МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ
МАН УКРАЇНИ

Задачі на знаходження найменшого та найбільшого значення в геометрії

Роботу виконала: Шаніна Анастасія Олександрівна, учениця 11 класу Миколаївського ліцею імені професора М. Александрова Миколаївської міської ради Миколаївської області

Науковий керівник: Сорочан Оксана Олександрівна, вчитель математики Миколаївського ліцею імені професора М. Александрова Миколаївської міської ради Миколаївської області

Науковий консультант: Воробйова Алла Іванівна, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інтелектуальних інформаційних систем ЧНУ ім. Петра Могили

Мета роботи: зробити класифікацію задач на знаходження найбільшого та найменшого значення, розглянути способи їх розв'язування, систематизувати різні методи і підходи до їх розв'язування, проаналізувати переваги та недоліки кожного з них.

Об'єкт: екстремальні задачі в геометрії.

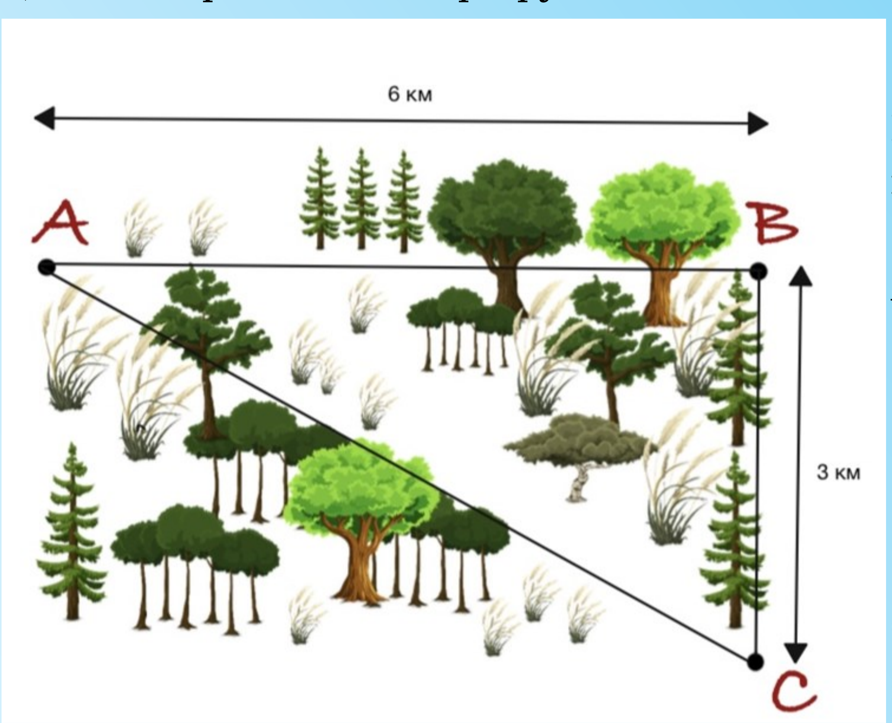
Предмет: задачі з курсу геометрії на знаходження найбільшого та найменшого значення величини як і з застосуванням диференціального числення, так і без нього.

Завдання

- Зібрати інформацію про задачі з теми.
- Проаналізувати взаємодію умови задачі зі способом її розв'язування.
- Вивчити основні типи задач.
- Систематизувати задачі на знаходження найбільшого та найменшого значення по способу їх розв'язування.
- Зробити аналіз методів і прийомів розв'язування задач, зокрема їх переваг та недоліків.
- Скласти власні авторські задачі з даної теми.

Задачі, що розв'язуються із застосуванням похідної

Турист стартує з пункту A і йде до пункту C. Якщо він йде вказаним шляхом (суцільна лінія), його середня швидкість 5 км/год, а якщо він йде через ліс, його середня швидкість 4 км/год. Якщо ми знаємо, що відстань від A до B дорівнює 6 км і відстань від B до C дорівнює 3 км, в якому місці потрібно звернути з дороги та йти через ліс, щоб витратити на маршрут якомога менше часу?



Відомо, що $S = Vt,\ t = \frac{S}{v}$ і загальний час подорожі $t = t_1 + t_2$

Час на проміжку від A до K дорівнює $\frac{6-x}{5}$ (год), а на проміжку від K до C $\frac{\sqrt{x^2+9}}{4}$ (год).

Складаємо рівняння: t = $\frac{6}{5} - \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}(x^2+9)^{\frac{1}{2}}$

Знайдемо похідну рівняння та прирівняємо її до нуля:

$$t' = -\frac{1}{5} + \frac{2x}{8}(x^2+9)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{5} + \frac{2x}{8\sqrt{x^2+9}}, \quad t' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} + \frac{2x}{8\sqrt{x^2+9}} = 0$$

$$5x = 4\sqrt{x^2+9}$$
$$25x^2 = 16(x^2+9)$$
$$x = 4$$

Зауважимо, що x не може приймати від'ємне значення (x – відстань). $x = 4$ – відстань від точки K до B , тоді $АК = 6 - 4 = 2$ (км). Робимо висновок, що необхідно звернути на відстані 2 кілометрів від пункту A.

Відповідь: потрібно звернути з дороги на відстані 2 кілометрів від пункту A.

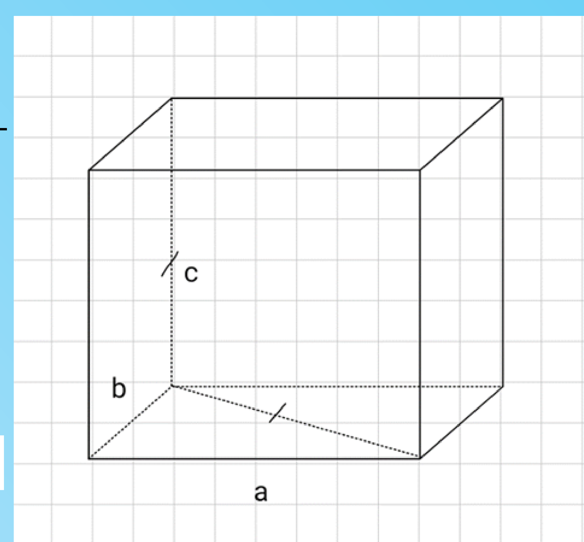
Додаткові твердження, які спрощують вирішення

Нехай функція y = f (x) визначена і безперервна на відрізку [a; b]. Тоді свої найбільші і найменші значення функція досягає в критичних точках, що лежать всередині відрізка [a; b], або на кінцях відрізка.

Якщо функція задана на відрізку [a; b], зростає на [a; x0] і спадає на [x0; b], то f (x) є найбільшим значенням функції на відрізку [a; b]. Аналогічне зауваження для найменшого значення.

Задачі, що розв'язуються без застосування похідної

Потрібно вирубати з граніту постамент у формі прямокутного паралелепіпеда, висота якого має бути рівною діагоналі основи, а площа основи повинна дорівнювати 2 $м^2$. Якими мають бути розміри паралелепіпеда, щоб об'єм постаменту виявився найменшим? Знаючи, що ціна граніту за $м^3$ дорівнює 7000 грн, розрахуйте найбільш економічну вартість постамента.



Позначимо довжину, ширину та висоту паралелепіпеда відповідними літерами: a, b, c. За умовою задачі, $c = \sqrt{a^2+b^2}$ і $ab = 2$, тоді об'єм паралелепіпеда перепишеться так:

$$V = abc = ab\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Очевидно, що об'єм буде найменшим тоді, коли вираз a^2+b^2 набуває найменшого значення. За нерівністю Коші: $a^2+b^2 \geq 2ab$. Рівність досягається при $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b = \sqrt{2}$. Тоді $c = 2$

Отже, постамент буде мати розміри довжина $\sqrt{2}$ м, ширина $\sqrt{2}$ м, та висота 2 м. Розрахуємо найбільш економічну вартість постаменту, так як вона досягається при найменшому об'ємі:

$S = 7000V = 28\,000$ грн.

Відповідь: $\sqrt{2}$ м × $\sqrt{2}$ м × 2 м; 28 000 грн.

Основні методи розв'язання задач на екстремум без похідної

- Метод координат
- Наслідки з нерівності Коші
- Математичне моделювання
- Властивості квадратичних функцій
- Властивості тригонометричних функцій
- Властивості ламаної, що складається з двох відрізків

- Використання диференціювання не завжди є раціональним способом для розв'язання проблеми у даній роботі, було поставлене завдання дослідити інші шляхи вирішення.
- Були виділені ключові методи розв'язання задач без застосування похідної.
- Перевагою цього способу є можливість уникнути застосування похідної. Недолік – для кожної задачі необхідно підбирати властивий саме їй спосіб розв'язання.

Висновки

- Щоб продемонструвати всю різноманітність та складність розв'язків таких задач, були розглянуті, як класичні задачі, задачі шкільного рівня, та задачі, що можуть відповідати олімпіадному рівню
- Для розв'язування були використані різні прийоми знаходження максимальних та мінімальних значень функції, що базувалися на практичному застосуванні похідної.
- Основною перевагою способу є те, що він універсальний. Його недолік – громіздкість, іноді труднощі при складанні функції та подальшому її дослідженні.

- Задачі в роботі підібрані з різних джерел, проаналізовані та класифіковані в контексті досліджуваної проблеми. Так були опрацьовані європейські підручники для підготовки до A-Level, PSE, математичні періодичні видання, такі як «Квант» та «Математика в школі» тощо.
- В роботі були систематизовані та класифіковані екстремальні задачі, шляхом поділу їх на планіметричні та стереометричні, а також на три групи: ті, що розв'язуються за допомогою похідної, без її застосування та універсальні.