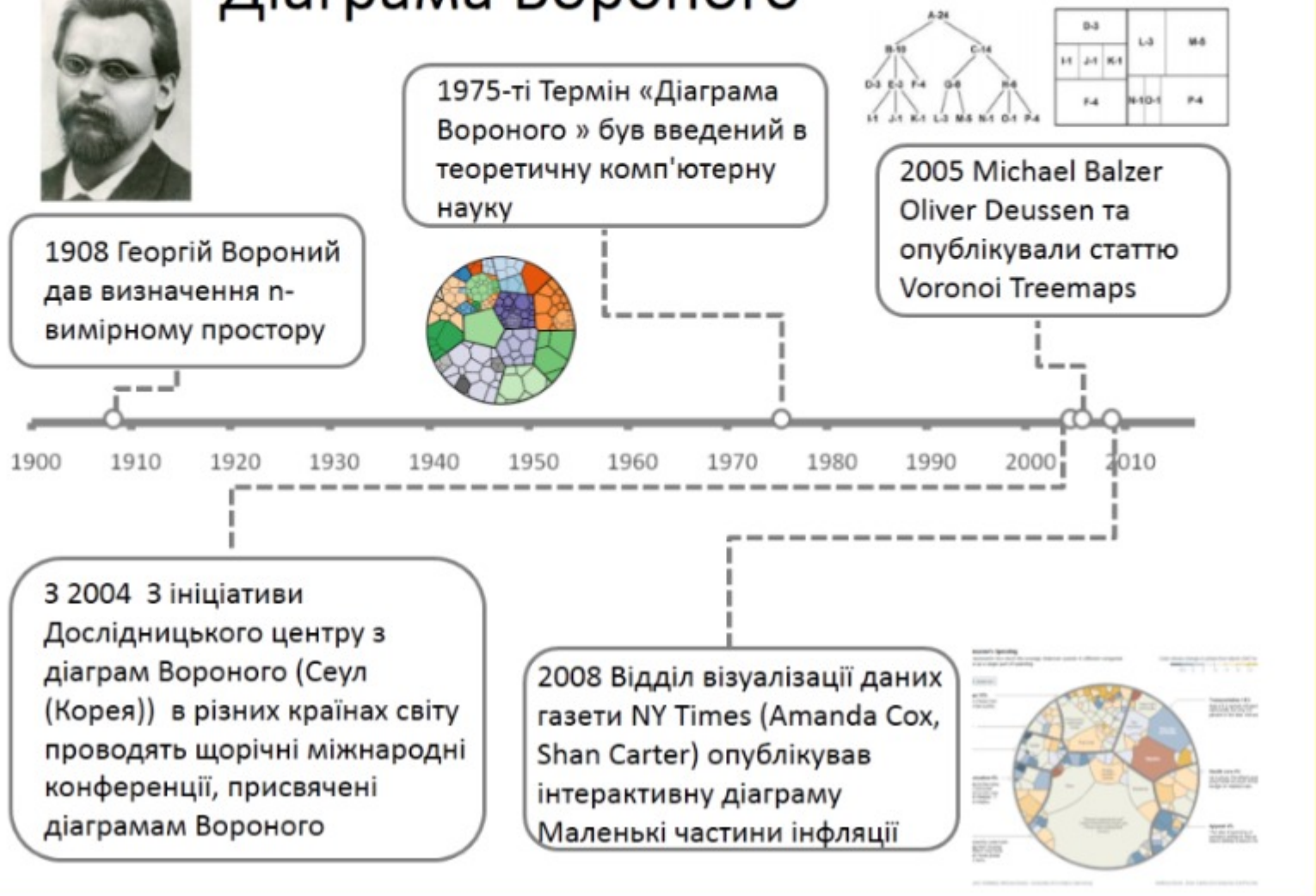


Дозволяє наочно представити ієрархичну структуру.



## Діаграма Вороного



Названа на честь українського математика Георгія Вороного (1868-1908). Інші назви — теселяція Вороного, декомпозиція Вороного, чи теселяція Діріхле.

1. Мови світу <http://www.scmp.com/infographics/article/1810040/infographic-world-languages>
2. Інфляція <https://www.destatis.de/Voronoi/PreisKaleidoskop.svg>
3. Структура світового ВВП <http://howmuch.net/articles/one-diagram-that-will-change-the-way-you-look-at-the-us-economy>

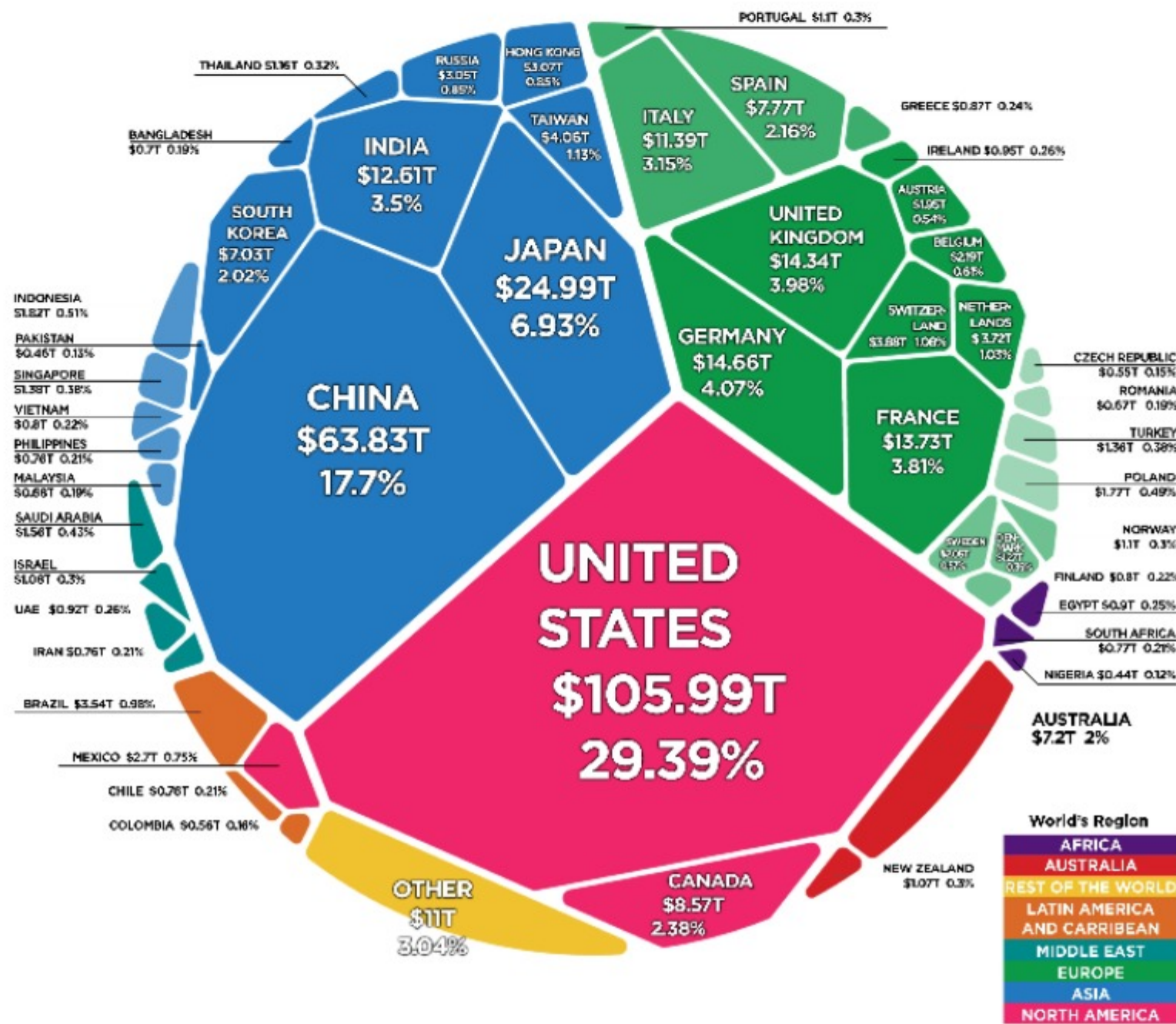
Share this:

**Діаграма Вороного**

Дозволяє наочно представити ієрархичну структуру. Названа на честь українського математика Георгія Вороного (1868-1908). Інші назви - теселяція Вороного, декомпозиція Вороного, чи теселяція Діріхле...

statsua.wordpress.com

## The Distribution of the World's Wealth Total Wealth by Country in 2019



### 10 найбагатших країн світу

1. США: 105,99 тис. дол. США
2. Китай: 63,83 тис. дол. США
3. Японія: 24,99 тис. дол. США
4. Німеччина: 14,66 тис. дол. США
5. Великобританія : 14,34 тис. дол. США
6. Франція: 13,73 тис. дол. США
7. Індія: 12,61 тис. дол.
8. Канада: \$8,57 тис.
9. Іспанія: \$7,77 тис.



howmuch.net

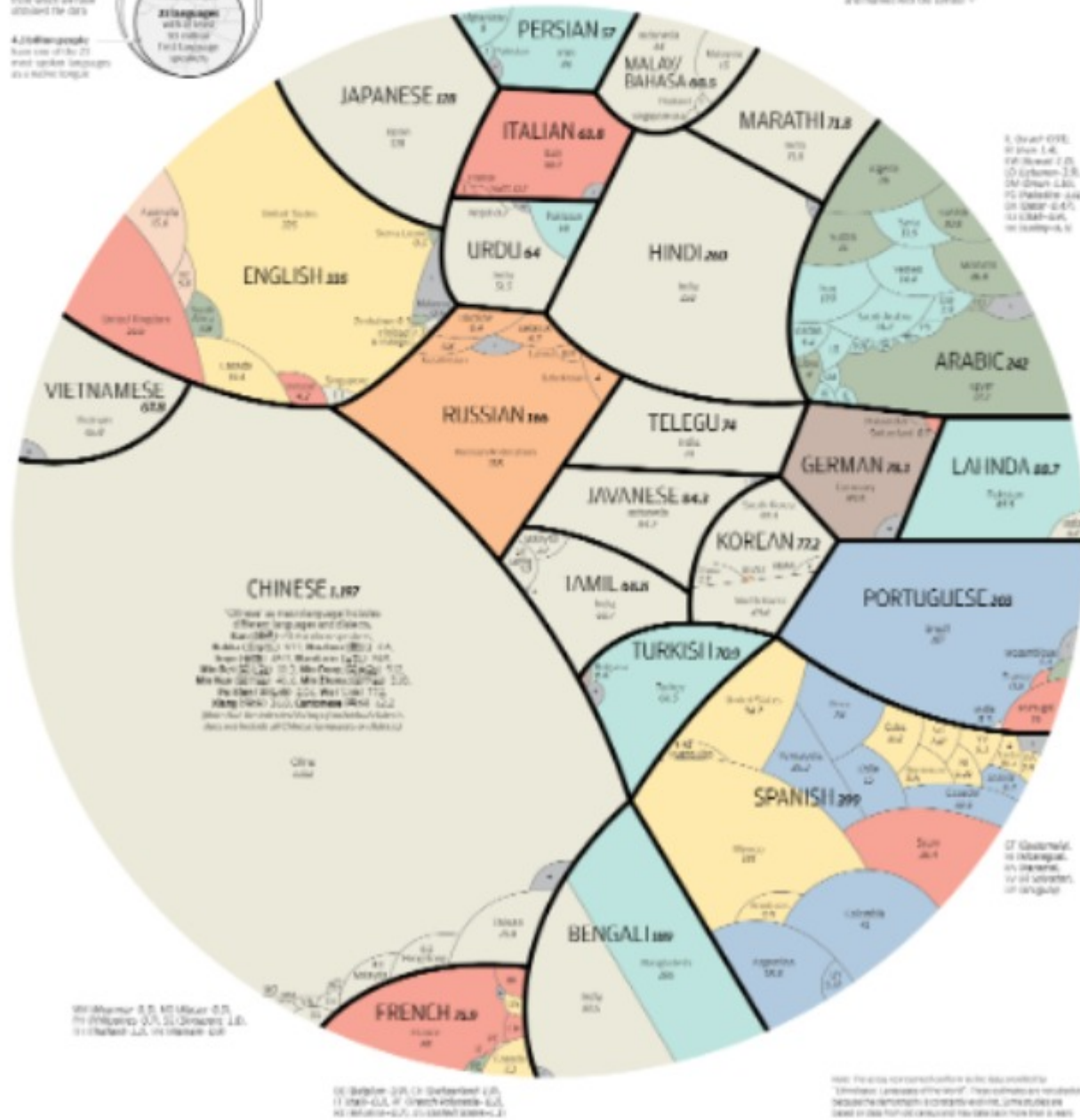
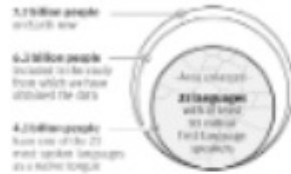
### Top 10 Visualizations of 2020

We pulled together our most popular visualizations of 2020 to let you know what's trending. Not surprisingly, economic issues and wealth landed at the top of our list.

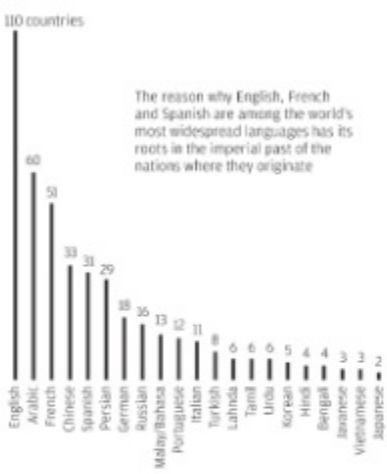
# A world of languages

There are at least 7,000 living languages alive in the world today. Twenty-three of these languages are used for more than 50 million people. The 23 languages make up the native tongue of 4.2 billion people. We represent each language within their borders and then provide the numbers of native speakers (in millions) by country. The colour of these countries shows how languages have taken root in many different regions.

Regions in which these languages are present

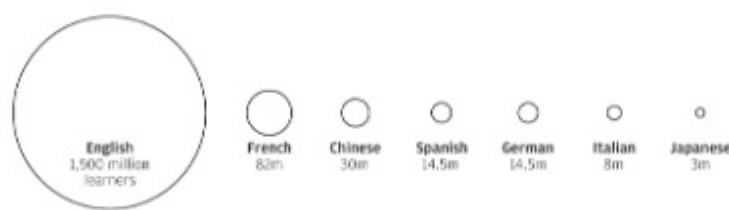


Number of countries in which this language is spoken



Sources: Ethnologue - Languages of the World, CIA-US, Unesco, United Nations, University of Düsseldorf, The Washington Post

Most popular languages being learned around the world



Distribution of living languages by country  
The total count of living languages used as a first language in 60 countries



SCMP Graphic: Alberto Lucas López

# Riweny infflyatsii

## Preis-Kaleidoskop

STATIS  
Statistisches Bundesamt

Die Inflationsrate lag im Oktober 2023 bei 3,8%. Die Teuerungsrate hängt nicht nur davon ab, wie sich die Preise verändern. Entscheidend ist auch, mit welchem Gewicht die Preisentwicklungen der einzelnen Waren und Dienstleistungen in den Verbraucherpreisindex eingehen.

Die Größe der Teilstücke spiegelt das Gewicht auf Basis 2020 wider. Die Farbe zeigt an, wie stark sich die Preise in der Güterklasse verändert haben.

### Andere Waren und Dienstleistungen 9,9%

Körperpflege, persönliche Gebrauchsgegenstände, Dienstleistungen sozialer Einrichtungen, Versicherungen, Banken etc.  
Preisänderung: 6,0%

### Gaststätten- und Beherbergungsdienstleistungen 4,7%

Preisänderung: 6,5%

### Bildungswesen 0,9%

Studiengebühren, Privatschule, Erwachsenenbildung, Kindergärten etc.  
Preisänderung: 3,9%

### Freizeit, Unterhaltung und Kultur 10,4%

Pauschalreisen, Sport, Lesen, Garten, Kultur, Unterhaltungselektronik, Computer etc.  
Preisänderung: 5,4%

### Post und Telekommunikation 2,3%

Brief- und Paketsendungen, Telekommunikationsgeräte und -dienstleistungen  
Preisänderung: 0,8%

### Verkehr 13,8%

Kauf und Betrieb von Fahrzeugen, Nutzung öffentlicher Verkehrsmittel etc.  
Preisänderung: 0,8%

### Gesundheit 5,5%

Preisänderung: 2,8%

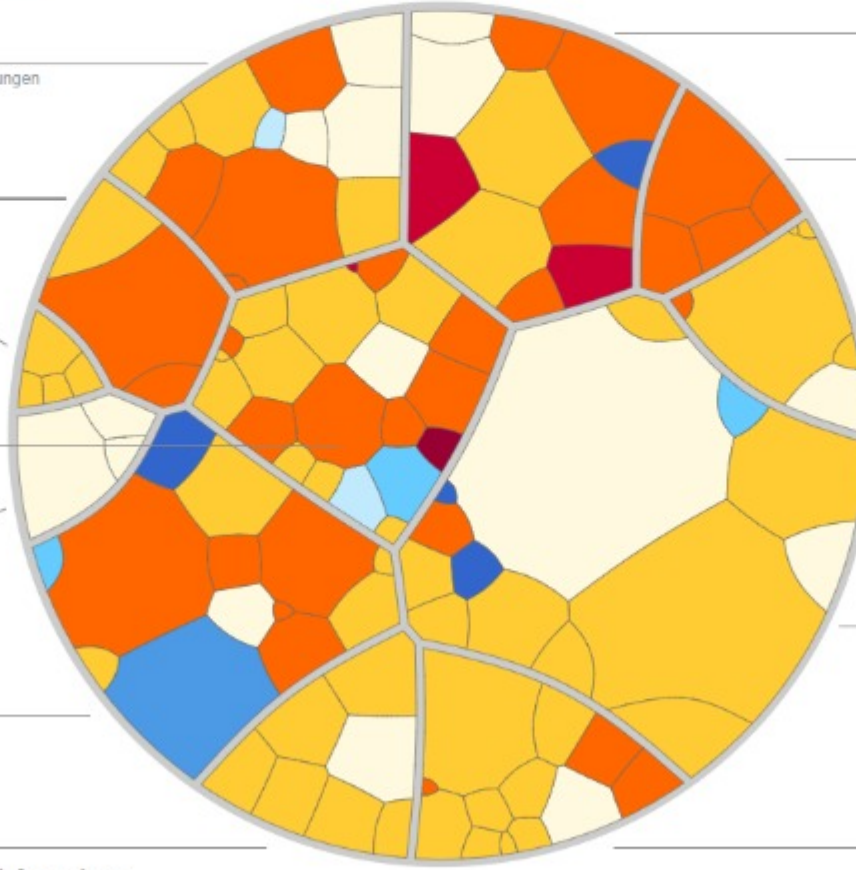
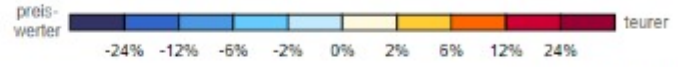
### Weiterführende Informationen

Wägungsschema

Preismonitor

Persönlicher Inflationsrechner

Oktober 2023 Preisänderung zum Vorjahresmonat



Nahrungsmittel und alkoholfreie Getränke 11,9%  
Preisänderung: 6,4%

Alkoholische Getränke und Tabakwaren 3,5%  
Preisänderung: 8,5%

Bekleidung und Schuhe 4,2%  
Preisänderung: 3,1%

Wohnung, Wasser, Strom, Gas und andere Brennstoffe 25,9%  
Tatsächliche und unterstellte (selbstgenutztes Wohneigentum) Miete, Haushaltsenergie, Nebenkosten etc.  
Preisänderung: 2,0%

Möbel, Leuchten, Geräte und anderes Haushaltszubehör 6,8%  
Möbiliar, Heimtextilien, Haushaltsgeräte, Geschir, Waren und Dienstleistungen für die Haushaltsführung etc.  
Preisänderung: 4,2%

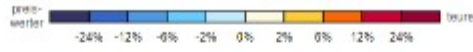
© Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2009-2023 / Michael Balzer, Universität Konstanz 2009

## Preis-Kaleidoskop

STATIS  
Statistisches Bundesamt

Die Inflationsrate lag im Oktober 2023 bei 3,8%. Die Teuerungsrate hängt nicht nur davon ab, wie sich die Preise verändern. Entscheidend ist auch, mit welchem Gewicht die Preisentwicklungen der einzelnen Waren und Dienstleistungen in den Verbraucherpreisindex eingehen.  
Die Größe der Teilstücke spiegelt das Gewicht auf Basis 2020 wider. Die Farbe zeigt an, wie stark sich die Preise in der Güterklasse verändert haben.

Oktober 2023 Preisänderung zum Vorjahresmonat



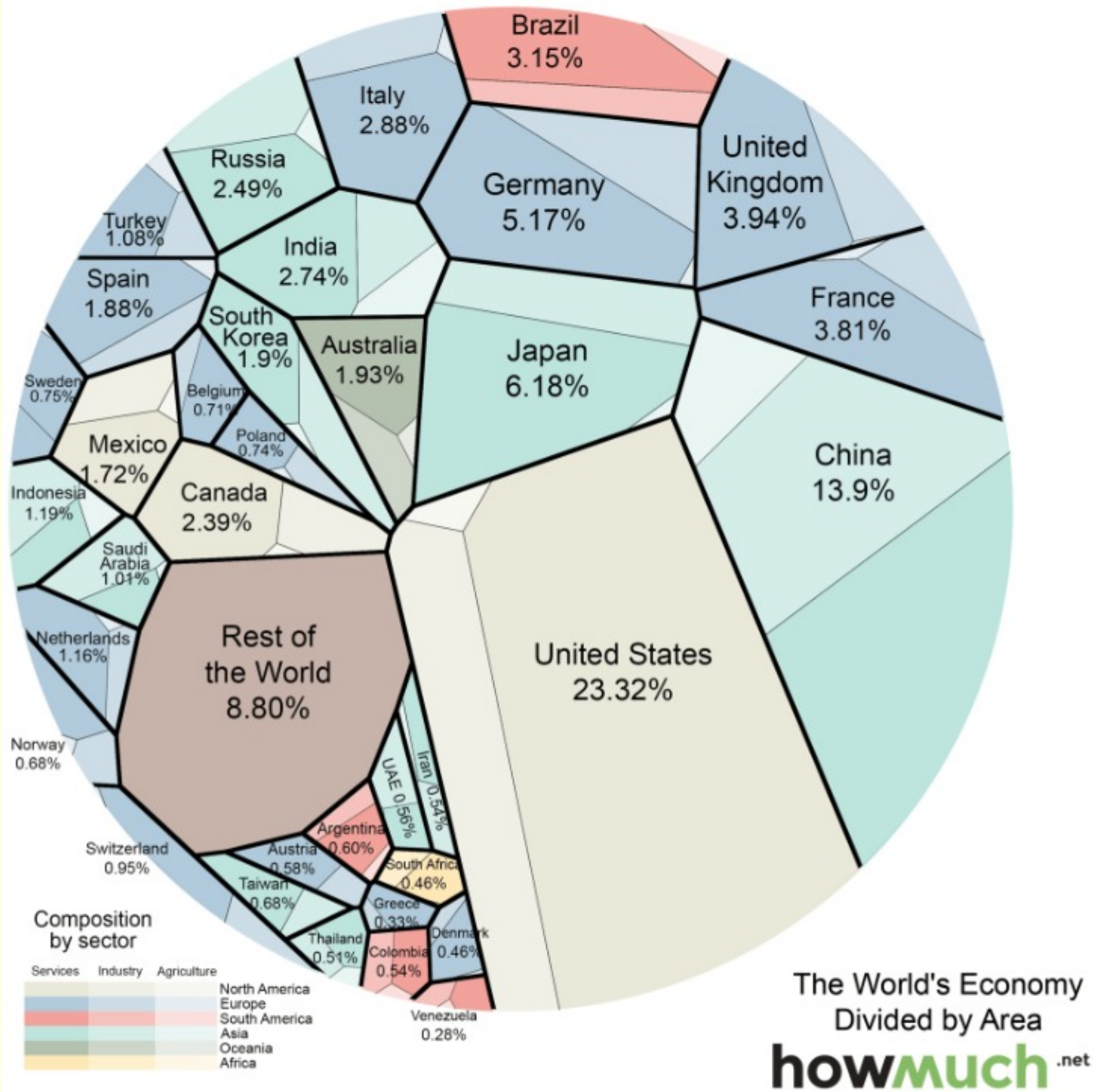
© Statistisches Bundesamt, Wiesbaden 2009-2023 / Michael Balzer, Universität Konstanz 2009



<https://service.destatis.de/Voronoi/PreisKaleidoskop.svg>

# Візуалізація номінального ВВП у всьому світі

США є найбільшою економікою у світі з номінальним ВВП у **17,4 трільйонів доларів у 2014 році**. Однак вони не є світовим лідером у всіх секторах економіки: США є економікою, що базується на послугах, з меншою увагою до сільського господарства, і промисловості, ніж в інших країнах (хоча його промисловий і сільськогосподарський сектори все ще є другим і третім за величиною у світі через величезний розмір економіки США).



Графік вище (діаграма Вороного) представляє відносний розмір економіки кожної країни в термінах номінального ВВП: чим більша територія, тим більший розмір економіки. Території далі поділяються на три сектори: послуги, промисловість і сільське господарство. Економіка США здебільшого складається з компаній, які займаються наданням послуг (79,7% порівняно із середнім світовим показником 63,6%), тоді як сільське господарство та промисловість складають менші за середні показники економіки (1,12% та 19,1% порівняно із середніми показниками), 5,9% і 30,5%).

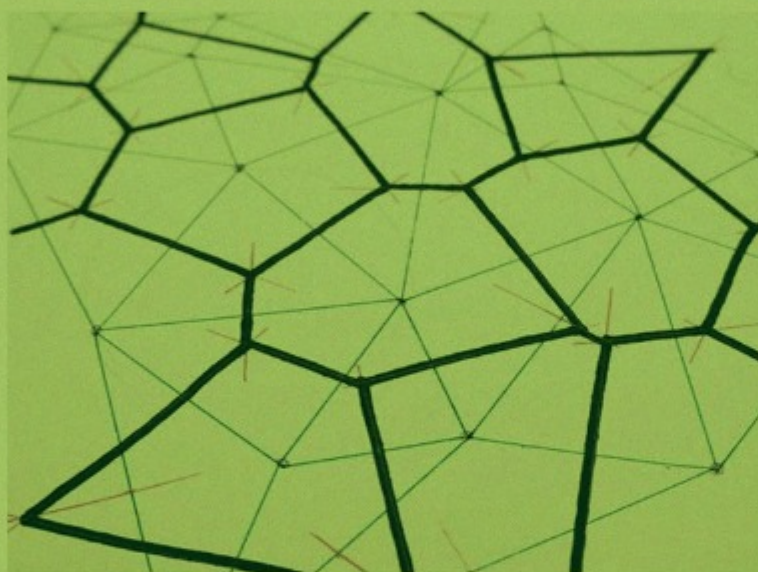


## One Diagram that Will Change the Way You Look at the US Economy

One way that America might not get it right and a visualization that will change the way you look at China's economy.



Діаграма Вороного або мозаїка Вороного, теселяція Вороного, декомпозиція Вороного – це геометричний спосіб розв'язання задачі про пошук найближчого сусіда або області близькості. Візьмемо розкидані на площині точки (ядра, у випадку Сноу – це джерела, звідкіля лондонці набирали воду), між двома точками (ядрами) проводимо пряму, знаходимо її середину і будуємо до неї перпендикуляр. Те саме повторюємо з іншими точками, а потім з'єднуємо перпендикуляри до точки їх перетину (як це показано на мал. 1.). У результаті утворюються комірки для кожного ядра, кожна точка площини комірки ближча до свого ядра, ніж до будь-якого іншого. Джон Сноу позначив біля кожного джерела (ядра комірки Вороного) будинки, у яких померли лондонці, і так визначив джерела зараження.



[kunst.com.ua](http://kunst.com.ua)

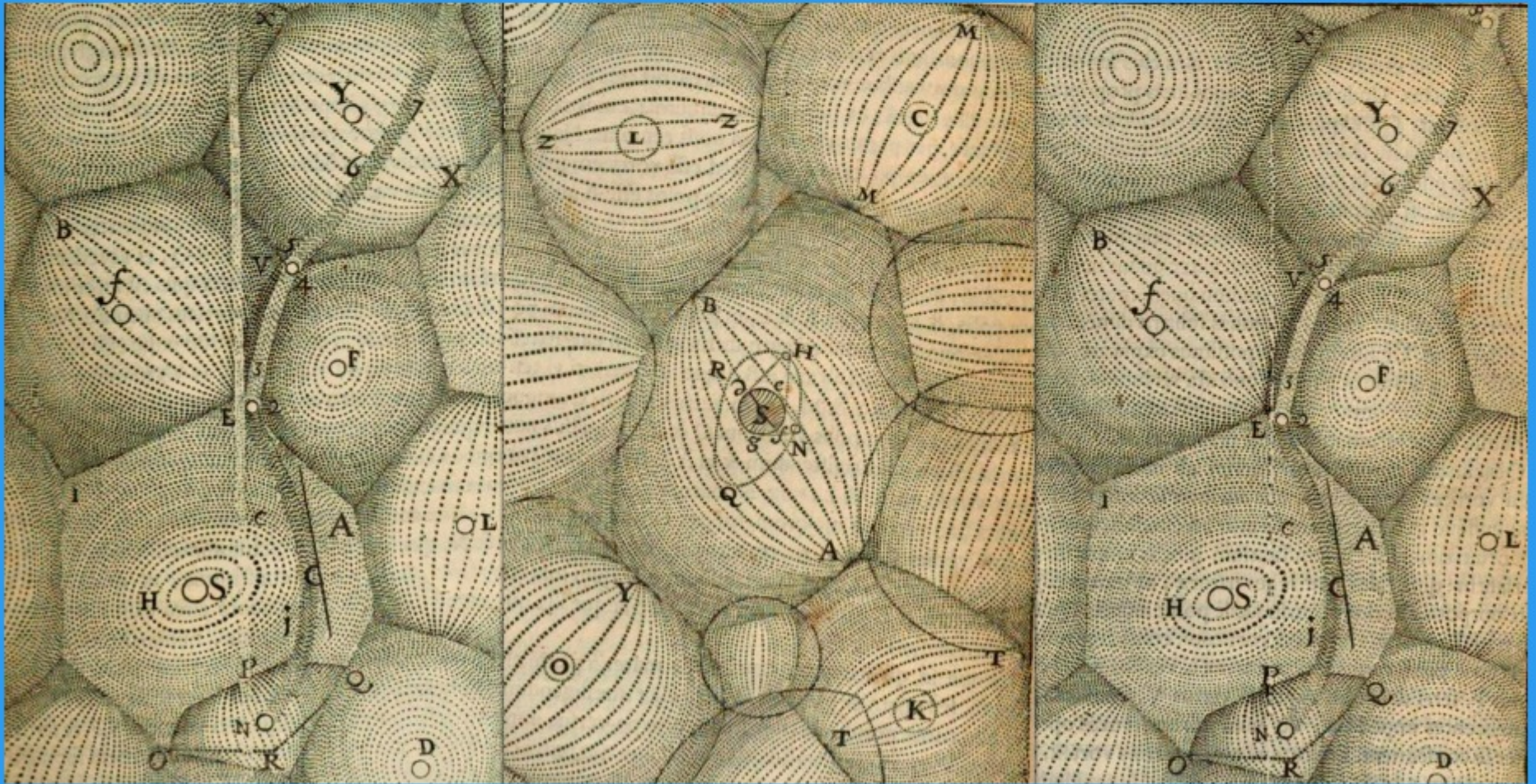
**Український математик винайшов спосіб розв'язати задачу про пошук області близькості, а потім ним скористалися на практиці. Що таке мозаїка Вороного?**

Український математик винайшов спосіб розв'язати задачу про пошук області близькості, а потім ним скористалися на практиці. Що таке мозаїка Вороного?

## Гравітація, теселяція та холера

Діаграми Вороного можна називати по-різному: математичним об'єктом, алгоритмом, методом, принципом, поділом. Пояснення цієї ідеї та того, як її використовують при розробці ігор, ми дамо трошки нижче, а зараз — невеличкий екскурс в історію.

Вважається, що цей принцип першим використав французький філософ і математик Рене Декарт. У 1644 році він написав і видав один з головних своїх творів — трактат «Засади філософії». Там Декарт запропонував ділити Всесвіт на зони гравітаційного впливу зірок, так звані вихори. Ці зони були виконані у вигляді діаграм Вороного, які, звісно, тоді ще так не називалися.



### Кілька діаграм Вороного в «Засадах філософії»

Через двісті років німецький математик Йоганн Петер Густав Лежен Діріхле у своїй праці «Про скорочення додатних квадратичних форм з трьома невизначеними цілими числами» досліджував ці самі квадратичні форми. У ній він використав двовимірні та тривимірні діаграми Вороного. Зробив він це настільки ґрунтовно, що й досі діаграми іноді називають теселяцією (замощенням) Діріхле.

Ще один класичний приклад нашого алгоритму в історії пов'язаний з англійським лікарем Джоном Сноу. Його вважають одним з піонерів сучасної епідеміології, анестезіології та медичної гігієни. Так склалося, що у медицині XIX століття домінувала теорія міазмів — вчені вважали, що холера та бубонну чуму викликала шкідлива форма повітря, а не мікроорганізми.

Але у 1854-55 роках Сноу щільно спілкувався з жителями лондонського району Сохо. З їхніх розповідей він зрозумів, що джерело спалаху холери — помпа комунального водопостачання неподалік. Використавши діаграму Вороного, Сноу довів: більшість тих, хто помер від епідемії холери в Сохо, перебували в осередку цієї водяної помпи.

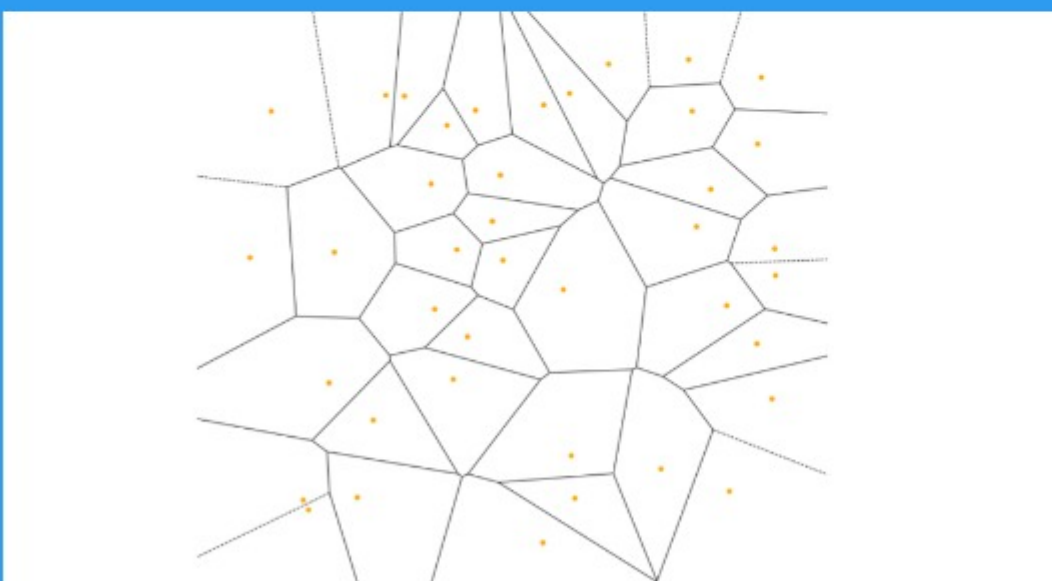


Діаграми Вороного та як їх використовують в геймдеві

 gamedev.dou.ua

## Математика в геймдеві. Що таке діаграми Вороного та як їх використовують при розробці ігор

Уявити створення ігор без математики неможливо. В геймдеві широко використовуються математичний аналіз, дискретна математика, лінійна алгебра, теорія графів, алгоритми тощо. Ми починаємо наш цикл статей про конкретні математичні прийоми, які можуть спро...



Алгоритм Форчуна [ред. | ред. код]

Докладніше: [Алгоритм Форчуна](#)

Алгоритм заснований на застосуванні [замітання прямою](#). Замітальна пряма — це допоміжний об'єкт, що є вертикальною прямою лінією. На кожному кроці алгоритму діаграма Вороного побудована для множини, що складається з замітальної прямої та точок ліворуч від неї. При цьому межа між областю Вороного прямою та областями точок складається з відрізків парабол (оскільки [геометричне місце точок](#), рівновіддалених від заданої точки та прямої — це [парабола](#)). Пряма рухається зліва направо. Щоразу, коли вона проходить через чергову точку, ця точка додається до вже побудованої ділянки діаграми. Додавання точки до діаграми при використанні [двійкового дерева пошуку](#) має складність  $O(\log n)$ , всього точок  $n$ , а сортування точок по  $x$ -координаті може бути виконана за  $O(n \log n)$ , тому [обчислювальна складність](#) алгоритму Форчуна дорівнює  $O(n \log n)$ .



### Ілюстрація [ред. | ред. код]

Як простий приклад, розглянемо групу крамниць в місті на площині. Припустимо ми хочемо оцінити кількість споживачів певної крамниці. За умови рівності цін, товарів, якості обслуговування та інших параметрів, розумно вважати, що споживачі обирають найближчу крамницю, тобто, важить лише відстань. В цьому випадку комірку Вороного  $R_x$  для певної крамниці  $R_x$  можна використати як грубу оцінку кількості потенційних клієнтів, що відвідують цю крамницю (яка відтворена як точка на мапі міста).

Досі мало місця припущення, що відстань між точками міста вимірюється із використанням знайомої відстані Евкліда:  $\ell_2 = d[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

Однак, якщо ми припустимо, що споживачі лише їздять у магазин на авто і дороги паралельні до осей  $x$  та  $y$ , тоді має сенс використовувати відстань таксиста, яка обчислюється наступним чином  $d[(a_1, a_2), (b_1, b_2)] = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$ .



Мангеттенська метрика  $d_1$  між двома векторами  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  в  $n$ -вимірному дійсному просторі з заданою прямокутною системою координат — сума довжин проєкцій відрізка між початком на осі координат. Більш формально

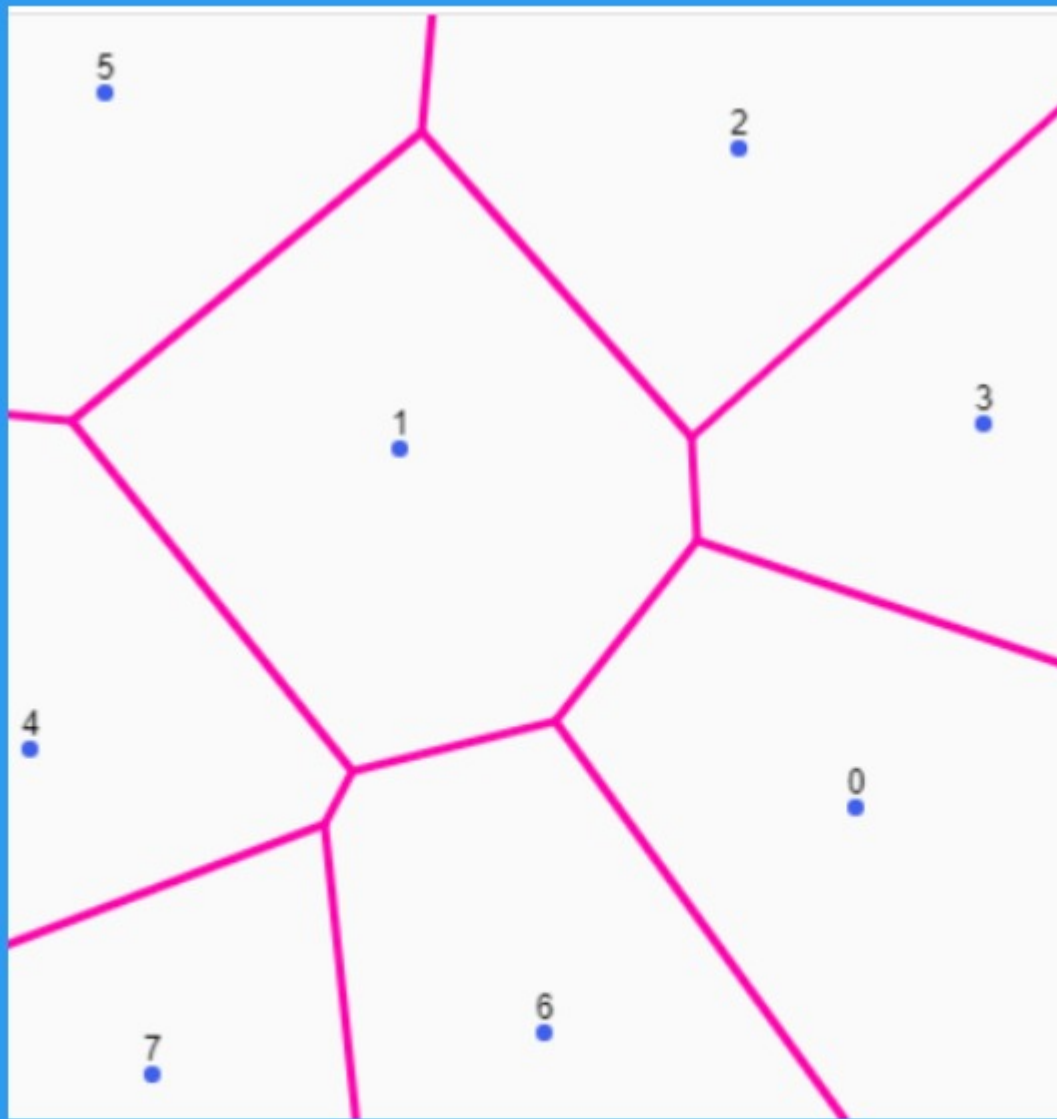
$$d_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|_1 = \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|.$$

де

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  і  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$  — вектори

наприклад, на площині відстань між кварталами між точками  $(p_1, p_2)$  і  $(q_1, q_2)$  дорівнює  $|p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$ .

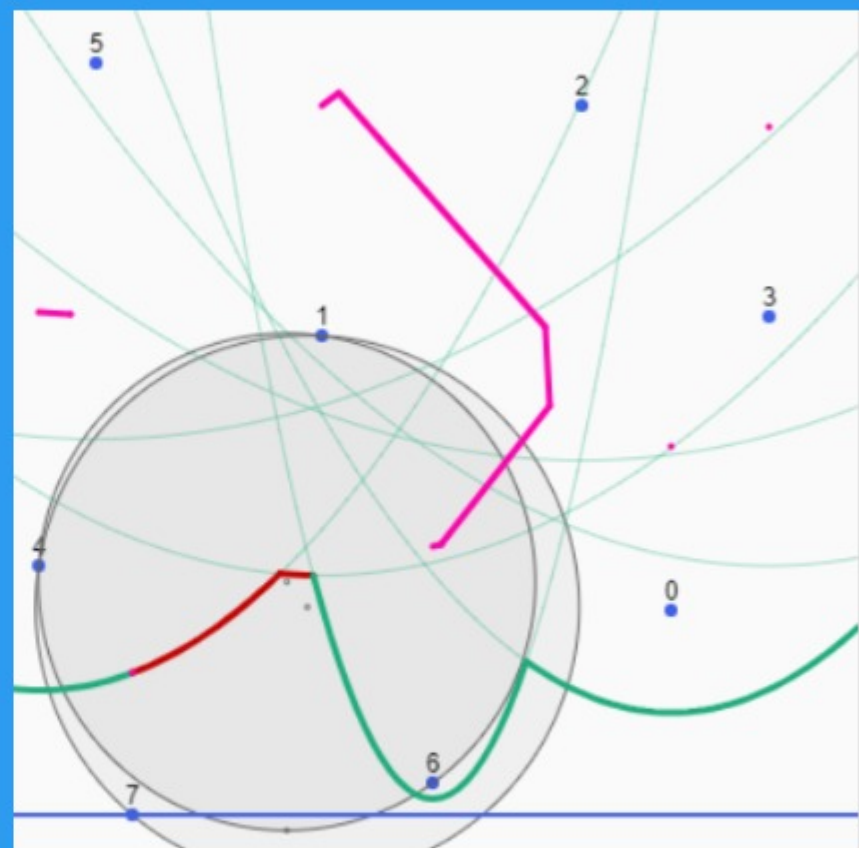
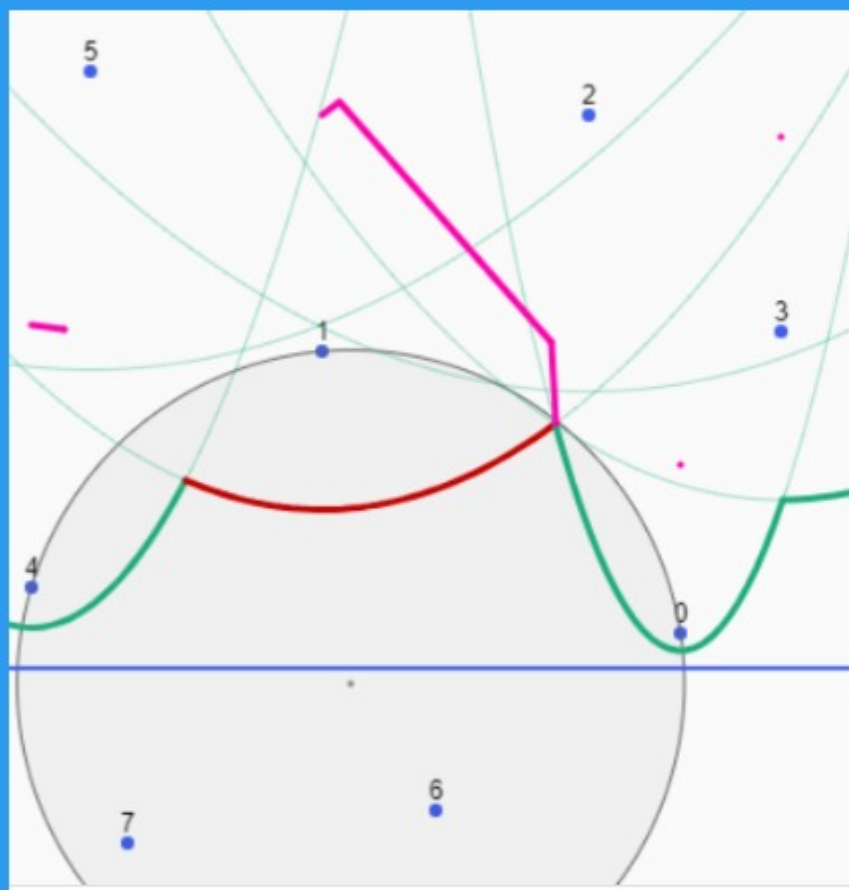
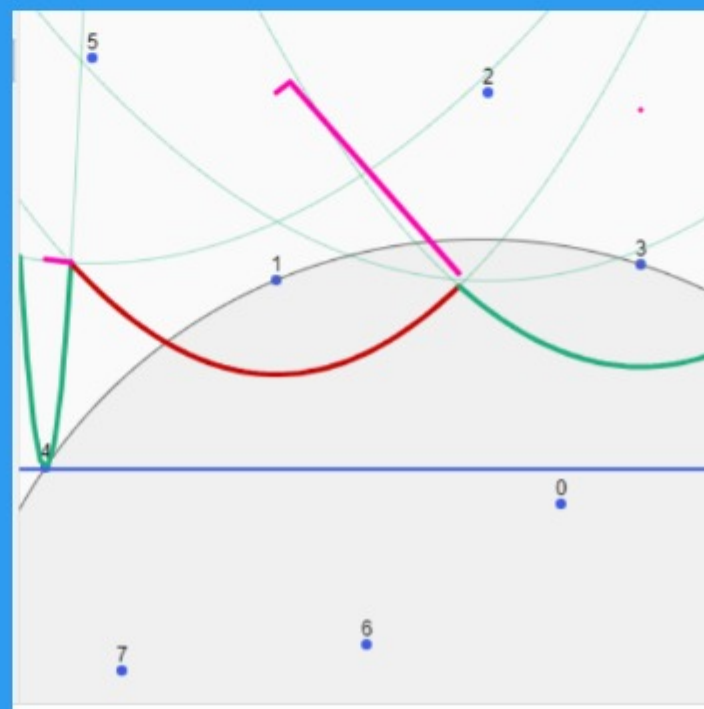
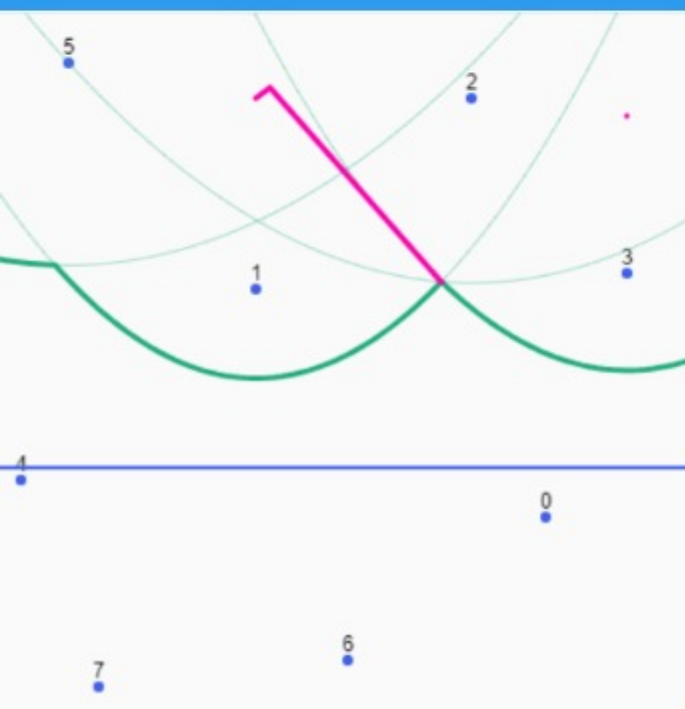
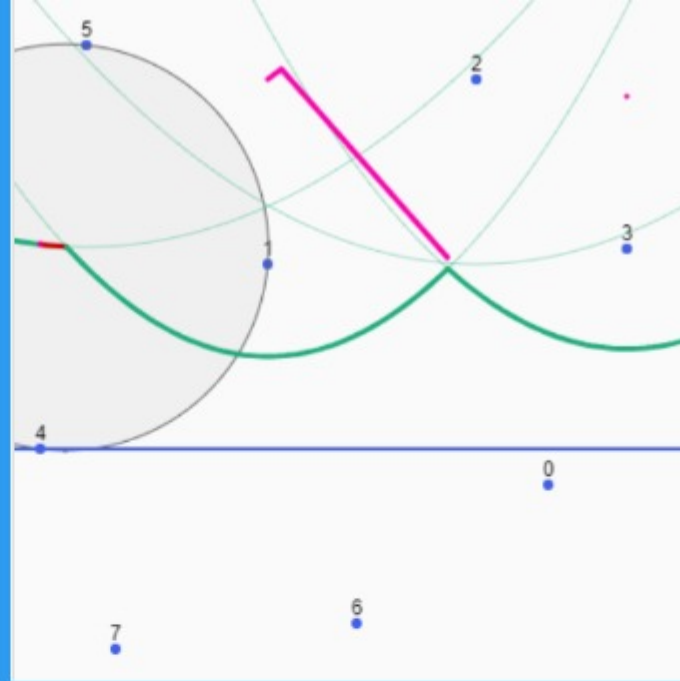
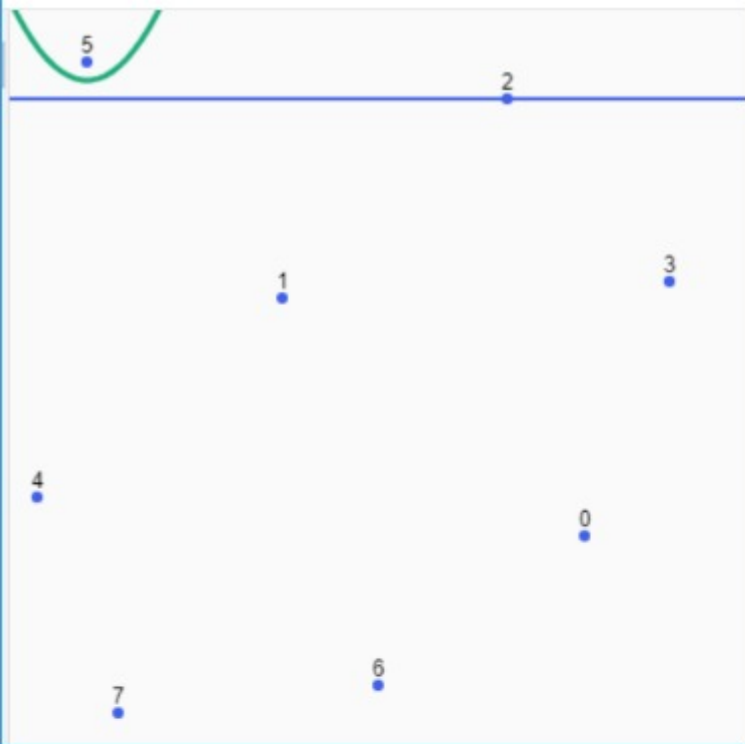




 [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org)

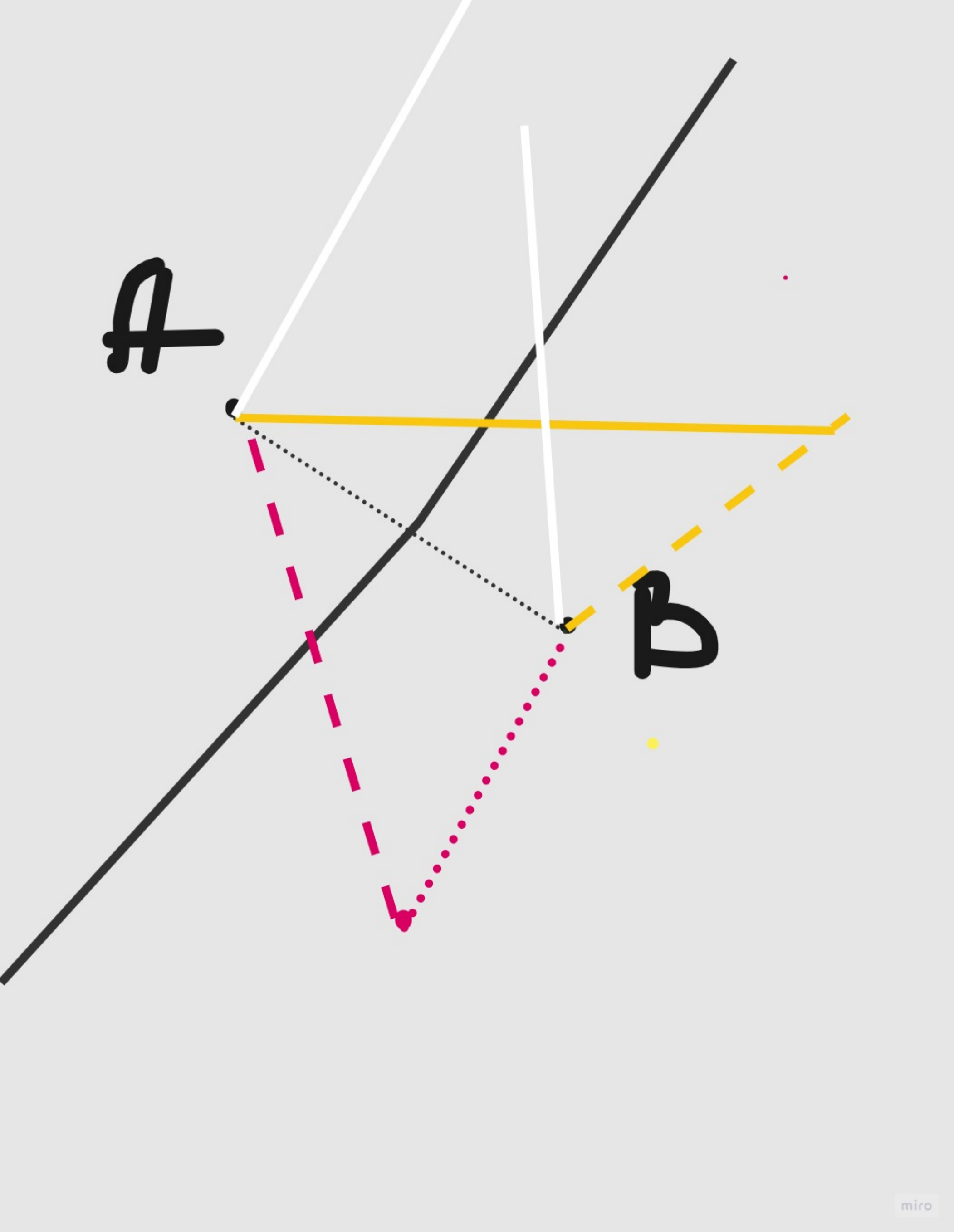
## Khan Academy

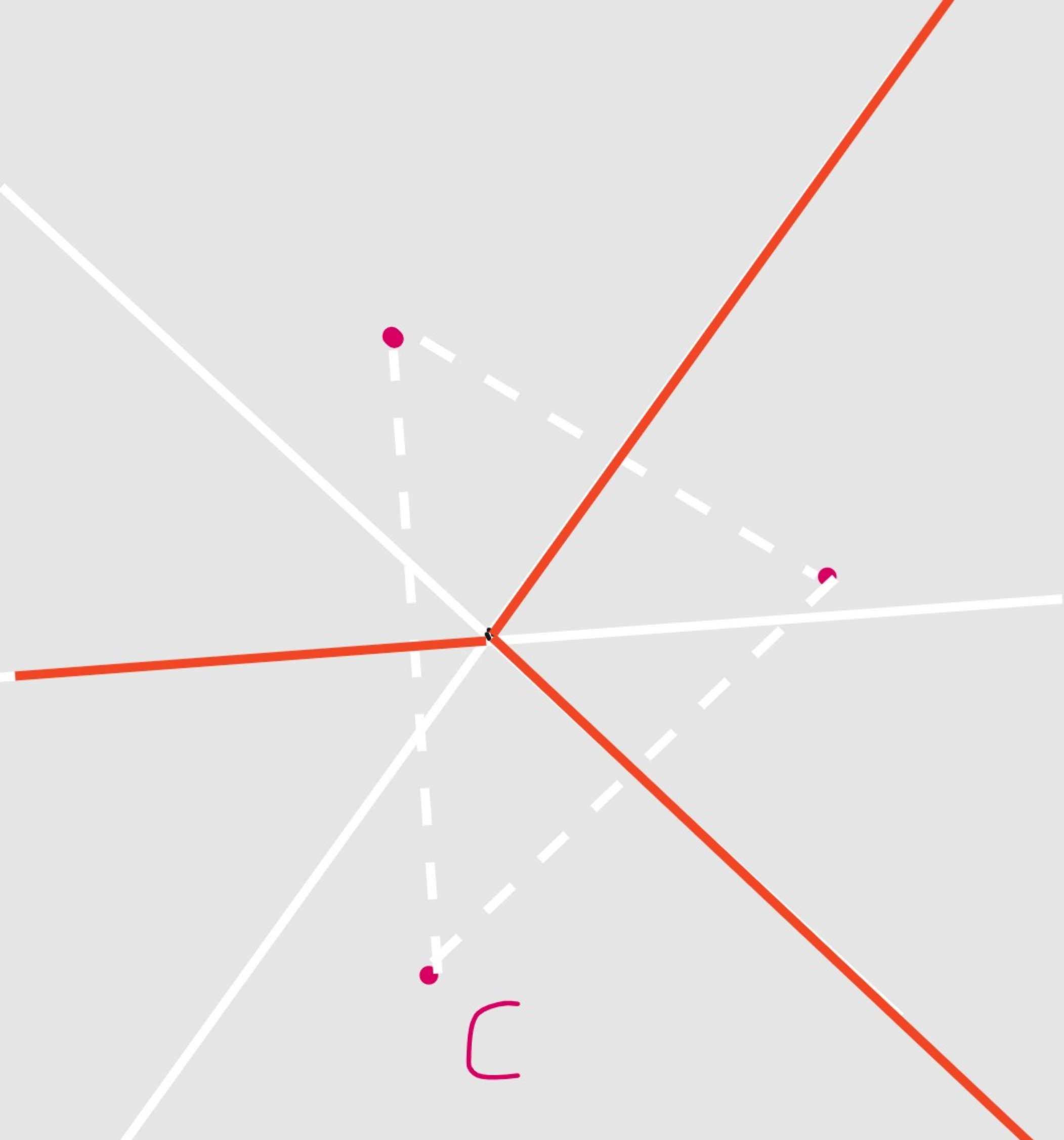
Learn for free about math, art, computer programming, economics, physics, chemistry, biology, medicine, finance, history, and more. Khan Academy is a nonprofit with the mission of providing a free, world-class education for anyone, anywhere.



A

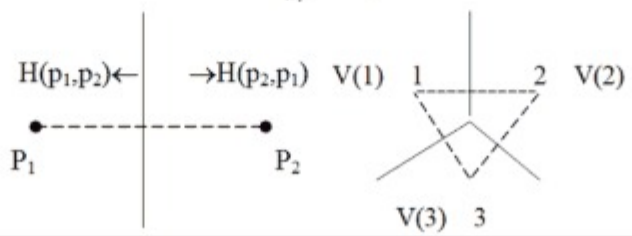
B





Означення 5.5 Область  $V_i$  називається **многокутником Вороного**, яка відповідає точці  $p_i$ . Отримані таким чином  $N$  областей утворюють розбиття площини, яке називається **діаграмою Вороного**. Діаграму Вороного множини точок  $S$  будемо позначати через  $Vor(S)$ .

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j)$$

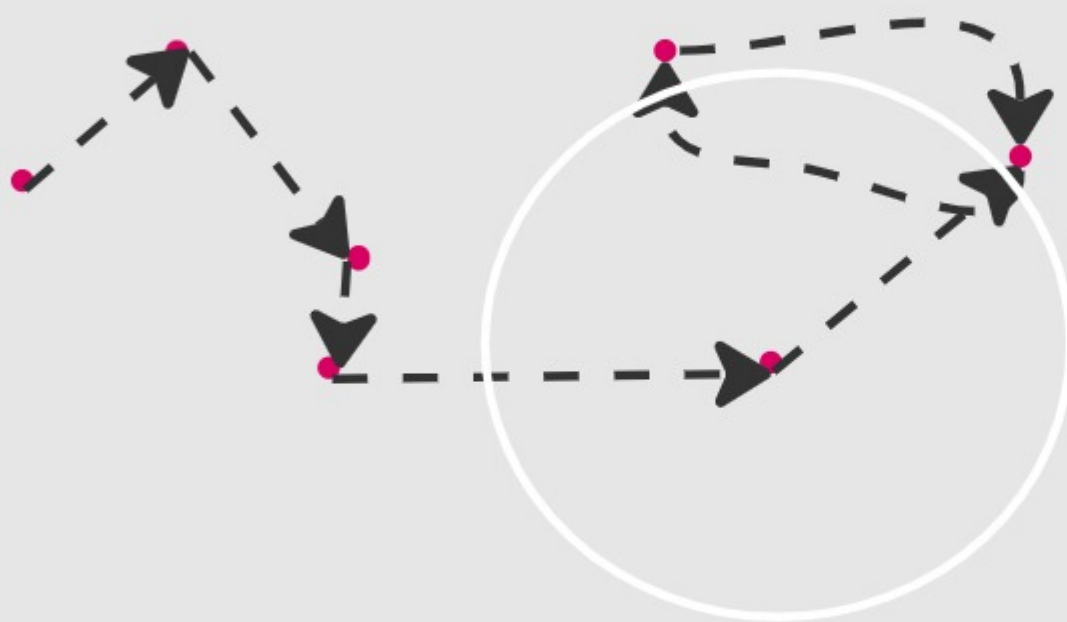


Задача Б.1 (НАЙБЛИЖЧА ПАРА). На площині задано  $N$  точок. Знайти дві із них, відстань між якими найменша (може виявитись, що таких пар може бути декілька, тоді достатньо знайти хоча б одну із них).



Відстань між двома точками  $P_1(x_1, y_1)$  та  $P_2(x_2, y_2)$  обчислюється за формулою  $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

Задача Б.2 (УСІ НАЙБЛИЖЧІ СУСІДИ). На площині задано  $N$  точок. Знайти найближчого сусіда для кожної точки множини.



Задача Б.4 (ТРИАНГУЛЯЦІЯ). На площині задано  $N$  точок. З'єднати їх відрізками, що не перетинаються, таким чином, щоб кожна область всередині опуклої оболонки цієї множини точок була б трикутником.



cg.unicyb.kiev.ua

### Комп'ютерна графіка та обчислювальна геометрія - ГЛАВА 5. БЛИЗКІСТЬ. ОСНОВНІ АЛГОРИТМИ.

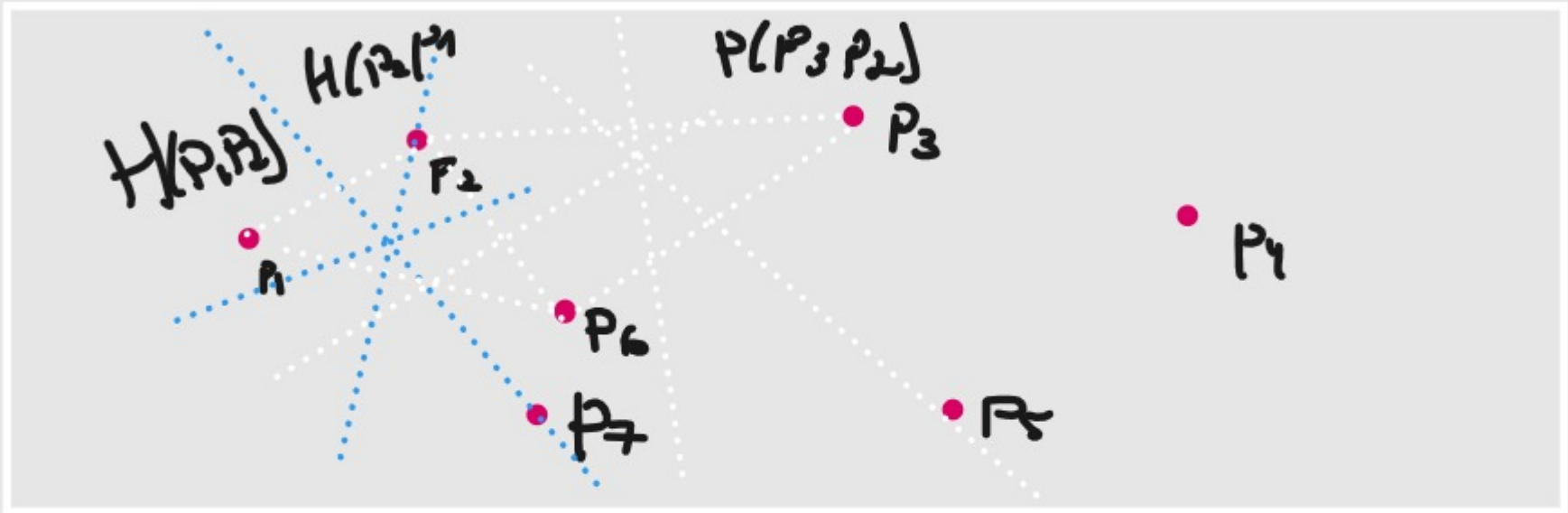
Почнемо з перерахування різних, на перший погляд задач, які відносяться до визначення близькості, але які, близькі з точки зору процедури їх розв'язання. Задача Б.1 (НАЙБЛИЖЧА ПАРА). На площині задано  $N$  точок. Знайти дві із них, відстань між якими найме...

Задані функції будують області близькості до точок  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на площині. Для двох точок  $p_i, p_j$  будують області близькості до  $p_i$  та  $p_j$ , до якої з них ближче. Діагональ області визначає структуру множини.

Задані функції будують області близькості до точок  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на площині. Для двох точок  $p_i, p_j$  будують області близькості до  $p_i$  та  $p_j$ , до якої з них ближче. Діагональ області визначає структуру множини.

Задані функції будують області близькості до точок  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на площині. Для двох точок  $p_i, p_j$  будують області близькості до  $p_i$  та  $p_j$ , до якої з них ближче. Діагональ області визначає структуру множини.

Задані функції будують області близькості до точок  $p_1, p_2, p_3, p_4$  на площині. Для двох точок  $p_i, p_j$  будують області близькості до  $p_i$  та  $p_j$ , до якої з них ближче. Діагональ області визначає структуру множини.



procedure ДІАГРАМА ВОРОНОГО

Крок 1. Розділити множину  $S$  на дві приблизно рівні підмножини  $S_1$  та  $S_2$ , використавши для цього медіану, за  $x$ -координатою.

Крок 2. Рекурсивно побудувати  $Vor(S_1)$  та  $Vor(S_2)$ .

Крок 3'. Побудувати ламану  $\sigma$ , що розділяє  $S_1$  та  $S_2$ .

Крок 3". Вилучити усі ребра діаграми  $Vor(S_2)$ , розташовані зліва від  $\sigma$ , та всі ребра  $Vor(S_1)$ , розташовані справа від  $\sigma$ . Отримаємо  $Vor(S)$  - діаграму Вороного для всієї множини.



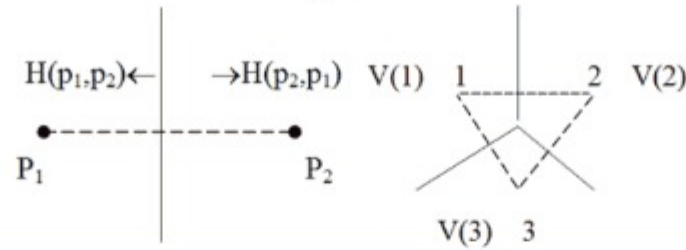
 miro.com

# Sign up | Miro | The Visual Workspace for Innovation

Miro is a visual workspace for innovation where teams manage projects, design products, and build the future together. Join 60M+ users from around the world.

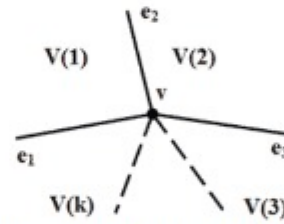
Означення 5.5 Область  $V_i$  називається **многокутником Вороного**, яка відповідає точці  $p_i$ . Отримані таким чином  $N$  областей утворюють розбиття площини, яке називається **діаграмою Вороного**. Діаграму Вороного множини точок  $S$  будемо позначати через  $Vor(S)$ .

$$V_i = \bigcap_{j \neq i} H(p_i, p_j)$$



**Властивості діаграми Вороного**

1. Припущення. Жодні чотири точки вихідної множини  $S$  не лежать на одному колі.
2. Теорема 5.5 Кожна вершина діаграми Вороного є точкою перетину трьох ребер діаграми.

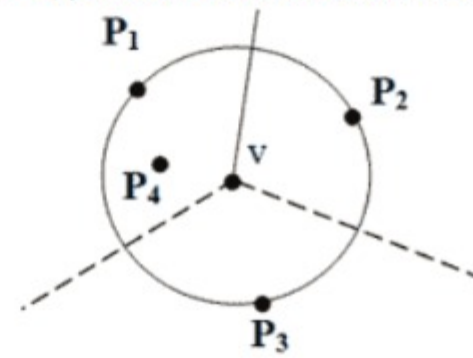


Мал. 5.13. Вершина діаграми Вороного з інцидентними їй вершинами.

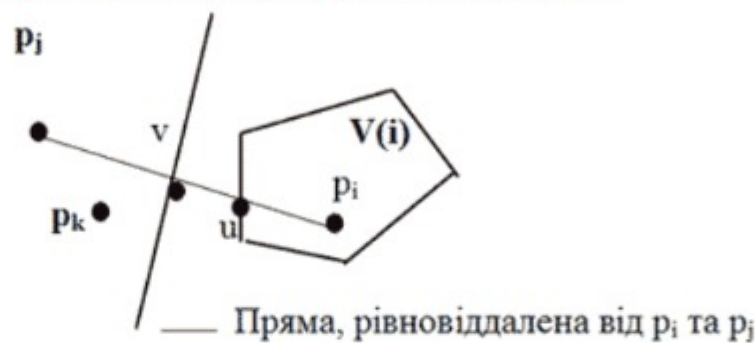
3. Вершини діаграми Вороного є центрами кіл, кожне з яких визначається трьома точками вихідної множини, а сама діаграма Вороного є регулярною (всі вершини мають однаковий ступінь) зі ступенем вершин, що дорівнює трьом. Позначимо через  $C(v)$  коло, що відповідає вершині  $v$ .

Для будь-якої вершини  $v$  діаграми Вороного множини  $S$  коло  $C(v)$  не містить жодних інших вершин множини  $S$ .

*Handwritten red text:* p4? ↗



Кожний найближчий сусід точки  $p_i$  множини  $S$  визначає ребро у многокутнику Вороного  $V_i$ .

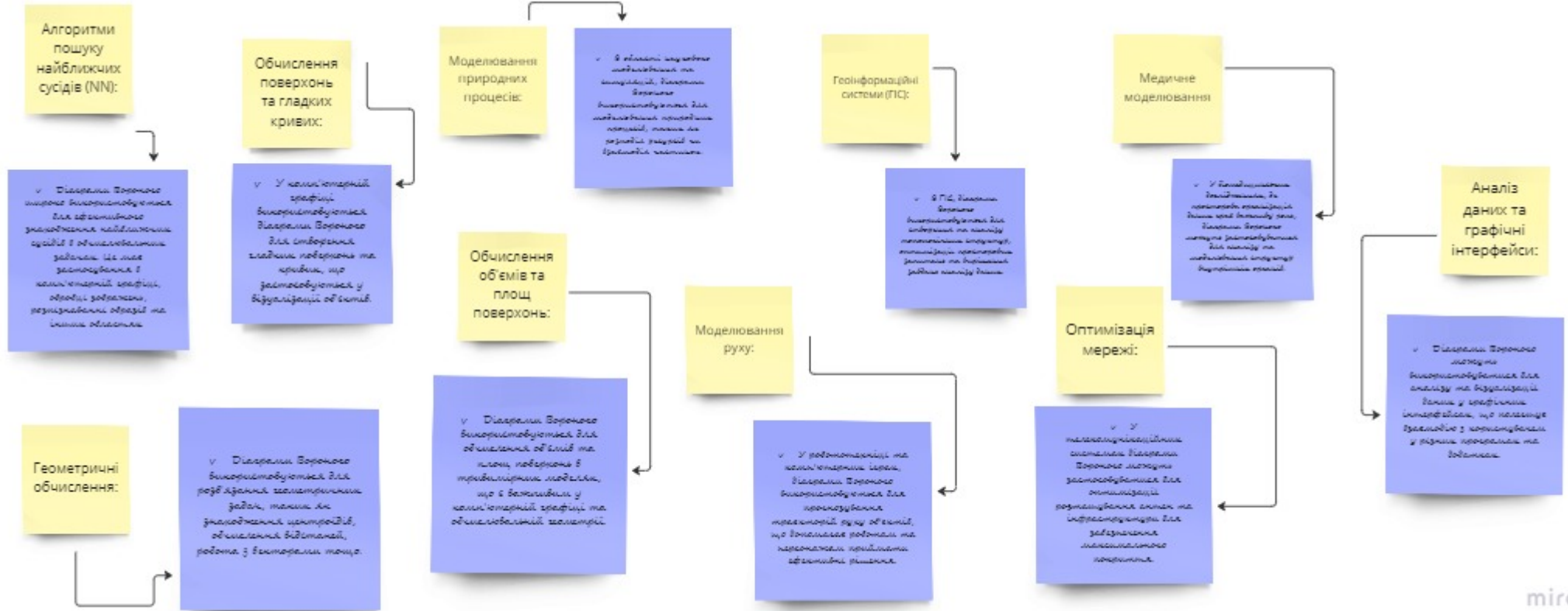


Мал. 5.10. Прямокутний граф, двоїстий

**Теорема 5.9** Граф, двоїстий діаграмі Вороного, є триангуляцією множини  $S$ .

**Теорема 5.10** Діаграма Вороного множини з  $N$  точок має не більш  $2N - 5$  вершин та  $3N - 6$  ребер.

Для побудови діаграми Вороного множини з  $N$  точок необхідно  $\Omega(N \log N)$  операцій в гіршому випадку.





зв'язок діаграми Вороного з *триангуляціями* Делоне

