SUNFLOWER BLUEBIRD
Як зацікавити математикою
Заняття 3:
Я бачу!
Методи розв'язування задач на алгебраїчні тотожності

Діліться своїми задачами, рішеннями, моделями, історіями і творчістю:
https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/

***бачити**, дієслово*
1. Сприймати очима, спостерігати.
2. Добре розуміти, усвідомлювати.

— Словник української мови: в 11 томах. — Том 1, 1970. — Стор. 114.

ОГОЛОШЕННЯ Приєднуйтеся до Sunflower Bluebird MTC і беріть участь в активностях із колегами. П'ятниця, 9 грудня, 18:00-20:00 за Києвом. Реєстрація: **https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/**

МАТ-ЖАРТ
- Які три типи людей ви знаєте?
- Ті, які вміють рахувати, і які не вміють.

Натхнення: Творчість корінних американців і старої Європи

Що ми бачимо, дивлячись на твір мистецтва? Краса, гармонія, приємний баланс кольорів і форм? Народне мистецтво зображує вірування та має велике культурне значення. Чи можемо ми розпізнати віру чи ідею на кожному з трьох зображень праворуч? Що *ви* бачите? Дайте відповідь перед тим, як прочитати наступний абзац.


1.

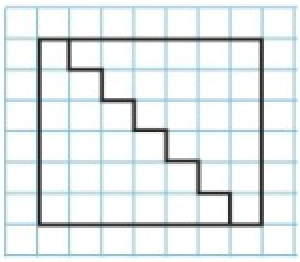

2.


3.

1. *М'який кошик хопі, невідомий автор.* Кошики виготовляють із рослин, підкреслюючи зв'язок із землею. "М'які кошики відіграють складну роль у суспільстві хопі. Їх дарують жінки на знак подяки, а також на релігійні свята. Ці кошики також використовуються під час церемоній і відіграють особливо важливу роль у церемоніях посвяти дівчат хопі." https://blog.kachinahouse.com/a-history-of-hopi-basketry/
2. *Весільний кошик навахо, невідомий автор.* Кожен елемент дизайну має важливе значення. Наприклад, зовнішня смуга означає людей, тварин і рослини; наступні смуги символізують Шлях Сонця, потім Шлях Місяця та Шлях Сузір'їв. Інші елементи включають Землю, різні типи гір, сонячне проміння та веселку, хмари та різні типи дощу, місце появи, святих людей, схід і світанок. Детальне пояснення: @nizhinibahnavajo у Instagram https://www.instagram.com/p/7yhPV7O99o/
3. *Пітер Клас, Натюрморт із запаленою свічкою, 1627, Мауріцгейс, Гаага, Нідерланди.* Одна з можливих ідей, що передає нам художник: *Час життя летить, поспішайте здобувати знання.* Традиційно, *свічка* має багато значень. Одне з них - це плин часу. *Книги* простіше: вони означають навчання чи передачу знань.

Чи бачите ви інші послання в цих витворах мистецтва? Поділіться своїми ідеями: **https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/** або приходьте на заняття й розкажіть нам!

Розминка: Бачити в обох сенсах (Що я спостерігаю?)



1. Що ми бачимо?
2. Чи можна порахувати кількість клітинок всередині прямокутної рамки? Який найпростіший спосіб це зробити?
3. Скільки клітинок під "сходами"? *Підказка*: напишіть вираз, але не обчислюйте його значення. Приклад математичних виразів (не пов'язані з рисунком): (a) $3 + 18 - 26$; (b) 17×19; (c) $2 \times (4 + 6 + 12)$; (d) $x^2 + y^2$
4. Скільки клітинок над "сходами"? *Підказка*: напишіть вираз, але не обчислюйте його значення.
5. Що ми бачимо?

SUNFLOWER BLUEBIRD
Як зацікавити математикою
Заняття 3:
Я бачу!
Методи розв'язування задач на алгебраїчні тотожності

Діліться своїми задачами, рішеннями, моделями, історіями і творчістю:
https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/

***бачити**, дієслово*
1. Сприймати очима, спостерігати.
2. Добре розуміти, усвідомлювати.

— Словник української мови: в 11 томах. — Том 1, 1970. — Стор. 114.

ОГОЛОШЕННЯ Приєднуйтеся до Sunflower Bluebird MTC і беріть участь в активностях із колегами. П'ятниця, 9 грудня, 18:00-20:00 за Києвом. Реєстрація: https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/

МАТ-ЖАРТ *- Які три типи людей ви знаєте?*
- Ті, які вміють рахувати, і які не вміють.

Натхнення: Творчість корінних американців і старої Європи

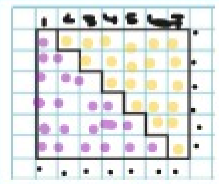
Що ми бачимо, дивлячись на твір мистецтва? Краса, гармонія, приємний баланс кольорів і форм? Народне мистецтво зображує вірування та має велике культурне значення. Чи можемо ми розпізнати віру чи ідею на кожному з трьох зображень праворуч? Що *ви* бачите? Дайте відповідь перед тим, як прочитати наступний абзац.


1. 2. 3.

1. *М'який кошик хопі, невідомий автор.* Кошики виготовляють із рослин, підкреслюючи зв'язок із землею. "М'які кошики відіграють складну роль у суспільстві хопі. Їх дарують жінки на знак подяки, а також на релігійні свята. Ці кошики також використовуються під час церемоній і відіграють особливо важливу роль у церемоніях посвяти дівчат хопі." https://blog.kachinahouse.com/a-history-of-hopi-basketry/
2. *Весільний кошик навахо, невідомий автор.* Кожен елемент дизайну має важливе значення. Наприклад, зовнішня смуга означає людей, тварин і рослини; наступні смуги символізують Шлях Сонця, потім Шлях Місяця та Шлях Сузір'їв. Інші елементи включають Землю, різні типи гір, сонячне проміння та веселку, хмари та різні типи дощу, місце появи, святих людей, схід і світанок. Детальне пояснення: @nizhinibahnavajo у Instagram https://www.instagram.com/p/7yhPV7O99o/
3. *Пітер Клас, Натюрморт із запаленою свічкою, 1627, Мауріцгейс, Гаага, Нідерланди.* Одна з можливих ідей, що передає нам художник: *Час життя летить, поспішайте здобувати знання.* Традиційно, *свічка* має багато значень. Одне з них - це плин часу. *Книги* простіше: вони означають навчання чи передачу знань.

Чи бачите ви інші послання в цих витворах мистецтва? Поділіться своїми ідеями: https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/ або приходьте на заняття й розкажіть нам!

Розминка: Бачити в обох сенсах (Що я спостерігаю?)



1. Що ми бачимо?
2. Чи можна порахувати кількість клітинок всередині прямокутної рамки? Який найпростіший спосіб це зробити?
3. Скільки клітинок під "сходами"? *Підказка:* напишіть вираз, але не обчислюйте його значення. Приклад математичних виразів (не пов'язані з рисунком):

(a) $3 + 18 - 26$; (b) 17×19; (c) $2 \times (4 + 6 + 12)$; (d) $x^2 + y^2$

4. Скільки клітинок над "сходами"? *Підказка:* напишіть вираз, але не обчислюйте його значення.
5. Що ми бачимо?

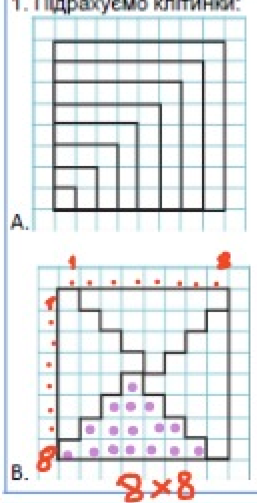
6×7 = 42

$\frac{(1+6)}{2} 6 = 7 \cdot 3 = 21$

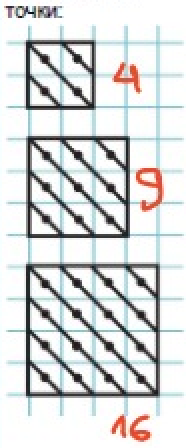
1 2 3 4 5 6

Що я бачу?

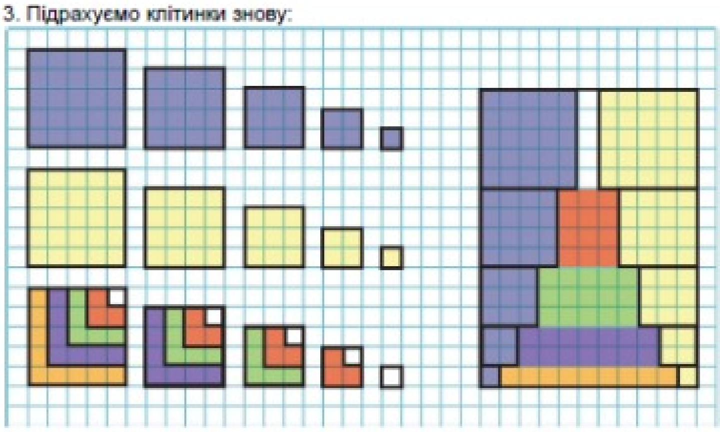
1. Підрахуємо клітинки:



2. Підрахуємо точки:



3. Підрахуємо клітинки знову:



Підказка: Який зв'язок між лівою та правою частинами рисунка?

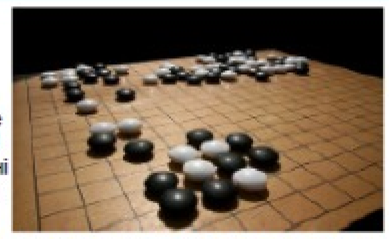
Запитай у синьої пташки

ЗАПИТАННЯ — *Чому математика так дратує?* Brian Z.

ВІДПОВІДЬ — Це чудове запитання, оскільки багато людей це відчувають, але не наважуються запитати. І все-таки ми, математики, знаємо, що запитувати про все на світі це добре. Почнемо з розбору значення слова "дратує": *"Речі, які дратують, це ті, що часто відволікають, переривають або втручаються у те, що ви намагаєтеся зробити, як-от шум, який не дає розслабитися, коли ви намагаєтеся заснути, або спливаюча реклама"* (з https://www.dictionary.com/browse/annoying.)

Це воно! Центральним заняттям у математиці є розв'язування задач. Коли ви почнете розв'язувати, задача продовжуватиме непокоїти вас, доки ви її не вирішите. Ви можете боротися з нею протягом хвилини, години або дня. Або все ваше життя – якщо задача цікава і ви сповнені рішучості «перемогти» її. Але є винагорода: момент, коли ви раптово знаходите розв'язок, наповнює вас неймовірною радістю. Що довше ви боролися, то більша радість. Займатися математикою — це все одно, що шукати скарби, де скарби створені шукачем, і через це вони ще цінніші.

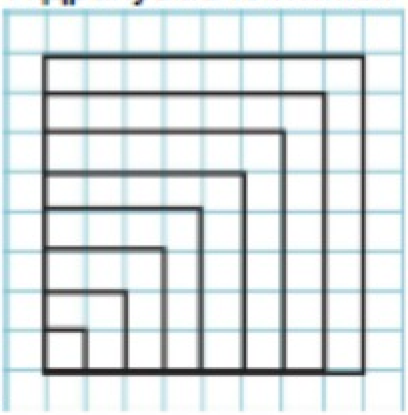
ЦІКАВИЙ ФАКТ 11 травня 1997 року шаховий гросмейстер і чемпіон світу Гаррі Каспаров здався після 19 ходів у партії проти Deep Blue, шахового комп'ютера, розробленого вченими IBM.



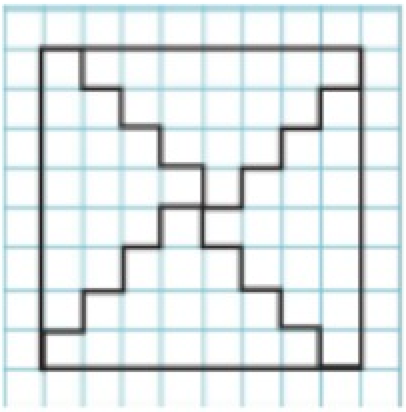
У той час дослідники штучного інтелекту вважали, що комп'ютер ніколи не переможе людини-експерта в іншій настільній грі - го. У винайдену в Китаї в 6 столітті до нашої ери гру го, комп'ютеру набагато важче грати, ніж у шахи. Гравці використовують чорні та білі камінці на квадратному полі з 19×19 точок, і правила є дуже простими. Однак кількість різноманітних можливих розташувань камінців зашкалює понад 10^{100}, унеможливлюючи комп'ютерну гру за допомогою повного перебору. Тим не менш, через вісімнадцять років машина нарешті перемогла професійного гравця в го. Більше того, машина перемогла не завдяки неймовірній обчислювальній потужності, а завдяки використанню інструментів машинного навчання, які дозволяють їй самонавчатися та думати більше, як люди. Щоб досягти цього, комп'ютерні вчені розробили програму, яка базується на «глибоких нейронних мережах» — комп'ютерних програмах, які імітують зв'язки нейронів у мозку та мають здатність до навчання. Зараз глибокі нейронні мережі використовуються в таких сферах, як розпізнавання образів, автоматичний переклад, медична діагностика та допомога зі смартфоном.
Дізнайтеся, як грати в го онлайн на https://online-go.com/learn-to-play-go.
(фото: Wikimedia Commons.)

Що я бачу?

1. Підрахуємо клітинки:



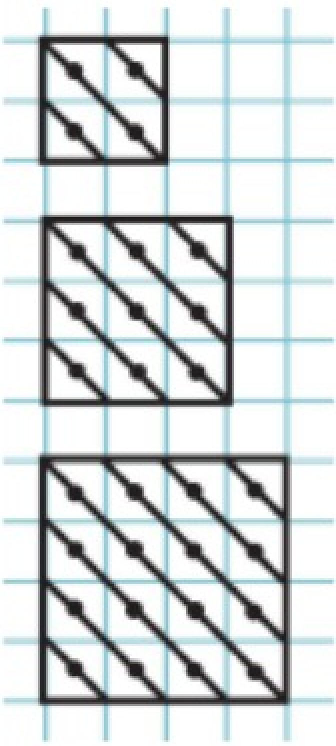
A.



B.

Запитай у синьої пта

2. Підрахуємо точки:



ашки

3

Висота прямокутника = 1+2+3+4+5 = (5·6)/2

Ширина прямокутника = 2·5+1

Отже, всього клітинок у прямокутнику = ((5·6)/2)·(2·5+1)

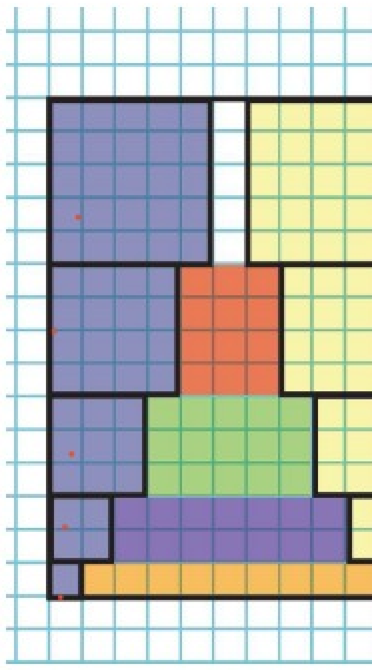
$S = (1 + \dots + 5)\cdot(5+5+1) =$

Тому маємо:

$\cancel{5} = 3(1^2 + \dots + 5^2)$

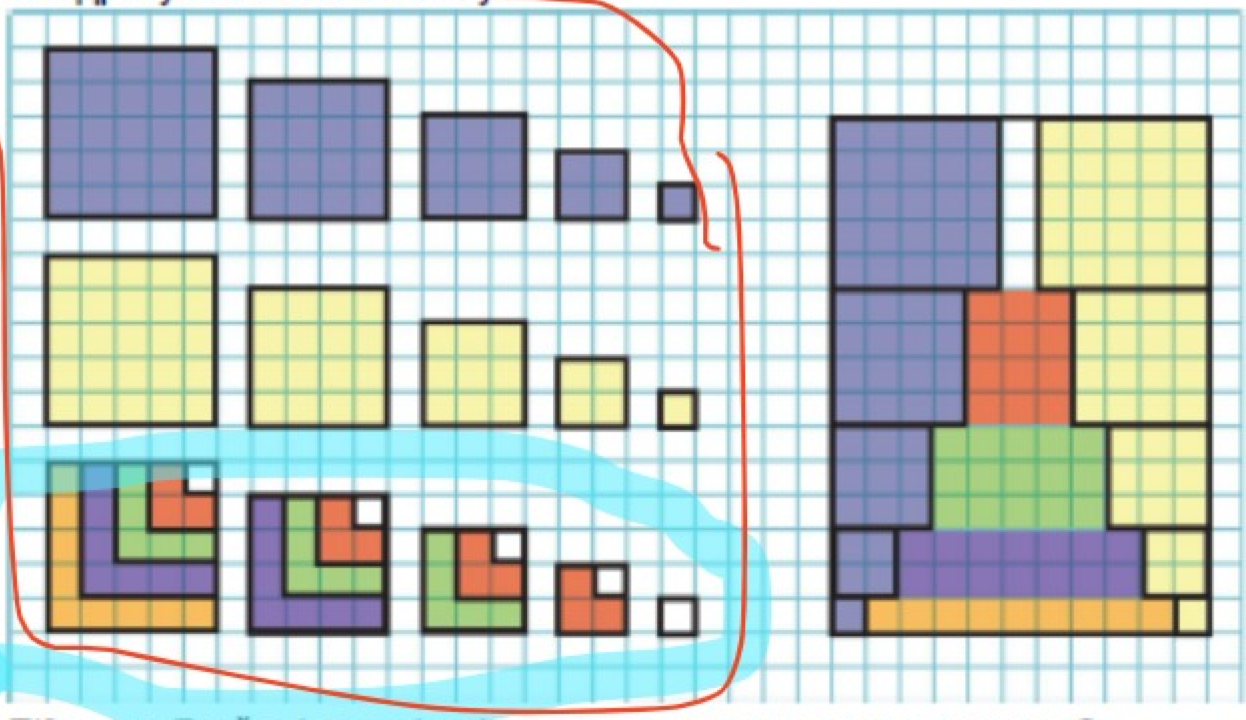
$\boxed{3(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)} = ((5\cdot6)(2\cdot5+1))/2$, so

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = ((5\cdot6)(2\cdot5+1))/6$$



$((1+5)\cdot2+3)(5+5+1) = (6\cdot2+3$

3. Підрахуємо клітинки знову:



Підказка: Який зв'язок між лівою та правою частинами рисунка?

Площа прямокутника:

$(5+5+1)\cdot(1+2+3+4+5)$

Площа зафарбованої частини:

$9\cdot 1 + 7\cdot 2 + 5\cdot 3 + 3\cdot 4 + 1\cdot 5$

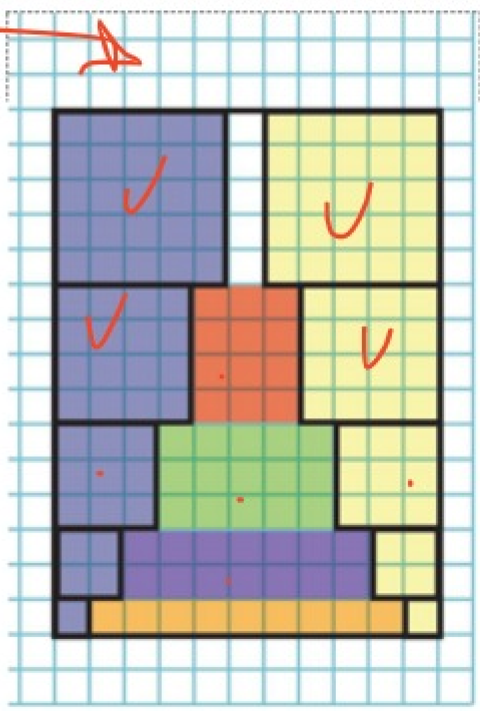
$1\cdot n + 3\cdot(n-1) + 5\cdot(n-2) \ldots + q\cdot(n-(n-1))$

де n – кількість квадратів, а q_n – n-не непарне число. ($\cancel{q = 2n-1}$) ($q = 2n-1$)

3

Отже, з рисунка ми **бачимо**:

$$3\,(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2) = \boxed{((5\cdot 6)(2\cdot 5+1))/\cancel{6}}\ 2$$



У загальному випадку:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = ((n(n+1)(2n+1))/6$$

$$3\sum_{t=1}^{n} t^2 = \frac{(n)(n+1)\cdot(2n+1)}{2}$$

$+$

$+1) =$

Sunflower Bluebird Спецкурс для вчителів математики

Заняття 1 - ВІДПОВІДІ

28 жовтня, 2022

На цьому занятті простий аркуш паперу в клітинку є благодатним підґрунтям для запитань, що ведуть до комбінаторних міркувань, скінченних арифметичних рядів, алгебраїчних тотожностей, теореми Піфагора тощо.

Додаткові задачі

1. Скільки є прямокутників, чиї сторони лежать на лініях сітки, у області 7×7? А в n×n?

1 Розв'язання:

(a) Кожен прямокутник визначається двома вертикальними і двома горизонтальними сторонами. Тому, для визначення прямокутника, спершу необхідно обрати 2 з 8 вертикальні лінії з області 7×7 (це робиться $\frac{8\cdot7}{2}$ способами), потім необхідно обрати 2 з 8 горизонтальні лінії з області 7×7 (що робиться такою ж кількістю способів). Отже, загальна кількість прямокутників дорівнює $\left(\frac{8\cdot7}{2}\right)\cdot\left(\frac{8\cdot7}{2}\right) = 784$.

(b) Як і в пункті (a), щоб задати прямокутник, необхідно обрати 2 з (n+1) вертикальні лінії та 2 з (n+1) горизонтальні лінії в сітці n×n, це робиться $\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)\cdot\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right) = \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}$ способами. Таким чином, кількість таких прямокутників у сітці n×n дорівнює $\frac{(n+1)^2 n^2}{4}$.

2. Знайдіть у явному вигляді формулу загальної кількості:

2a. всіх правильних квадратів у сітці n×n;

2a Розв'язання:

Як ми побачили на засіданні 28 жовтня, кількість правильних квадратів у сітці n×n дорівнює

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2b. всіх нахилених квадратів у сітці n×n.

2b Розв'язання

Знову, на засіданні ми визначили, що кількість нахилених квадратів у сітці k×k дорівнює (k-1), і тому загальна кількість нахилених квадратів усередині n×n складає

$n^2\cdot 0 + (n-1)^2\cdot 1 + (n-2)^2\cdot 2 + (n-3)^2\cdot 3 + ... + (n-(n-1))^2\cdot(n-1) =$

$(n^2 - 2n\cdot 1 + 1^2)\cdot 1 + (n^2 - 2n\cdot 2 + 2^2)\cdot 2 + (n^2 - 2n\cdot 3 + 3^2)\cdot 3 + ... +$

$(n^2 - 2n\cdot(n-1) + (n-1)^2)\cdot(n-1) =$

$n^2(1 + 2 + 3 + ... (n-1)) - 2n(1^2 + 2^2 + 3^2 + (n-1)^2) + (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3) =$

Sunflower Bluebird Спецкурс для вчителів математики

Заняття 1 - ВІДПОВІДІ

28 жовтня, 2022

На цьому занятті простий аркуш паперу в клітинку є благодатним підґрунтям для запитань, що ведуть до комбінаторних міркувань, скінченних арифметичних рядів, алгебраїчних тотожностей, теореми Піфагора тощо.

Додаткові задачі

1. Скільки є прямокутників, чиї сторони лежать на лініях сітки, у області 7×7? А в n×n?

1 Розв'язання:

(a) Кожен прямокутник визначається двома вертикальними і двома горизонтальними сторонами. Тому, для визначення прямокутника, спершу необхідно обрати 2 з 8 вертикальні лінії з області 7×7 (це робиться $\frac{8\cdot 7}{2}$ способами), потім необхідно обрати 2 з 8 горизонтальні лінії з області 7×7 (що робиться такою ж кількістю способів). Отже, загальна кількість прямокутників дорівнює $\left(\frac{8\cdot 7}{2}\right)\cdot\left(\frac{8\cdot 7}{2}\right) = 784.$

(b) Як і в пункті (a), щоб задати прямокутник, необхідно обрати 2 з (n+1) вертикальні лінії та 2 з (n+1) горизонтальні лінії в сітці n×n. Це робиться $\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)\cdot\left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right) = \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{4}$ способами. Таким чином, кількість таких прямокутників у сітці n×n дорівнює $\frac{(n+1)^2 n^2}{4}$.

2. Знайдіть у явному вигляді формулу загальної кількості:

2a. всіх правильних квадратів у сітці n×n;

2a Розв'язання:

Як ми побачили на засіданні 28 жовтня, кількість правильних квадратів у сітці n×n дорівнює

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2b. всіх нахилених квадратів у сітці n×n;

2b Розв'язання:

Знову, на засіданні ми визначили, що кількість нахилених квадратів у сітці k×k дорівнює (k-1), і тому загальна кількість нахилених квадратів усередині n×n складає

$$n^2\cdot 0 + (n-1)^2\cdot 1 + (n-2)^2\cdot 2 + (n-3)^2\cdot 3 + ... + (n-(n-1))^2\cdot(n-1) =$$

$$(n^2 - 2n\cdot 1 + 1^2)\cdot 1 + (n^2 - 2n\cdot 2 + 2^2)\cdot 2 + (n^2 - 2n\cdot 3 + 3^2)\cdot 3 + ... +$$

$$(n^2 - 2n\cdot(n-1) + (n-1)^2)\cdot(n-1) =$$

$$n^2(1 + 2 + 3 + ...(n-1)) - 2n(1^2 + 2^2 + 3^2 + (n-1)^2) + (1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + (n-1)^3) =$$

$n^2 \cdot \frac{(n-1)n}{2} - 2n \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n-1)n^2 (n+1)}{12}$.

2c. всіх квадратів (правильних і нахилених) у сітці n×n.

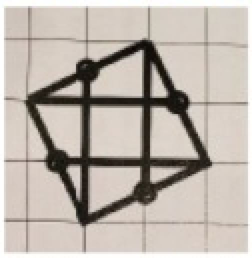
2c Розв'язання:

Склавши результати пунктів 2a і 2b, маємо кількість усіх квадратів у сітці n×n:

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{(n-1)n^2 (n+1)}{12} = \frac{n(n+1)^2 (n+2)}{12}$.

Вражає, що згідно з формулою, отриманою в пункті 2b, кількість нахилених квадратів у сітці (n+1) × (n+1) така сама!

4. З'єднайте вершини квадрата по колу з серединами протилежних сторін (див. рисунок). Ці чотири відрізка формують внутрішній чотирикутник всередині початкового квадрата.



4a. Що це за чотирикутник?

4b. Яку частину площі початкового квадрата він займає?

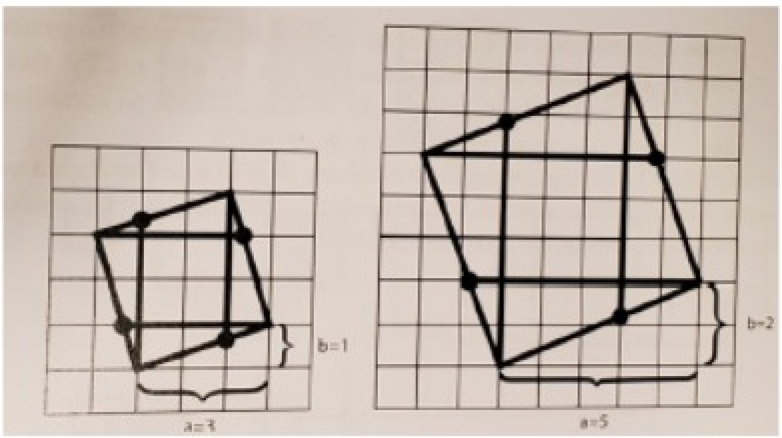
4c. Середина кожної зі сторін ділить сторону на два відрізки, співвідношення яких дорівнює 1:1. Що станеться, якщо розділити кожну зі сторін не на рівні дві частини, а на частини, що відносяться, як a:b?

4a і 4b Розв'язання:

Якщо намалювати нахилений квадрат, як показано на рисунку, видно, що лінія сітки, проходить через вершину і ділить протилежну сторону навпіл. Таким чином, ця фігура ілюструє побудову, необхідну в задачі. Ми бачимо, що чотирикутник всередині є квадратом із площею 1, а площа великого нахиленого квадрата дорівнює $2^2 + 1^2 = 5$ (тут використовується результат із заняття про площу нахиленого квадрата). Отже, площа внутрішнього квадрата складає ⅕ площі початкового квадрата.

4c Розв'язання:

Розглянемо нахилені квадрати на рисунку:



Для зручності, трохи перефразуємо питання: замість того, щоб говорити про співвідношення частин сторони, розглянемо відношення r однієї з частин до всієї сторони квадрата (так це відношення в пунктах 4a і 4b дорівнює ½).

У нахиленому квадраті ліворуч, де a=3 і b=1, відношення r=⅓ (щоб переконатися в цьому, розгляньте подібні трикутники). Площа внутрішнього квадрата тоді складає $(3-1)^2 = 4$, а площа великого — $3^2 + 1^2 = 10$. Отже, співвідношення площ дорівнює 4/10.

У нахиленому квадраті праворуч, a=5, b=2, і r=⅖. Площа внутрішнього квадрата складає $(5-2)^2 = 9$, а площа великого — $5^2 + 2^2 = 29$. Тут співвідношення площ дорівнює 9/29.

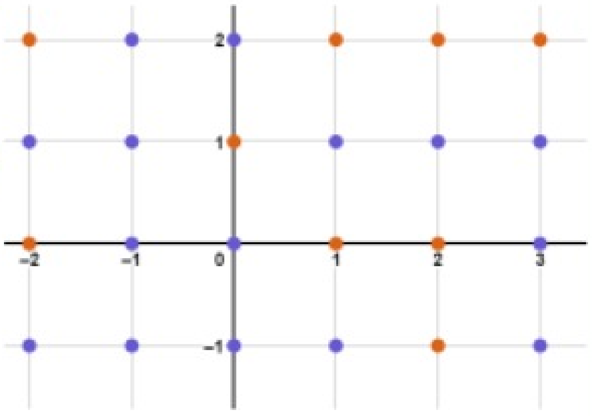
У загальному випадку, використовуючи цю ідею зображення заданого квадрата нахиленим, маємо такий результат: якщо r=m/n, де m<n і m та n є натуральними числами, площа внутрішнього квадрата становить $(n-m)^2$, а площа великого нахиленого квадрата дорівнює m^2+n^2, і отже, співвідношення їхніх площ дорівнюватиме

$$\frac{(n-m)^2}{n^2+m^2} = \frac{(n-m)^2/n^2}{(n^2+m^2)/n^2} = \frac{(1-r)^2}{1+r^2}$$

Остання формула є коректною навіть коли r є ірраціональним (це можна довести через границі).

5. Уявіть, що кожен вузол нескінченної сітки фарбується одним із заданого набору кольорів.

5a. Якщо кожне ціле число числової прямої розфарбувати одним із двох кольорів, то чи можна зробити так, щоб не було трьох однокольорових чисел, що формують арифметичну прогресію?



5а Розв'язання:

Розглянемо 2-розфарбування цілих чисел на дійсній прямій (тобто, кожне з цілих чисел фарбується в один із двох кольорів). Назвемо ці кольори Б (блакитний) та Р (рожевий). Тоді є три випадки:

- Випадок 1: Існують 3 послідовні цілі числа однакового кольору.
- Випадок 2: Існують 2 послідовні цілі числа однакового кольору.
- Випадок 3: Будь-які два сусідні цілі числа мають різний колір.

Випадки 1 і 3 досить легкі, тож розглянемо спочатку їх.

Випадок 1: Нехай три послідовні однокольорові цілі числа - це n, n+1 та n+2. Але ці три числа формують арифметичну прогресію із різницею 1. Отже, якщо розфарбування не повинно містити такі послідовності, то цей випадок неможливий.

Випадок 3: У такому разі кольори цілих чисел чередуються. Припустимо, 0 блакитний (якщо 0 рожевий, аналогічно). Тоді числа 0,1,2,3,4 розфарбовані так: БРБРБ, і тут (0,2,4) формують однокольорову арифметичну прогресію з різницею 2. Отже, для уникнення таких послідовностей цей випадок також не підходить.

Залишається перевірити випадок 2 - існують два послідовні цілі числа одного кольору. Припустимо, що цими числами є 1 і 2, і вони обидва блакитні (аналогічно розглядається і в загальному вигляді, коли ці числа n та n+1 для довільного n, і нічого не зміниться, якщо поміняти місцями кольори). Отже, маємо таку ситуацію:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
	Б	Б						

Ми не хочемо отримати однокольорову арифметичну прогресію довжини 3, тому числа 0 і 3 мусять бути рожевими (чому?). Маємо:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р					

Щоб уникнути однокольорової рожевої послідовності (0,3,6), число 6 має бути блакитним:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р			Б		

Щоб уникнути однокольорової блакитної послідовності (2,4,6), число 4 має бути рожевим:

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Р	Б	Б	Р	Р		Б		

Звідси, 5 має бути блакитним (щоб не було три рожеві числа поспіль):

0 1 2 3 4 5 6 7 8
Р Б Б Р Р Б Б

Тепер 7 має бути рожевим, щоб не було три блакитні послідовні числа:

0 1 2 3 4 5 6 7 8
Р Б Б Р Р Б Б Р

Якого кольору буде 8? Якщо 8 рожевого, то ми отримаємо рожеву послідовність (0,4,8). Щоб цього не сталося, 8 має бути блакитним. Але в цьому разі отримаємо блакитну послідовність (2,5,8).

Ми довели, що якщо у нас є будь-які два сусідніх цілі числа одного кольору, то кожне розфарбування решти цілих чисел міститиме однокольорову арифметичну послідовність довжиною три.

Тому всі три можливі випадки неминуче створюють однокольорову арифметичну прогресію довжини три. Насправді ми отримали ще більш чудовий результат: ми продемонстрували, що щонайбільше 8 послідовних цілих чисел можна розфарбувати в два кольори, не створюючи однокольорової арифметичної послідовності довжиною 3!

Додаткові запитання: Що якщо використовувати більше двох кольорів? У загальному випадку, чи можливо розфарбувати цілі числа в C різних кольорів так, щоб не утворилася однокольорова арифметична прогресія довжини L? Якщо ваша відповідь "Ні", то як знайти найбільшу кількість послідовних цілих чисел, які розфарбовуються в C кольорів, не утворюючи однокольорову арифметичну послідовність довжини L? ***Останнє запитання виглядає як цікавий дослідницький проєкт для ваших учнів. Вони можуть експериментувати з різними значеннями для C і L вручну або з використанням комп'ютера.***

> 5b. Якщо кожен вузол нескінченної сітки фарбується в один із двох кольорів, чи можливо уникнути появи трьох точок одного кольору, що формують рівнобедрений прямокутний трикутник? Що якщо можна використовувати три кольори, а не два?

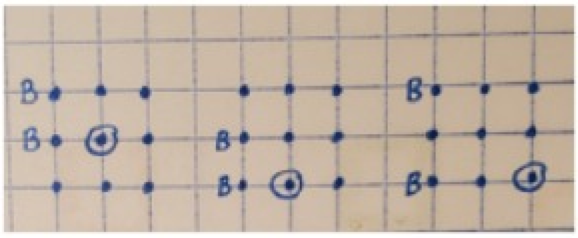
5b Розв'язання:

Введемо деякі означення для зручності:

1. Назвемо однокольоровий рівнобедрений трикутник *бажаним трикутником*.
2. Назвемо квадратну множину вузлів сітки *хорошою*, якщо в ній є три точки з координатами (x,y), (x,y+d) та(x+d,y) такі, що (x,y) та (x,y+d) мають однаковий колір, а (x+d,y) — інший.

Почнемо зі спостереження, що в довільному 2-розфарбуванні кожна квадратна множина 3 на 3 вузлів сітки або містить бажаний трикутник, або є хорошою.

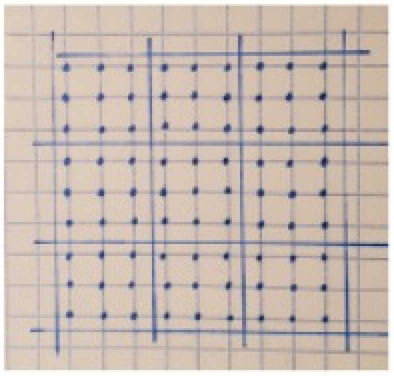
Дійсно, перший (лівий) стовпчик такої множини має містити принаймні дві точки одного кольору (принцип Діріхле), і вони можуть розташовуватися в одній із трьох позицій, зображених на рисунку (припустимо, вони блакитні; для рожевих аналогічно):



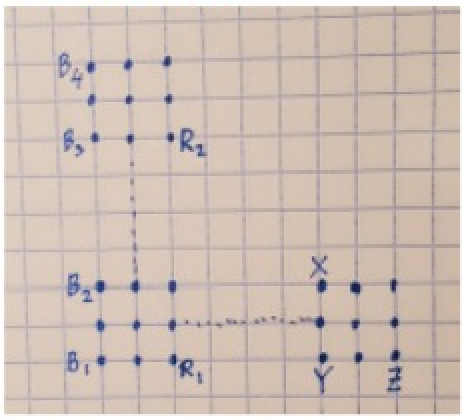
У кожному з випадків, якщо обведена крапка блакитна, — маємо бажаний трикутник, якщо рожева, — квадрат є хорошим.

Тепер розглянемо квадрат M на M, де $M = 1539 = 3 \cdot 513$.

Розділимо цю множину вертикальними й горизонтальними лініями так, щоб виникло візуальне розділення на клітини 3×3, як на рисунку нижче (показаний фрагмент великої сітки):



Назвемо цю множину "клітковим масивом", він складатиметься з 513 стовпців та 513 рядків. Перший (лівий) стовпець має 513 клітин 3×3. Кількість різних способів розфарбувати клітину 3×3 дорівнює $2^9 = 512$, а значить, у першому стовпці знайдеться дві клітини, розфарбовані ідентичним чином (принцип Діріхле). Якщо ці клітини містять бажані трикутники, то все. Припустимо, вони не містять бажаних трикутників. У цьому разі вони є хорошими. Розглянемо клітину 3×3 у тому ж рядку із кліткового масиву, де знаходиться нижча хороша клітина, і яка знаходиться на тій же відстані від неї, що й друга хороша клітина вище. На рисунку зображено описану ситуацію:



Якщо X чи Y блакитні, то ми отримали бажаний трикутник - B_4B_2X або B_3B_1Y, відповідно.
Припустимо, що і X, і Y пофарбовані в рожевий. Тепер поглянмо на Z. Якщо ця крапка рожева, то XYZ є бажаним трикутником. Якщо Z блакитна, то B_4B_1Z є бажаним трикутником.

Все, ми довели, що для довільного 2-розфарбування вузлів сітки M×M знайдеться бажаний трикутник із вершинами в вузлах одного кольору (для M=1539).

Зауваження: Уважний читач помітить, що наведене значення M, безперечно, завелике: ми можемо зменшити його, якщо виключимо всі розфарбування клітин 3×3, що містять бажані трикутники. Чи могли б ви зменшити M? Чи можете ви знайти найменше значення M, яке гарантує, що масив M×M міститиме бажаний трикутник?

5c. Припустимо, що, знову, нескінченна сітка розфарбовується двома кольорами. Чи можна це зробити так, щоб жодні чотири одноколорові точки не формували квадрат?

5с Розв'язання (ідея):

Сходим чином, як у пункті 5b, можна показати, що для довільного натурального числа C існує число N_C таке, що кожне C-розфарбування (тобто, розфарбування вузлів сітки в C різних кольорів) масиву N_C×N_C буде містити бажаний трикутник. (наприклад, у пункті 5b ми показали це для N_2=M=1539)

Скількома способами можна розфарбувати клітковий масив M×M у два кольори, блакитний і рожевий? Відповідь: 2^{M^2}. Будемо вважати кожне розфарбування клітини *кольором* клітини. Розглянемо клітковий масив M×M. Із вищесказаного, нам відомо, що існує таке число N_C (із $C = 2^{M^2}$), що кожне C-розфарбування даного масиву містить бажаний трикутник із клітин. Але кожна з цих клітин містить бажаний трикутник із точок (і ці трикутники з точок мають однакові кольори та розташування в кожній із трьох клітин). Наступний рисунок ілюструє цей випадок. Зображення стилізоване: тобто, якщо по сусідству стоять дві R, це не значить, що вони стоять поруч. Це означає лише, що дві пари, зображені поруч, мають рівні відстані між ними:

$$\begin{array}{cccccc}
\cdots & R & \cdots & \cdots & W & X \\
\cdots & R & R & \vdots & Y & Z \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \\
\cdots & R & \cdots & \cdots & R & \\
\cdots & R & R & \cdots & R & R
\end{array}$$

Поглянемо на точки W, X, Y, Z. Якщо хтось із них має рожевий колір, тоді ми маємо рожевий квадрат (переконайтеся!). А якщо жодна з них не рожева, то WXYZ є блакитним квадратом.

Все, ми довели, що для довільного 2-розфарбування вузлів сітки M×M знайдеться однокольоровий квадрат.

Зауваження:

1. Задача 5: усі три пункти пов'язані з захопливим розділом комбінаторики, що має назву *теорія Рамсея*.
2. Зараз ви, напевно, підозрюєте, що для будь-якого натурального числа C кожне C-розфарбування вузлів сітки повинно містити однокольоровий квадрат. І ви праві! Насправді, наступне твердження це

Теорема про квадрат:

> Для кожного натурального числа C існує таке число G(C), що для кожного C-розфарбування масиву G(C) × G(C) знайдуться чотири точки одного кольору, що є вершинами квадрата.

Як доводиться ця теорема? Є багато варіантів:

- Це наслідок із теореми Хейлса-Джевета.
- Це наслідок із теореми Галлаї.
- Можна вивести прямо з теореми ван дер Вардена.
- Ми навели елементарне доведення для окремого випадку C=2.

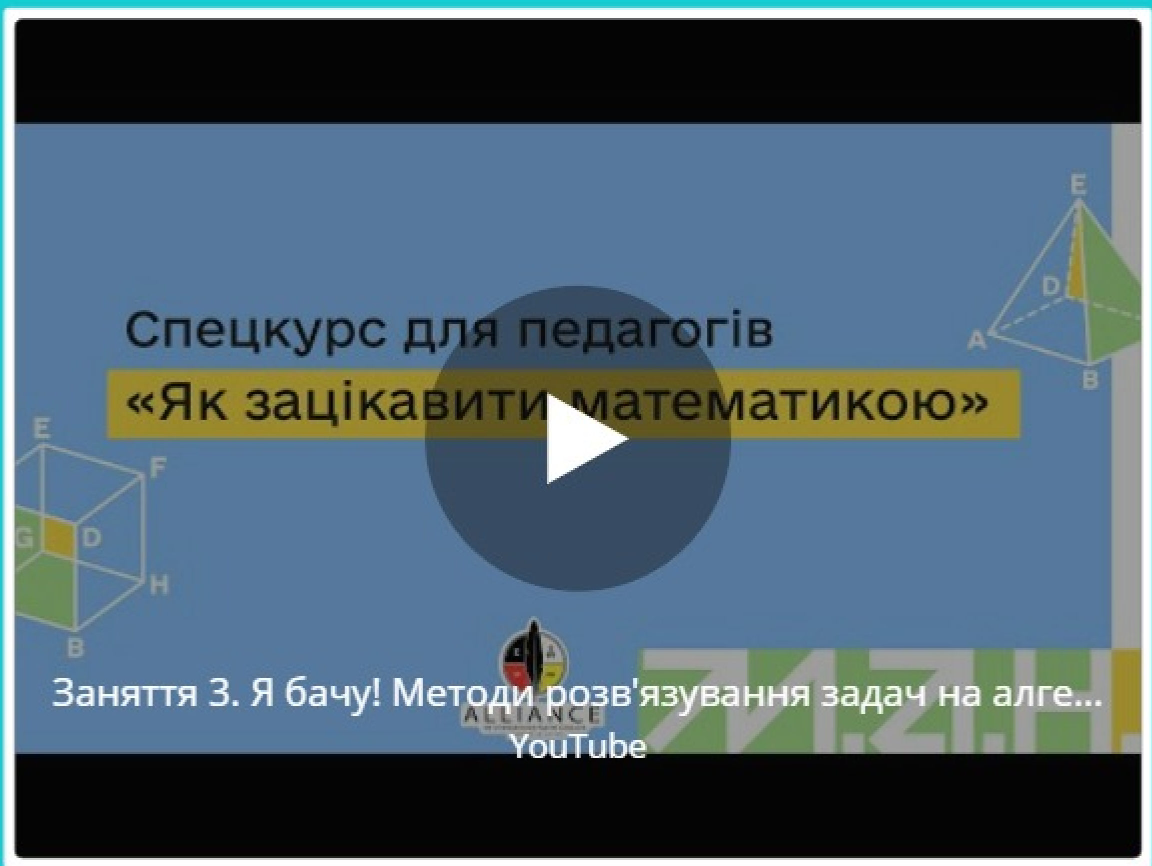
Що можна сказати про значення G(C)? Найкращою відповіддю є: вони ВЕЛИЧЕЗНІ! Наприклад, найкраща з відомих на даний момент верхніх оцінок це: $G(2) \le 2^{2^{81}}$.

Зворотний зв'язок та інформація:
https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/

Ви можете знайти всі випуски оригінального інформаційного бюлетеня Bluebird Math Circle та огляди занять тут:
https://aimathcircles.org/category/bbflyers/

SUNFLOWER BLUEBIRD Спецкурс для вчителів математики

9 грудня, 2022



SUNFLOWER BLUEBIRD Спецкурс для вчителів математики

9 грудня, 2022

У цьому занятті учасники використовують рисунки, щоб знайти «приховані» рівняння.

Матеріали

- Бюлетень https://drive.google.com/file/d/1w3AN6MkF99XfeU2ZhjXfqVLUVKMy71-0/view?usp=sharing
- Записи зустрічей https://www.youtube.com/playlist?list=PLHtgl9d8TDJRe9gXlGxdMKyD6ScX-7TRN
- Слайди з нотатками для вчителів:
  Українська версія:
  https://docs.google.com/presentation/d/1FGTmoNNvWVZzV8Cls56VyPsE9E4X6t6ifH5kPpTca9M/edit?usp=sharing
  Англійська версія:
  https://docs.google.com/presentation/d/1rnzG4RHxge1vYpMULXP7dGzOskFLpshq8MuTkG1yLZ0/edit?usp=sharing

Додаткові задачі (для вашого додаткового задоволення)

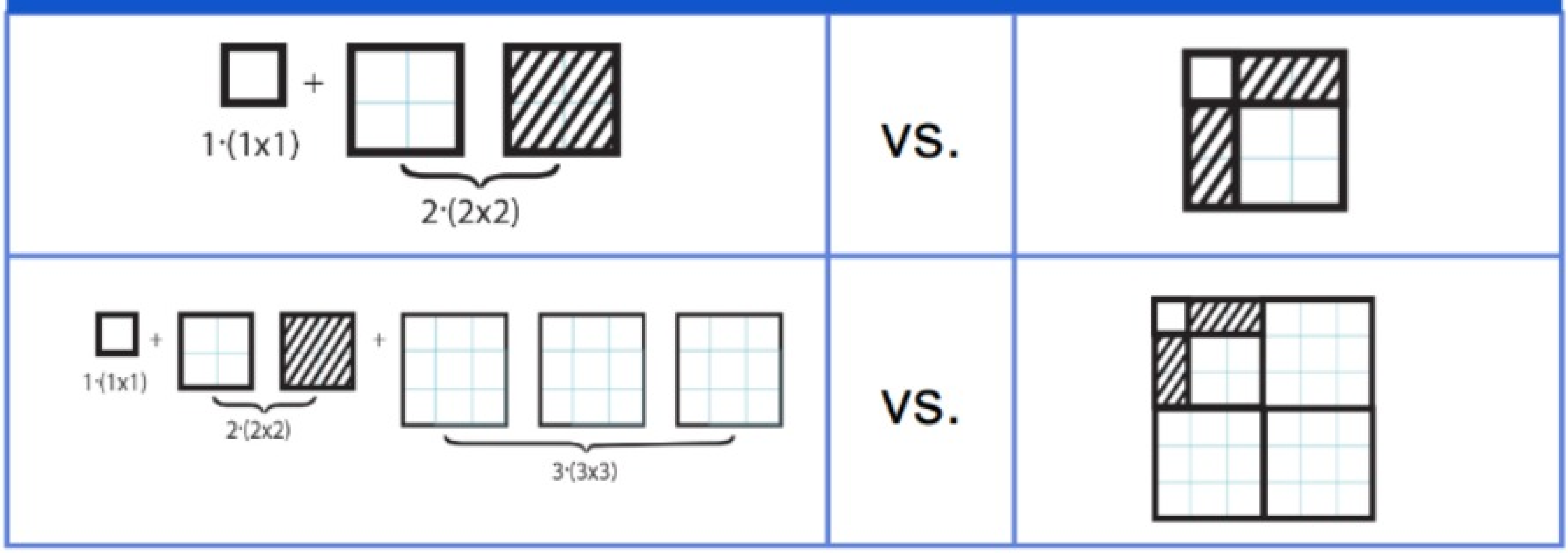
1. Знайдіть або складіть іншу геометричну ілюстрацію деякого прихованого рівняння. Що це за рівняння?

2. Додаткова задача 4 зі слайдів.

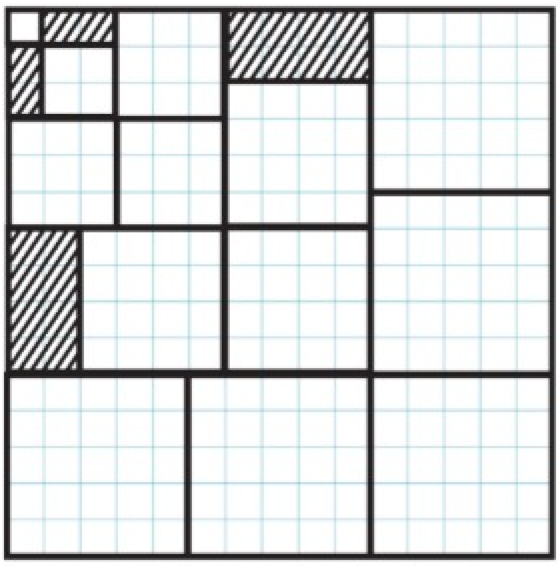
Додаткове завдання: Задача 4
Порівняйте малюнки ліворуч і праворуч.

Додаткова задача 4 зі слайдів.

Додаткове завдання: Задача 4
Порівняйте малюнки ліворуч і праворуч.
Що ви бачите?



4 Бачите приховане рівняння на малюнку нижче?



Що необхідно зробити до і під час наступного засідання спецкурсу Sunflower Bluebird MTC

До засідання	**Під час засідання**
1. Обирайте будь-яку активність (або активності) із нашого бюлетеня, або із Додаткових Активностей. 2. Проведіть обрану активність зі своїми учнями (на уроці, на гуртку, чи за інших обставин). Ви можете виділити для цього як весь навчальний час, так і 15 хвилин (розминка), це на ваш вибір. 3. Задокументуйте Ваш досвід – запишіть відео або складіть загальний опис проведеного заняття.	1. Ви зробите 5-хвилинну доповідь про ваш досвід. 2. Отримаєте задоволення та дізнаєтесь щось нове з доповідей ваших колег. 3. У невеликих групах, маючи навідні запитання, сплануєте разом повторне використання цих активностей в освітньому процесі.

Питання для маленьких груп

Поділіться найцікавішими моментами та викладацькими техніками, які виникали під час проведення заняття. Допоможіть колегам помітити викладацькі ідеї, які вони потім зможуть використати. Подумайте над планом наступного засідання.

1. Що з розповідей колег вам сподобалось найбільше? Озвучте свою думку, щоб вони розуміли, що це можна використовувати й надалі.
2. Якщо комусь із учнів важко під час розв'язання задачі, що в такому випадку допомагало? (Якщо всі учні активно справлялися з завданнями, скажіть про це.)
3. Ми використовували діаграми, щоб сформулювати деякі твердження (бо рівняння і є твердженням). Чи можете ви подумати про інші галузі математики, де візуально можна демонструвати/доводити твердження?
4. Яке обладнання ви використовували або хотіли б використати? Наприклад, олівець і папір, програмне забезпечення чи підручні матеріали.
5. Яку найважливішу річ винесли учні від проведеного заняття?
6. Що найважливіше, що ви самі отримали з цього досвіду?
7. ____________________? У групі складіть нові запитання до нашого списку.

Зворотний зв'язок та інформація:

https://aimathcircles.org/the-sunflower-bluebird/

bluebird.aimc@gmail.com

Ви можете знайти всі випуски оригінального інформаційного бюлетеня Bluebird Math Circle та огляди занять тут:

https://aimathcircles.org/category/bbflyers/