комплексные числа. В XIX веке (примерно в 1843 г.) американский математик Джозеф Фуриер ввел в употребление кватернионы, а в 1848 г. английский математик Уильям Рамси ввел в употребление октавы. В XX веке (примерно в 1927 г.) американский математик Джон Ван Влиет ввел в употребление дуальные числа, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 1990-е гг.) введены в употребление числа Паули, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2000-е гг.) введены в употребление двойные комплексные числа, обобщающие комплексные числа. В настоящее время (примерно в 2010-е гг.) введены в употребление дуальные числа, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2020-е гг.) введены в употребление октавы, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2030-е гг.) введены в употребление числа Паули, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2040-е гг.) введены в употребление двойные комплексные числа, обобщающие комплексные числа. В настоящее время (примерно в 2050-е гг.) введены в употребление дуальные числа, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2060-е гг.) введены в употребление октавы, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2070-е гг.) введены в употребление числа Паули, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2080-е гг.) введены в употребление двойные комплексные числа, обобщающие комплексные числа. В настоящее время (примерно в 2090-е гг.) введены в употребление дуальные числа, обобщающие действительные числа. В настоящее время (примерно в 2100-е гг.) введены в употребление октавы, обобщающие действительные числа.

## ПРОЦЕДУРА УДОБНАЯ ГРАССМАНА-КЛИФОРДА

## 1-й шаг. Комплексные, двойные и дуальные числа

Пусть  $a, b \in \mathbb{R}$  — произвольные действительные числа. Рассмотрим комплексное число  $z$ :

$$z = a + bi, \quad (1)$$

где  $i$  — мнимый знакочислитель, характеризующий действительные числа при умножении, то есть  $i^2 = -1$ . Если  $a, b \in \mathbb{R}$ , то действительная часть  $\text{Re}(z) = a$ , а мнимая часть  $\text{Im}(z) = b$ , то есть

$$z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z). \quad (2)$$





## ВІД РЕДАКЦІЇ

Шевченко Георгій Михайлович,

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**Ш**любні читачі! Пропонуємо до вашої уваги новий випуск науково-популярного журналу «У світі математики». Із присмітливо відзначаємо, що в новому випуску багато статей написано молодими математиками – школярами та студентами. Сподіваємося, що така тенденція зберігатиметься і надалі.

З моменту виходу попереднього номеру в математиці відбулося багато визначних подій. У Празі відбувся світовий математичний конгрес, де премія Вольфа (ця премія, що поступається авторитетом лише Нобелівській) було нагороджено українського й американського математика Володимира Дрінфельда. Інший видатний математик Майкл Атья (теж лауреат премії Вольфа) заявив про просте доведення гіпотези Римана, проте математична спільнота віднеслася до цього доведення скептично.

Зближачи до нас події відмітимо 80-річчя академіка НАН України, директора Інституту математики НАН України Анатолія Михайловича Самойленка. Про нього в рубриці «Видатні постаті» оповідають його учні та колеги з Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Про інші визначні дати і цікаві події розповіла в «Математичному календарі» його редактор Ірина Боднарчук.

Нинішній номер видався доволі геометричним, у «Математичному гуртку» одразу дві геометричні статті. Призери

міжнародних олімпіад Федір Юлія і Нікіта Скибницький розповідають про тригонометричну форму відомої теореми Птолемея. Геометричну тематику продовжує замітка Євгена Турчина, у якій розповідається, як просту ідею можна використати для доведення різноманітних тригонометричних нерівностей.

Мабуть, зтомившись від циркуля та лінійки, Євгеній Азаров і Тарас Тимошківич в рубриці «Математичні обрії» вирішили розглянути побудови за допомогою відмінних від кола кінцевих перерізів. У цьому номері вони замінюють циркуль інструментом для побудови парабол, та показують, що за його допомогою можна не лише виконати всі ті самі побудови, що й циркулем з лінійкою, але й розв'язати задачі трисекцій кута та подвоєння куба, в яких циркуль та лінійка безсилі.

Дуже докладно, із історичними екскурсами та численними ілюстраціями, є розповідь Василя Талеєва про зображення тетраедра на площині.

У минулому році відбувся ювілейний XX Турнір юних математиків. Йому присвячено статтю Івана Васильовича Федька, яка крім розповіді про турнір містить розв'язання вибраних завдань.

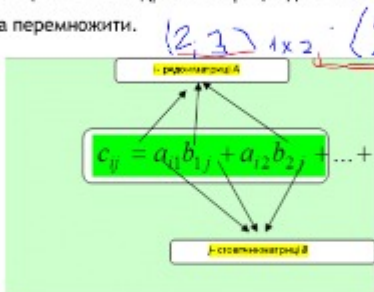
Безлиси дорозі час – сідлай на велосипед! Студентську сторінку відкриває розповідь Олександра Єню про те, як математично правильно змастити велосипедний цеп.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ тоді}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Добутком матриці  $A$  розмірів  $m \times k$  та матриці  $B$  розмірів  $k \times n$  називається матриця  $C$  розмірів  $m \times n$ , яка позначається  $AB$ . Елемент  $c_{ij}$  цієї матриці - це сума попарних добутків елементів  $i$ -го рядка матриці  $A$  та елементів  $j$ -го рядка матриці  $B$ , а саме:  $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$  правило „рядок на стовпчик“.

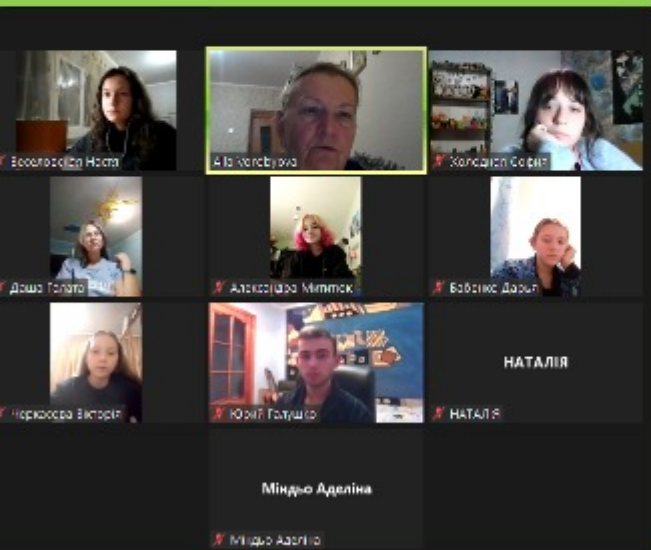
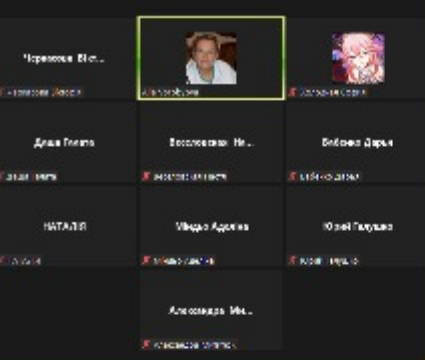
Якщо  $A$  та  $B$  квадратні матриці однакового порядку, то їх завжди можна перемножити.



Справедливі такі властивості операцій множення матриць:

- $(AB)C = A(BC)$ ; асоціативність множення матриць.
- $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$ ;
- $(A+B)C = AC + BC$ ; дистрибутивність множення (лівосторонній закон)
- $C(A+B) = CA + CB$ ; дистрибутивність множення (правосторонній закон)
- $A \cdot O = O \cdot A = O$ ; e)  $AE = EA = A$ ;
- в загальному випадку  $A \cdot B \neq B \cdot A$ ; - не комутативність множення.

Зауважимо, що в школі вивчаються комутативні математичні операції. В перше я ознайомився з не комутативними математичними об'єктами.













## WHAT A SEMIGROUP IS

L. N. SHEVRIN

The paper presents the concept of semigroup and numerous examples of semigroups. Isomorphisms between semigroups are considered and, in particular, a well-known fundamental fact is proved that each semigroup is isomorphic to some semigroup of transformations.

Статья знакомит с понятием полугруппы и многочисленными примерами полугрупп. Рассматриваются изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказывается известный фундаментальный факт, что каждая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

## ЧТО ТАКОЕ ПОЛУГРУППА

Л. Н. ШЕВРИН

Ученый сотрудник университета, Великобритания

... В этой статье излагается так называемое понятие полугруппы и приводятся многочисленные примеры полугрупп. Рассмотрены также изоморфизмы полугрупп и, в частности, доказан известный фундаментальный факт, что каждая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

Людмила Шейрин

## ВВЕДЕНИЕ

Введение, посвященное полугруппе, принадлежит известному американскому математику Я. Хиншу и содержится в предисловии к первому изданию его фундаментальной монографии "Фундаментальная алгебра и полугруппы"<sup>1</sup>. Рассказывая о укоренившейся конструкции полугруппы, это издание обобщает ранее введенную полугруппу на нелинейные векторы, представляя, следовательно, фундаментальную алгебру. Соответствующая теория — топическая теория полугрупп — возникла в 40-х годах. В эту пору эссе Я. Хинша о полугруппах предисловие, как представляется, обобщает "предание" по поводу все время доступной теории коммутативных ассоциативов<sup>2</sup>; теория, что было на протяжении тысячелетий фундаментальной алгебры. В обобщенном виде полугруппы — чисто алгебраические объекты, ставшие основой развития большой области современной алгебры и являющиеся в различных приложениях алгебры, а также также в различных областях теории автоматов, теории языков, математической лингвистики и многих других областях, включая даже биологию и социологию.

Несомненно, что для изучения интереснейших свойств полугрупп, особенно в последние годы, многие математики начали с изучения их в качестве алгебр. Однако, как было сказано выше, полугруппы не являются алгебрами, и поэтому, естественно, возникает вопрос, что же такое полугруппы и как они соотносятся с алгебрами. Ответ на этот вопрос был дан в 1941 году Я. Хиншем, который доказал, что каждая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований.

Отметим, что некоторые примеры и свойства полугрупп (иногда удачно применяя понятие группы) даны в статье автора [2]. В дальнейшем рассмотрим

<sup>1</sup> Понятие полугруппы и соответствующая конструкция являются ее ключевыми понятиями. См. также [1]. Для дальнейшего обсуждения см. [3]. Отметим также, что в русском переводе этой книги, вышедшем в издательстве ИГиЛ в 1961 году, фамилия автора Я.Н. Хинша была неправильно переведена как Хинс.

гурток МАН - I Математика 2021

Софія АДТ

Даша Гаата 8 класс. ЮЗШ №2

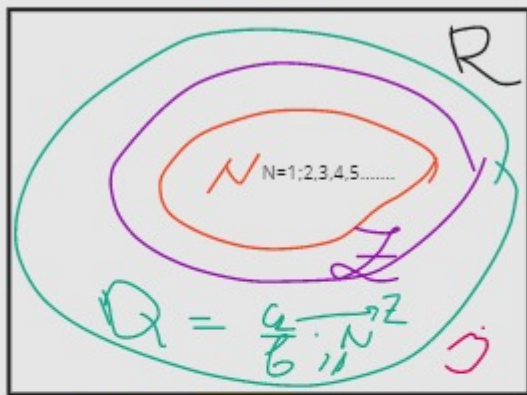
Бабенко Даша 8 клас. АДТ.



Веселовська Анастасія 8-А

Мішійук Олександра 9-Б





Числа скаляри  
 натуральні  $\mathbb{N}$   
 цілі  $\mathbb{Z}$   
 раціональні  $\mathbb{Q}$   
 ірраціональні  $\mathbb{R}$   
 комплексні  $\mathbb{C}$

**МАТРИЦІ**

**Вектори**

$\vec{a} (a_1, a_2, a_3, \dots)$   
 $\mathbb{R}^3 \vec{a} (a_1, a_2, a_3)$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$   
 $2 \times 2$

$M_{ij}$  тензори  $\sigma_{ij}$

приклади

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 4} = \\ = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}_{2 \times 4}$$

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3} = A$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = -2 \\ 4x + 7y = 11 \end{cases}$$

$$13y = 13$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$

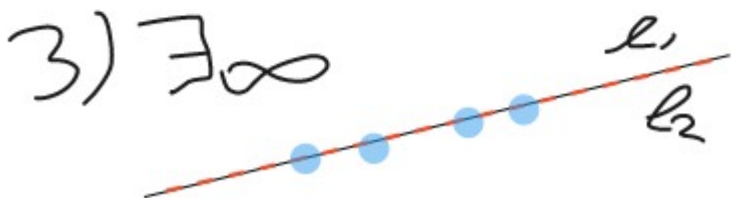
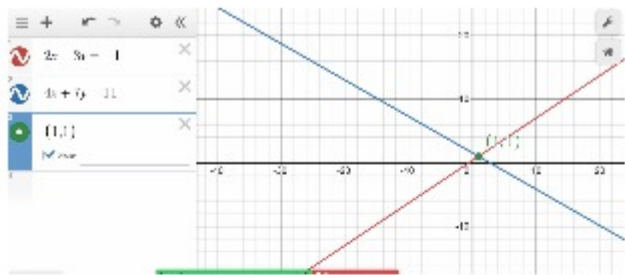
$$2x - 3 = -1$$

$$2x = 2$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$B: (1, 1)$$





$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad 4/2$$

$$\underline{A \cdot X = B}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$X = B \cdot A^{-1}$$